

На правах рукописи

Хабибуллин Артем Ришатович

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА НА ФОНЕ ПРОСТРАНСТВ  
КРотовых НОР И КОСМИЧЕСКИХ СТРУН

01.04.02 – Теоретическая физика

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Казань - 2009

Работа выполнена на кафедре математики, информатики и методики преподавания информатики Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования “Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет”.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
доцент Хуснутдинов Наиль Рустамович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
Бронников Кирилл Александрович (ВНИИМС г. Москва)  
доктор физико-математических наук,  
профессор Аминова Ася Васильевна

Ведущая организация: Российский университет дружбы народов

Защита состоится “ 17 ” сентября 2009 года в 14<sup>30</sup> на заседании диссертационного совета Д 212.081.15 при Казанском государственном университете имени В.И. Ульянова-Ленина по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан “ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2009 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
доктор физ.-мат. наук, профессор

Еремин М.В.

ренции “Международная уфимская зимняя школа-конференция по математике и физике”. - Уфа, 2005. - С.98-100.

7. Хуснутдинов Н.Р. Эффект Казимира для сферы в пространстве-времени кротовой норы. / Н.Р. Хуснутдинов, А.Р. Хабибуллин // Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике *RUSGRAV-12*. - Казань, 2005. - С.124-125.
8. Хабибуллин А.Р. Эффект Казимира в пространстве-времени кротовой норы, окруженной двумя сферическими оболочками / А.Р. Хабибуллин // Сборник трудов школы-семинара “Российская школа-семинар по современным проблемам гравитации и космологии” *GRACOS-2007*. - Казань, 2007. - С.203.
9. Хабибуллин А.Р. Сингулярные потенциалы в теории эффекта Казимира. / А.Р. Хабибуллин // Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике *RUSGRAV-13*. - Москва, 2008. - С.70-71.
10. Хабибуллин А.Р. Энергия нулевых колебаний массивного скалярного поля при наличии сингулярных потенциалов / А.Р. Хабибуллин // Сборник трудов школы-семинара “Российская школа-семинар по современным проблемам гравитации и космологии” *GRACOS-2009*. - Казань, 2009. - С.127.

массивного скалярного поля в пространстве-времени кротовой норы, окруженной одной или двумя сферическими поверхностями. Показано, что для такого пространства-времени сила Казимира меняет свой знак при определенных значениях параметра  $\xi$

3. Вычислена энергия нулевых колебаний скалярных полей при наличии нетривиальных граничных условий, предложен корректный способ проведения перенормировки в этом случае.

**Основное содержание диссертации опубликовано в  
следующих работах:**

1. Khusnutdinov N.R.. Zero Point Energy of a Massless Scalar Field in the Cosmic String Space-Time / N.R. Khusnutdinov, A.R. Khabibullin // Gen. Rel. Grav. - 2004. - Vol. **36**, - P. 1613-1618.
2. Khabibullin A.R.. Casimir effect in a wormhole space-time / A.R. Khabibullin, N.R. Khusnutdinov, S.V.Sushkov // Glas. Quan. Grav.. - 2006. - Vol. **24**, - P. 627-634.
3. Sushkov S.V.. Casimir effect for two spheres in a wormhole space-time / S.V.Sushkov, A.R. Khabibullin, N.R. Khusnutdinov // Grav. and Cos.. - 2008. - Vol. **14**, - P. 147-153.
4. Хабибуллин А.Р. Энергия нулевых колебаний массивного скалярного поля с сингулярным потенциалом для идеально проводящей пластины / А.Р.Хабибуллин, Н.Р. Хуснутдинов // Вестник Казанского государственного педагогического университета. - 2005. - Том **4**, - С. 59-65.
5. Хабибуллин А.Р.. Энергия нулевых колебаний в пространстве-времени кротовой норы / А.Р. Хабибуллин // Сборник трудов конференции “III международная конференция по фундаментальным проблемам физики”. - Казань, 2005. - С.110-111.
6. Хабибуллин А.Р.. Эффект Казимира в пространстве-времени кротовой норы / А.Р. Хабибуллин // Сборник трудов конфе-

**Общая характеристика работы**

**Актуальность темы исследования.** Интерес к пространствам с нетривиальной топологической структурой был вызван работами Эйнштейна, Розена, Уилера, Торна, Морриса и Юртсевера. В работах этих авторов было показано, что такие пространства возникают при рассмотрении черных дыр, кротовых нор, пространств с нарушением причинности, и т.д. Уилером было введено понятие "кротовая нора" для интерпретации элементарных частиц в виде ручек пространства-времени. После работ Морриса, Торна и Юртсевера интерес вызвали проходимые кротовые норы, позволяющие рассматривать нарушение причинности в современной физике. Основной, и до сих пор нерешенной задачей физики кротовых нор является проблема объяснения их существования, поскольку из самых общих соображений можно показать, что пространство кротовой норы нарушает все известные условия энергодоминантности, и возможным источником пространства кротовой норы может является экзотическая материя или вакуумные квантовые флуктуации полей. В отсутствии квантовой гравитации большую роль играет полуклассическая квантовая теория полей, в рамках которой квантовыми являются все поля кроме гравитационного.

В процессе эволюции Вселенной спонтанное нарушение симметрии приводит к появлению различных топологических дефектов, одним из которых являются космические струны, представляющие собой нитеобразную полевую конфигурацию. Экспериментально измеренная анизотропия реликтового излучения, совпадает с теоретически предсказанной только при учете существования космических струн. Из астрофизических наблюдений в данное время получена верхняя оценка количества космических струн во Вселенной – около 10-12 струн на размер горизонта. Рассмотрение бесконечно тонких космических струн приводит к появлению уравнений с сингулярными потенциалами или с нетривиальными граничными условиями. Такого рода потенциалы часто возникают в различных областях

физики, в реальных физических моделях, связанных с появлением полупрозрачных границ, описываемых модельными сингулярными потенциалами.

**Цель работы** состоит в исследовании энергии вакуумных флуктуаций квантованных скалярных полей в пространствах кротовых нор и космических струн, а также при наличии нетривиальных граничных условий или сингулярных потенциалов.

**Научная новизна** работы заключается в следующем: в диссертации развивается единый подход вычисления энергии вакуумных флуктуаций поля на основе регуляризации обобщенной дзета-функцией для пространств с нетривиальной топологией; впервые получено общее выражение энергии нулевых колебаний массивного скалярного поля для произвольного дефицита угла космической струны конечного поперечного сечения; получена энергия нулевых колебаний массивного скалярного поля в пространстве-времени кротовой норы, окруженной одной или двумя сферическими оболочками; показано, что сила Казимира для такой модели может быть не только силой отталкивания, но и силой притяжения при определенных радиусах сферы; получены выражения для энергий нулевых колебаний скалярных полей при наличии сингулярных потенциалов; найдено нормировочное условие, позволяющее получить конечное выражение для энергии скалярных полей при граничных условиях различного типа.

**Научная ценность и практическая значимость** состоит в развиваемом подходе, позволяющем вычислить энергию вакуумных флуктуаций поля, не учитывая спектр оператора Лапласа в явном виде. Получено выражение, позволяющие найти энергию вакуумных флуктуаций поля в пространстве-времени космической струны конечного поперечного сечения для произвольного дефицита угла. В отличие от известных ранее результатов, использование этого подхода в пространствах с нетривиальной топологией (идеально проводящая сфера, содержащая кротовую нору) показало, что сила Ка-

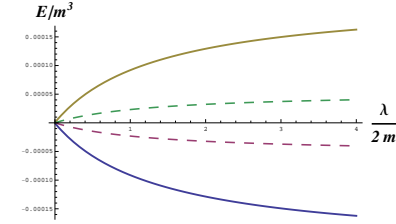


Рис. 6: Графики зависимости энергии  $E(\lambda)$  при фиксированном параметре  $\beta = mL$ . Представлены графики энергий для значений  $\beta = 2$  и  $\beta = 2.5$ . Графики для случая  $D - N$  ( $TM1$ -мода) расположены выше оси абсцисс, для случая  $D - D$  ( $TE$ -мода) ниже оси абсцисс. Значению  $\beta = 2$  соответствует сплошная линия,  $\beta = 2.5$  - линия с длинным пунктиром. Легко видеть, что при увеличении  $\beta$  энергия нулевых колебаний для любого  $\lambda$  стремится к нулевому значению.

рисунке 6. Энергия нулевых колебаний при  $\lambda = 0$  принимает значение стандартной энергии Казимира для двух пластин, удаленных на расстояние  $2L$  друг от друга, при определенных параметрах  $\beta$ . Стоит отметить, что при  $\beta \rightarrow \infty$  (соответствует  $m \rightarrow \infty$ ) энергия нулевых колебаний, также как и любая другая энергия, включая стандартную энергию Казимира, должна принимать нулевое значение при любых  $\lambda$ . Это хорошо видно из рисунка, где уже для  $\beta = 2$  и  $\beta = 2.5$  энергия принимает практически нулевое значение для любых  $\lambda$ . Такое поведение энергии является правильным в квантовой теории поля и объясняется простым фактом, что при больших массах поля квантовых флуктуаций не существует.

### Основные результаты работы

1. На основе равномерного разложения функций Лежандра получено выражение для энергии нулевых колебаний массивного скалярного поля в пространстве-времени космической струны конечного поперечного сечения для произвольного дефицита угла.

2. Получено конечное выражение для энергии нулевых колебаний

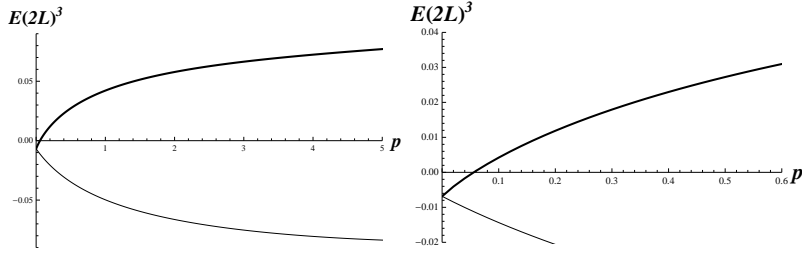


Рис. 5: График зависимости энергии от  $\lambda$  при фиксированном  $L$ . График энергии нулевых колебаний в  $D - N$  случае представлен жирной линией. График энергии нулевых колебаний в  $D - D$  случае представлен тонкой линией.

$\lambda \rightarrow 0$  и  $\lambda \rightarrow \infty$  энергия нулевых колебаний принимает значения, согласующиеся с теорией. При  $\lambda \rightarrow 0$  энергия принимает значение равное  $(2L)^3 E_{Cas} = -\pi^2/1440$  и переходит в стандартную энергию Казимира для двух пластин, удаленных на расстояние  $2L$  друг от друга. При  $\lambda \rightarrow \infty$  энергия принимает постоянное значение, одинаковое, с точностью до знака, для  $D - N$  и  $D - D$  граничных условий. Значение энергии в этих случаях равно  $16\pi^2/1440$ . Отметим, что в первом случае граничных условий  $D - N$  (Рис. 5) энергия нулевых колебаний принимает нулевое значение при определенном значении параметра  $p = \lambda L/2$ , что соответствует  $\lambda L \approx 0.11$ .

В случае границ, удаленных на конечное расстояние  $L$  для массивного поля также получены выражения для энергии нулевых колебаний ( $q = 2m/\lambda$ ):

$$E^{DD} = \frac{\lambda^3}{32\pi^2} \int_q^\infty dx x \sqrt{x^2 - q^2} \ln \left( \frac{x + \text{th}(xp)}{x + 1} \right) + E_{Cas}^{DD}(2L), \quad (22)$$

$$E^{DN} = \frac{\lambda^3}{32\pi^2} \int_q^\infty dx x \sqrt{x^2 - q^2} \ln \left( \frac{x + \text{cth}(xp)}{x + 1} \right) + E_{Cas}^{DN}(2L). \quad (23)$$

Численный анализ энергии для двух случаев  $D - N$  (соответствует  $TM1$ -моду)  $D - D$  (соответствует  $TE$ -моду), представлен на

зимира может менять свой знак, при определенных значениях параметров. Найдено нормировочное условие, позволяющее получить конечное выражение для энергии вакуумных флуктуаций в скалярных полях с нетривиальными граничными условиями или сингулярными потенциалами.

### Основные результаты, выносимые на защиту:

1. Получено выражение для энергии нулевых колебаний массивного скалярного поля в пространстве-времени космической струны конечного поперечного сечения для произвольного дефицита угла.
2. Вычислена энергия нулевых колебаний массивного скалярного поля в пространстве-времени кротовой норы, окруженной одной или двумя сферическими поверхностями.
3. Вычислена энергия нулевых колебаний скалярных полей при наличии нетривиальных граничных условий, предложен корректный способ проведения перенормировки в этом случае.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на следующих конференциях и школах: III международная конференция по фундаментальным проблемам физики, Казань, КГУ, 2005; Международная уфимская зимняя школа-конференция по математике и физике), Уфа, БГПУ, 2005; Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике (RUSGRAV-12), Казань, 2005; Международная школа-семинар по квантовой теории поля, суперсимметрии, теории полей высших спинов и гравитации, Томск, 2005; Российская школа-семинар по современным проблемам гравитации и космологии (GRACOS-2007), Казань, 2007; Российская школа-семинар по современным проблемам гравитации и космологии (GRACOS-2009), Казань, 2009; Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике (RUSGRAV-13), Москва, 2008, а также на научных семинарах кафедр теории относительности и гравитации КГУ и теоретической физики ТГГПУ (КГПУ).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 10 работ, в том числе 3 статьи в центральной научной печати в журналах из списка

ВАК, 1 статья в сборнике научных работ, 6 тезисов докладов на всероссийских и зарубежных конференциях.

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 113 страницах, включая 12 рисунков и список литературы из 115 наименований.

### Основное содержание диссертации

**Во введении** аргументируется актуальность исследуемой проблемы, обосновывается научная и практическая значимость работы, формулируются цель исследования и положения, выносимые на защиту.

**В первой главе** приведен краткий обзор методов регуляризации энергии нулевых колебаний для произвольных полей. Более подробно рассмотрен подход дзета-регуляризации на примере сферической поверхности. Показан стандартный способ перенормировки энергии в массивных скалярных полях. Представлен обзор и описание таких объектов исследования, как космические струны и кротовые норы.

**Во второй главе** в рамках дзета-регуляризации получено общее выражение для энергии нулевых колебаний массивного скалярного поля на фоне пространства-времени космической струны конечного поперечного сечения для произвольного дефицита угла.

Пространство-время космической струны конечного поперечного сечения в цилиндрических координатах имеет следующую форму для внутренней и внешней областей струны соответственно:

$$ds_{in}^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \frac{\rho_0^2}{\epsilon^2} \sin^2\left(\frac{\epsilon\rho}{\rho_0}\right) d\varphi^2 + dz^2, \quad (1)$$

$$ds_{out}^2 = -dt^2 + dr^2 + \frac{r^2}{\nu^2} d\varphi^2 + dz^2.$$

Такое пространство-время покрывается двумя картами: внутренняя часть координатами  $(t, \rho, \varphi, z)$ , где  $(t, z) \in (-\infty + \infty)$ ,  $\rho \in [0, \rho_0]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  и внешняя координатами  $(t, r, \varphi, z)$ , где  $(t, z) \in (-\infty + \infty)$ ,  $r \in [r_0, +\infty)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . "Внешний" -  $r_0$  и "внутренний" -  $\rho_0$  радиусы

$$E_\lambda^{DN} = \frac{\lambda^3}{32\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \left\{ \ln \left( 1 + \frac{\text{cth}(xp)}{x} \right) - \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{3y^3} \right\} - \frac{\lambda^3}{288\pi^2},$$

где  $y = x + 1$ . Окончательно полная перенормированная энергия в каждом из двух случаев  $D - D$  (соответствует  $TE$  моде) и  $D - N$  (соответствует  $TM - 1$  моде) примет следующий вид:

$$E_{DD} = -\frac{\pi^2}{1440(2L)^3} + E_\lambda^{DD}, \quad (20)$$

$$E_{DN} = -\frac{\pi^2}{1440(2L)^3} + E_\lambda^{DN}. \quad (21)$$

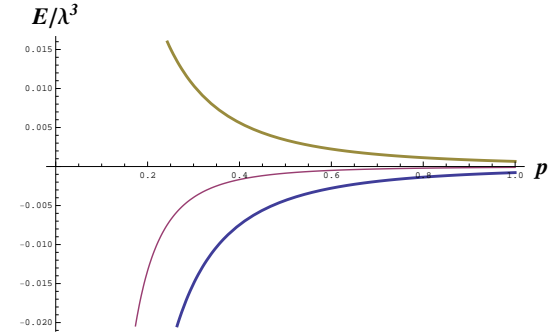


Рис. 4: График зависимости энергии  $E(L)$  от  $p = \lambda L/2$  при фиксированном  $\lambda$ . Обычная энергия Казимира между двумя пластинами, удаленными на расстояние  $L$  друг от друга, представлена тонкой линией. График энергии нулевых колебаний для пластин, удаленных на расстоянии  $L$  (случай  $D - N$ ), представлен светлой линией. Энергия нулевых колебаний для пластин на расстоянии  $L$  (случай  $D - D$ ) представлена темной линией.

Численный анализ энергии нулевых колебаний при фиксированном  $\lambda$  и  $L$  представлен на рисунках 4 и 5. Из рисунка 4 видно, что при бесконечном удалении границ  $L$  энергия нулевых колебаний и стандартная энергия Казимира стремятся к нулю, что и должно выполняться, так как энергия Казимира в пустом пространстве равняется нулю. Из рисунка (5) видно, что для предельных значений

Определяя дзета-функцию от параметра  $\lambda$

$$\begin{aligned}\zeta_\lambda(s, D_1) &= \zeta(s, D_1) - \zeta(s, D_1)|_{\lambda=0} \\ &= \frac{\sin(\pi s)}{\pi} \int_m^\infty dk (k^2 - m^2)^{-s} \partial_k \ln \Psi^\lambda(ik),\end{aligned}\quad (19)$$

где

$$\begin{aligned}\Psi_{TE}^\lambda(ik) &= 1 + \frac{\lambda}{2k} \operatorname{th}(kL), \\ \Psi_{TM-1}^\lambda(ik) &= 1 + \frac{\lambda}{2k} \operatorname{cth}(kL), \\ \Psi_{TM-2}^\lambda(ik) &= \Psi_{TE}^\lambda(ik),\end{aligned}$$

можно рассматривать только две ситуации, представляющие собой два типа граничных условий  $TE$  и  $TM-1$ . Дзета-функция при  $\lambda = 0$  соответствует случаю скалярного поля при наличии двух идеально проводящих пластин без сингулярного источника. Энергия нулевых колебаний в такой модели должна быть равна обычной энергии Казимира для двух идеально проводящих пластин, отстоящих друг от друга на расстоянии  $2L$ .

В случае границ  $L$ , удаленных на бесконечность получены дзета-функция для безмассового и массивного поля. Найдены все коэффициенты теплового ядра и показано, что энергия нулевых колебаний равняется нулю.

В случае границ, удаленных на конечное расстояние  $L$  для безмассового поля, в отсутствие стандартного способа перенормировки (устранение слагаемых, сохраняющихся в пределе больших масс), предложено нормировочное условие, согласно которому полная перенормированная энергия в пределе  $\lambda \rightarrow \infty$  представляет сумму значений стандартных энергий Казимира для двух пластин, удаленных на конечное расстояние  $L$  друг от друга. Это дает возможность получить следующие перенормированные выражения для энергий нулевых колебаний безмассового скалярного поля

$$E_\lambda^{DD} = \frac{\lambda^3}{32\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \left\{ \ln \left( 1 + \frac{\operatorname{th}(xp)}{x} \right) - \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{3y^3} \right\} - \frac{\lambda^3}{288\pi^2},$$

струны и параметры  $\epsilon, \nu$  подчиняются уравнениям

$$\frac{r_0}{\rho_0} = \frac{\tan \epsilon}{\epsilon}, \quad \cos \epsilon = \frac{1}{\nu}. \quad (2)$$

Сечение пространства (1) поверхностью  $t = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$  изображено на рисунке 1.

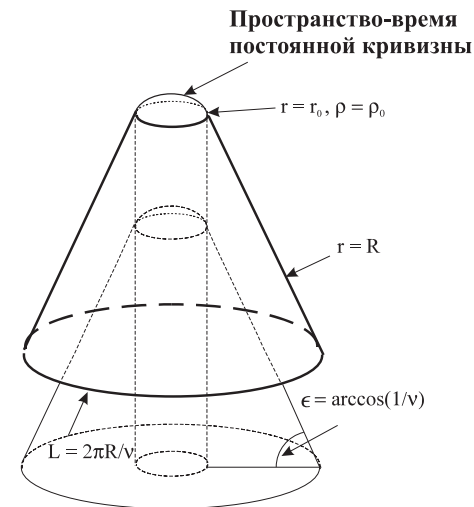


Рис. 1: Сечение  $t = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$  пространства космической струны Готта-Хискока.

В рамках подхода дзета-регуляризации выражение для регуляризованной энергии массивного скалярного поля на фоне пространства-времени рассматриваемой модели будет выглядеть в виде суммы:

$$E(s) = E^{thin}(s) + E^{int}(s), \quad (3)$$

где

$$E^{thin}(s) = -\mu^{2s} \frac{\cos(\pi s)}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \int_m^\infty dk (k^2 - m^2)^{1/2-s} \frac{\partial}{\partial k} \ln k^{-n\nu} I_{n\nu}(kR)$$

является регуляризованной энергией нулевых колебаний поля для пространства-времени бесконечно тонкой струны в случае минимально связанного поля ( $\xi = 0$ ). Здесь  $d_n$  - число вырождения, зависящее от размерности пространства,  $I_{n\nu}$  - функция Бесселя второго рода.

Внутренняя структура дает дополнительный вклад

$$E^{int} = -\mu^{2s} \frac{\cos \pi s}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} d_n \int_m^{\infty} dk [k^2 - m^2]^{1/2-s} \frac{\partial}{\partial k} \ln k^{n(\nu-1)} f_n(ik),$$

где  $f_n(ik)$  является функцией Йоста на мнимой оси

$$f_n(ik) = -\frac{\sin \epsilon}{\sqrt{\cos \epsilon}} \left( \frac{k\rho_0}{\epsilon} \right)^{n+1} \left\{ K'_{n\nu}(kr_0) P_{\alpha}^{-n}[\cos \epsilon] + K_{n\nu}(kr_0) P_{\alpha}^{\prime-n}[\cos \epsilon] \frac{\epsilon \sin \epsilon}{k\rho_0} \right\},$$

а  $K_{n\nu}$  и  $P_{\alpha}^n$  функция Бесселя второго рода и функция Лежандра первого рода соответственно.

В безмассовом случае ( $m = 0$ ) перенормированная энергия нулевых колебаний переписется в следующем виде:

$$E_{final}^{ren} = \frac{\nu \sin^4 \epsilon}{2\pi r_0} E(0, \xi, \epsilon). \quad (4)$$

Зависимость  $E(0, \xi, \epsilon)$  энергии как функции дефицита  $\epsilon$  для  $\xi = 0$  и  $\xi = 1/6$  представлены на рисунке 2.

Численный анализ функции  $E(0, \xi, \epsilon)$  для данных параметров  $\xi$  показывает, что энергия нулевых колебаний отрицательна при любых дефицитах угла  $\epsilon$ . Для малого дефицита угла  $\epsilon \ll 1$  приближенно получаем

$$E^{ren} \approx -\frac{\eta \epsilon^4}{2\pi r_0}, \quad (5)$$

где  $\eta = 0.05$  для  $\xi = 0$  и  $\eta = 0.02$  для  $\xi = 1/6$ .

**Третья глава** посвящена исследованию энергии нулевых колебаний массивного скалярного поля в пространстве-времени кротовой норы, окруженной одной и двумя сферами. Пространство-время

добавляются граничные условия для сингулярного потенциала, которые в случае электромагнитного поля представляют собой условия для  $TE$  и  $TM$  поляризации при наличии бесконечно тонкой металлической сферы. Таким образом в задаче рассматриваются три типа "нестандартных" граничных условий: граничные условия первого рода ( $TE$ -мода)

$$\begin{aligned} \phi(+0) - \phi(-0) &= 0, \\ \phi'(+0) - \phi'(-0) &= \lambda \phi(0), \\ \phi(+L) &= 0, \\ \phi(-L) &= 0; \end{aligned} \quad (16)$$

граничные условия второго рода при наличии границ Дирихле ( $TM1$ -мода)

$$\begin{aligned} \phi'(+0) - \phi'(-0) &= 0, \\ \phi(+0) - \phi(-0) &= -\frac{\lambda}{k^2} \phi'(0), \\ \phi(+L) &= 0, \\ \phi(-L) &= 0; \end{aligned} \quad (17)$$

граничные условия второго рода при наличии границ Неймана ( $TM2$ -мода)

$$\begin{aligned} \phi'(+0) - \phi'(-0) &= 0, \\ \phi(+0) - \phi(-0) &= -\frac{\lambda}{k^2} \phi'(0), \\ \phi'(+L) &= 0, \\ \phi'(-L) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Из граничных условий (17, 18, 19), получим условия на спектр энергии колебаний на мнимой оси для трех случаев

$$\begin{aligned} \Psi_{TE}(ik) &= 4 \operatorname{sh}(kL) \{2k \operatorname{ch}(kL) + \lambda \operatorname{sh}(kL)\}, \\ \Psi_{TM-1}(ik) &= 4 \operatorname{ch}(kL) \{2k \operatorname{sh}(kL) + \lambda \operatorname{ch}(kL)\}, \\ \Psi_{TM-2}(ik) &= k^2 \Psi_{TE}(ik). \end{aligned}$$

значений  $\beta = ma$  и  $\xi$ . Радиусы сферы и горловины кротовой норы совпадают при  $x = 0$ . Для больших радиусов сферы ( $R \rightarrow \infty$ ) энергия нулевых колебаний  $E^{ren}$  принимает постоянное значение, равное энергии Казимира для всего пространства-времени. В пределе  $R \rightarrow 0$  (случай, когда радиус сферы и горловины кротовой норы совпадают) энергия нулевых колебаний  $E^{ren}$  убывает для произвольных  $\beta$  и  $\xi$ . Это означает, что сила Казимира, действующая на сферическую поверхность для достаточно малых радиусов сферы является силой "притяжения" и направлена к горловине кротовой норы. В интервале  $0 < R/a < \infty$  можно различить три разных ситуации в поведении энергии. В первом случае энергия  $E^{ren}$  не имеет экстремумов и монотонно возрастает для произвольных значений  $R/a$ . При этом сила Казимира является силой притяжения для любых радиусов сферы. Во втором случае энергия  $E^{ren}$  сначала возрастает, а затем убывает, принимая определенное значение. При этом график энергии в определенном интервале имеет форму барьера с некоторым максимальным значением  $E_1^{ren}$  при  $R_1/a$ . Сила Казимира в этой ситуации меняется с силы "притяжения" (для  $R < R_1$ ) на силу "отталкивания" (для  $R > R_1$ ). Значение  $R = R_1$  соответствует точке неустойчивого равновесия. В третьем случае энергия  $E_{ren}$  возрастает для  $R/a < R_1/a$ , убывает для  $R_1/a < R/a < R_2/a$  и затем возрастает для  $R/a > R_2/a$ , принимая постоянное значение. Таким образом, график имеет максимум и минимум. В этой ситуации сила Казимира направлена наружу от сферы радиуса  $R_1 < R < R_2$  и внутрь для сферы радиусов  $R < R_1$  и  $R > R_2$ , при этом значение  $R = R_2$  соответствует точке стабильного равновесия, и энергия  $E_{ren}$  имеет локальный минимум.

В четвертой главе рассматривается действительное скалярное поле  $\phi(x)$  в трехмерном евклидовом пространстве при наличии граничных условий Дирихле на двух идеально проводящих пластинах и источника с сингулярным потенциалом в точке  $x = 0$ , расположенного между этими пластинами. К обычным условиям Дирихле

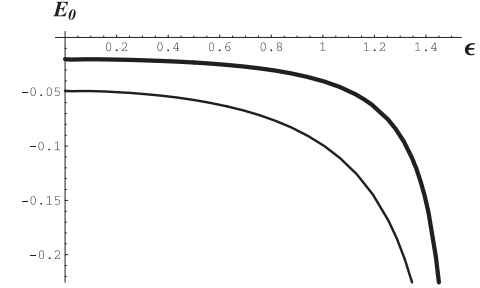


Рис. 2: Зависимость энергии  $E(0, \xi, \epsilon)$  от  $\epsilon$  для  $\xi = 0$  (тонкая линия) и  $\xi = 1/6$  (толстая линия).

кротовой норы с бесконечно короткой горловиной описывается следующей метрикой

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + r^2(\rho) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (6)$$

Форма горловины кротовой норы описывается функцией профиля  $r(\rho) = |\rho| + a$ , где  $a > 0$  - радиус горловины кротовой норы, а  $\rho \in (-\infty, +\infty)$  описывает две идентичные области  $\mathcal{D}_-$  при  $\rho < 0$  и  $\mathcal{D}_+$  при  $\rho > 0$ . Пространство-время всюду плоское за исключением горловины кротовой норы со скалярной кривизной, пропорциональной дельта-функции

$$\mathcal{R} = -8 \frac{\delta(\rho)}{a}. \quad (7)$$

Вводя новые радиальные координаты  $r_{\pm} = \pm\rho + a$ , мы можем переписать метрику (6) в явно плоском виде

$$ds^2 = -dt^2 + dr_{\pm}^2 + r_{\pm}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (8)$$

В подходе дзета-регуляризации энергия нулевых колебаний скалярного поля на фоне пространства-времени кротовой норы с бесконечно короткой горловиной, окруженной одной или двумя идеально

проводящими сферами будет выглядеть следующим образом

$$E(s) = -\mu^{2s} \frac{\cos(\pi s)}{2\pi} \int_m^\infty dk (k^2 - m^2)^{1/2-s} \frac{\partial}{\partial k} [\ln \Psi_{in} + \ln \Psi_{out}^1 + \ln \Psi_{out}^2], \quad (9)$$

где  $\Psi_{in}$  представляет функцию для нахождения спектра энергии колебаний массивного скалярного поля, заключенного в пространстве между двумя сферами,  $\Psi_{out}$  - для спектра энергии колебаний такого же поля, во внешних областях (вне сфер).

Выполнив перегруппировку членов, содержащих функции Бесселя, можно представить выражение (9) в более удобном виде

$$E(s) = \Delta E(s) + E_R^M(s) + E_{R'}^M(s), \quad (10)$$

где

$$E_R^M(s) = -\mu^{2s} \frac{\cos(\pi s)}{2\pi} \int_m^\infty dk (k^2 - m^2)^{1/2-s} \times \frac{\partial}{\partial k} \ln I_\nu[k(a+R)] K_\nu[k(a+R)], \quad (11)$$

$$E_{R'}^M(s) = -\mu^{2s} \frac{\cos(\pi s)}{2\pi} \int_m^\infty dk (k^2 - m^2)^{1/2-s} \times \frac{\partial}{\partial k} \ln I_\nu[k(a+R')] K_\nu[k(a+R')], \quad (12)$$

$$\Delta E(s) = -\mu^{2s} \frac{\cos(\pi s)}{2\pi} \int_m^\infty dk (k^2 - m^2)^{1/2-s} \frac{\partial}{\partial k} \ln \Psi \quad (13)$$

и

$$\Psi = \frac{\Psi_{in}}{I_\nu[k(a+R')] I_\nu[k(a+R)]}. \quad (14)$$

Выражение для  $E_R^M(s)$  в (12), представляет собой энергию Казимира для сферы радиуса  $a+R$  в пространстве-времени Минковского с граничными условиями Дирихле и совпадает с полученным ранее другими авторами. Выражение для  $E_{R'}^M(s)$  в (13) является полной аналогией предыдущего, с той лишь разницей, что сфера радиуса  $a+R'$  располагается в области  $\mathcal{D}_-$ .

Для получения энергии нулевых колебаний массивного скалярного поля в пространстве-времени кротовой норы, окруженной одной

проводящей сферой радиуса  $R$ , положим  $R' \rightarrow \infty$ . В этом случае, выражение  $E_{R'}^M(s)$  равно нулю и не дает никакого вклада в энергию всего пространства, а выражение для  $\Delta E(s)$  будет представлять собой разницу между энергией Казимира для кротовой норы, окруженной сферой, и энергией для сферы того же радиуса в пространстве-времени Минковского. Таким образом, в случае одной сферы, окружающей горловину кротовой норы ( $R' \rightarrow \infty$ ), мы получим

$$\begin{aligned} \Psi &= \left( K_\nu[ka] - I_\nu[ka] \frac{K_\nu[k(a+R)]}{I_\nu[k(a+R)]} \right) \\ &\times \left( \left( \xi - \frac{1}{8} \right) K_\nu[ka] + \frac{ka}{4} K'_\nu[ka] \right) - \\ &- \frac{1}{8} \frac{K_\nu[k(a+R)]}{I_\nu[k(a+R)]}. \end{aligned} \quad (15)$$

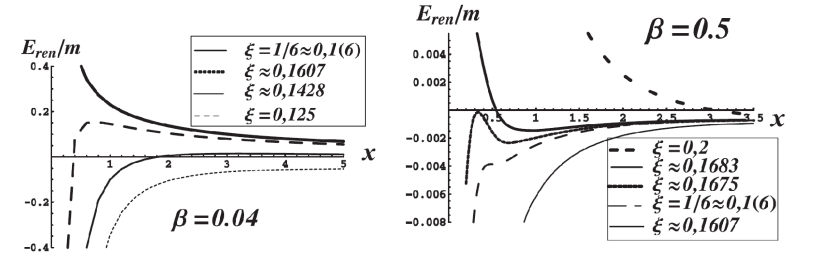


Рис. 3: Зависимость перенормированной энергии нулевых колебаний  $E_{ren}/m$  от  $x = R/a$  для  $\beta = ta = 0.04, 0.5$  и различных значений  $\xi$  и фиксированной  $m$ . С увеличением  $\xi$  появляются максимум и минимум. При дальнейшем увеличении  $\xi$  кривая "переворачивается" и экстремум исчезает. Если радиус сферической поверхности превышает десять радиусов горловины кротовой норы, то энергия для любых  $\xi$  принимает значения, соответствующие энергии во всем пространстве-времени кротовой норы.

На рисунке 3 представлены графики перенормированной энергии нулевых колебаний, в виде функций от  $x = R/a$  для различных