УДК 517.54 *На правах рукописи*

Ахметова Альбина Наилевна

СВОЙСТВА КОНФОРМНОГО РАДИУСА И ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ВНЕШНИХ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Казань – 2009

Работа выполнена на кафедре математического анализа Казанского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Леонид Александрович Аксентьев

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Фарит Габидинович Авхадиев, кандидат физико-математических наук, доцент Василий Петрович Микка

Ведущая организация: Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Защита состоится 17 июня 2009 года в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете по адресу: г. Казань, ул. Профессора М.Т. Нужина, д. 1/37, Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н.Г. Чеботарёва, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 12 мая 2009 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент Е.К. Липачёв

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одно из направлений изучения конформного радиуса определяется его связью с различными характеристиками плоской области (трансфинитным диаметром, площадью области, длиной её границы и др.), широким применением в математической физике и вовлечением всех этих понятий в изопериметрические неравенства[1 2]. Другое направление связано с различными экстремальными и граничными задачами, в частности, с внешней обратной краевой задачей (окз), количество решений которой не превосходит числа критических точек конформного радиуса. Особое место в теории окз занимает вопрос единственности решения внешней задачи. Основные достижения этой теории отражены в обзорах и монографиях[3 4 5 6].

Целью данной работы является изучение свойств поверхности конформного радиуса при построении её над единичным кругом, исследование структуры множества значений градиента конформного радиуса для выпуклых областей, а также разработка нового подхода, основанного на поведении градиента конформного радиуса (градиентного подхода), к решению внешней окз.

Научная новизна работы состоит в следующем.

[1]Полиа, Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике*/ Г. Полиа, Г. Сегё. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1962. – 336 с.

[2]Avkhadiev, F.G. *Schwarz-Pick type inequalities*/ F.G. Avkhadiev, K.-J.Wirths. – Birkhäuser Verlag, 2009. – 156 p.

[3]Тумашев, Г.Г. *Обратные краевые задачи и их приложения*/ Г.Г. Тумашев, М.Т. Нужин. – 2 изд. – Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 334 с.

[4]Гахов, Ф.Д. *Краевые задачи*/ Ф.Д. Гахов. – 3 изд. – М.: Гос. изд-во физ.-матем. лит-ры, 1977. – 640 с.

[5]Аксентьев, Л.А. *Теория обратных краевых задач для аналитических функций и её приложения*/ Л.А. Аксентьев, Н.Б. Ильинский, М.Т. Нужин, Р.Б. Салимов, Г.Г. Тумашев // В кн.: Итоги науки и техники: Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1980. – Т. 18. – С. 69-126.

[6]Авхадиев, Ф.Г. *Достаточные условия конечнолистности аналитических функций и их приложения*/ Ф.Г. Авхадиев, Л.А. Аксентьев, А.М. Елизаров // В кн.: Итоги науки и техники: Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1987. – Т. 25. – С. 3-121.

Выделены классы областей, для которых поверхность конформного радиуса теряет свойство выпуклости при построении над единичным кругом E для конечной области D или над внешностью единичного круга для бесконечной области D^- $(\infty \in D^-)$.

Получены результаты о свойствах градиента $\nabla R(f(E), f(\zeta))$ конформного радиуса $R(f(E), f(\zeta))$ в терминах квазиконформных отображений[7] и выделены геометрические эффекты для $\nabla R(f(rE), f(r\zeta)),\ 0 < r < 1$.

Введено понятие радиуса единственности (или радиуса Ф.Д. Гахова), на базе которого по функциям, определяющим неединственность решения внешней окз, получены классы единственности решения.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы работы могут применяться в геометрической теории функций, а также при дальнейших исследованиях вопросов существования и единственности решения внешних окз.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре по геометрической теории функций в Казанском университете (руководитель – профессор Л.А. Аксентьев), на итоговых научных конференциях Казанского университета (2006-2009), на семинаре отдела математического анализа НИИММ им. Н.Г. Чеботарёва КГУ (руководитель – профессор Ф.Г. Авхадиев), на VI и VII международных Казанских летних школах-конференциях (2005, 2007).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в четырёх работах. В статье [1], написанной совместно с Л.А. Аксентьевым и А.В. Хмельницкой, автору принадлежат теоремы 3-6. В кратком сообщении [2] в соавторстве с Л.А. Аксентьевым формулировки (и идеи доказательств) теорем при-

[7]Альфорс, Л. *Лекции по квазиконформным отображениям*/ Л. Альфорс. – М.: Мир, 1969. – 135 с.

надлежат научному руководителю, доказательства – автору. В диссертацию включены результаты, принадлежащие только автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести параграфов, объединённых в три главы, и списка литературы, содержащего 68 названий. Работа изложена на 105 страницах машинописного текста и содержит 13 рисунков.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дан краткий обзор литературы по исследуемой теме, изложено содержание работы, приведён список результатов, выносимых на защиту.

Г. Хиги[8] получена формула для вычисления конформного радиуса односвязной области D в точке z в виде

$$R(D,z) = |f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2), \tag{1}$$

где $z = f(\zeta)$ – функция, реализующая конформное отображение единичного круга $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ на область $D = f(E)$. При этом выражение (1) интерпретируется как график функции $R(D,z)$, представляющий собой поверхность Ω в $\mathbb{R}^3$ над кругом E или областью D. Назовём эти области *основаниями* поверхности конформного радиуса.

В первой главе речь идет о дифференциальных свойствах конформного радиуса (1).

Д. Минда, С.-А. Ким и Д. Райт[9 10] доказали, что необходимым и достаточным условием выпуклости (вверх) поверхности конформного радиуса над ко-

[8] Haegi, H. R. *Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrössen*/ H. R. Haegi // Compositio Mathematica. – Tom 8. – 1951. – P. 81-111.

[9] Minda, D. *Univalence criteria and the hyperbolic metric in convex regions*/ D. Minda, D.J. Wright // Rocky Mtn. J. Math. – 1982. – V. 12. – P. 471-479.

[10] Kim, S.-A. *The hyperbolic and quasihyperbolic metrics in convex regions*/ S.-A. Kim, D. Minda // J. Anal. – 1993. – V. 1. – P. 109-118.

нечной областью D является выпуклость D. Л.В. Ковалёв[11] установил, что критерием выпуклости (вниз) поверхности конформного радиуса над бесконечной областью D^-, $\infty \in D^-$, является выпуклость граничной кривой ∂D^-.

Выпуклость области D остаётся необходимым условием выпуклости поверхности конформного радиуса при построении над основанием E, но не достаточным.

В § 1.1 исследуется поверхность конформного радиуса (1) для области с выпуклой границей, включающей прямолинейный отрезок. Через Ω^+ будем обозначать поверхность конформного радиуса над конечной областью D, через Ω^- – поверхность над бесконечной областью D^-, $\infty \in D^-$.

Теорема 1. *Поверхность Ω^+ конформного радиуса для выпуклой области D с прямолинейным участком границы $l \subset \partial D$, построенная над основанием E, не является поверхностью, выпуклой вверх.*

Аналогично воздействует прямолинейный участок l границы на строение поверхности Ω^- конформного радиуса для бесконечной области.

Теорема 2. *Поверхность Ω^- конформного радиуса для внешности выпуклой области D с прямолинейным участком границы $l \subset \partial D$, построенная над основанием $E^- = \{\zeta \in \overline{\mathbb{C}} : |\zeta| > 1\}$, не является поверхностью, выпуклой вниз.*

В неравенствах математической физики[12 13 14] участвует величина

$$\nabla R(D, z) = \frac{\partial R(D, z)}{\partial x} + i\frac{\partial R(D, z)}{\partial y} = 2\frac{\partial R}{\partial \bar{z}} = 2R_{\bar{z}}, \tag{2}$$

[11] Kovalev, L.V. *Domains with convex hyperbolic radius*/ L.V. Kovalev // Acta Mathematica Universitatis Comenianae. – 2001. – V. 70. – P.207–213.

[12] Хейман, В.К. *Многолистные функции*/ В.К. Хейман. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. – 180 с.

[13] Голузин, Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного*/ Г.М. Голузин. – 2 изд. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

[14] Авхадиев, Ф.Г. *Неравенства для интегральных характеристик областей*/ Ф.Г. Авхадиев. – Уч. пособие. – Казань: Казан. ун-т, 2006. – 141 с.

$z = x + iy \in D$, которую будем называть *комплексным градиентом* (для краткости градиентом) конформного радиуса. Инициатива в изучении (2) как самостоятельного объекта принадлежит Ф.Г. Авхадиеву и К.-Й. Виртсу[15]. На основании поведения якобиана градиента конформного радиуса ими доказана диффеоморфность градиента и выяснено строение множества его значений в зависимости от вида области.

В § 1.2 изучается поведение градиента (2) конформного радиуса как квазиконформного отображения и строится классификация градиентных отображений для областей с выпуклыми границами на основе исследования неравенства

$$0 \le \left| \frac{(R_{\bar{z}})_{\bar{z}}}{(R_{\bar{z}})_{z}} \right| \le 1. \tag{3}$$

Достижение равенства в (3) «слева» связано с улучшением свойств градиентного отображения.

Теорема 3. *Градиент* (2) *конформного радиуса* (1) *осуществляет конформное отображение области D тогда и только тогда, когда граница D является окружностью в $\mathbb{C}$.*

Другие случаи квазиконформности (в том числе и вырожденные в связи с достижением равенства в (3) «справа») представлены в следующих трёх теоремах.

Пусть $D_\alpha = \{z : |\arg z| < \frac{\alpha\pi}{2}\}$, $0 < \alpha \le 1$, и $D_0 = \{z : |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}\}$. Для выпуклой области D справедлива

Теорема 4. *Градиент* (2) *конформного радиуса* (1) *для любой выпуклой области D, отличной от D_α и D_0, осуществляет квазиконформное отображение. Для угловой области D_α, $0 < \alpha \le 1$, и полосы D_0 по всей области справедливо тождество* $\left|\frac{R_{\bar{z}\bar{z}}(D,z)}{R_{\bar{z}z}(D,z)}\right| \equiv 1$.

[15] Avkhadiev, F.G. *The conformal radius as a function and its gradient image*/ F.G. Avkhadiev, K.-J.Wirths // Israel Journal of Mathematics. – 2005. – V. 145. – P. 349–374.

При переходе ко вложенным областям $f(rE)$, $0 < r < 1$, получим $K(r^2)$-квазиконформные отображения для любой выпуклой области $f(E)$, где $K(r^2) \leq \frac{1+r^2}{1-r^2}$.

Теорема 5. *Градиент (2) конформного радиуса $R(f(E^-), f(\zeta))$ для любой области D^- с конечным выпуклым дополнением осуществляет квазиконформное отображение.*

При переходе ко вложенным областям $f(rE^-)$, $1 < r < \infty$, получим $K(1/r^2)$-квазиконформные отображения для любой области $f(E^-)$, где $K(1/r^2) \leq \frac{r^2+1}{r^2-1}$.

Теорема 6. *Градиент (2) конформного радиуса для любой области D_∞^-, за исключением D_α, $\alpha \in [1, 2]$, с выпуклым дополнением и бесконечно удалённой точкой на границе осуществляет квазиконформное отображение. Для D_α, $\alpha \in [1, 2]$, по всей области справедливо тождество $\left|\frac{R_{\bar{z}\bar{z}}(D,z)}{R_{\bar{z}z}(D,z)}\right| \equiv 1$.*

В совместной статье Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса на примере одной угловой области получена структура множества значений градиента как эпициклоиды. В данной работе справедливость подобных рассуждений для любой угловой точки без ограничения общности подчеркивает

Теорема 7. *Предельным множеством для угловой точки $z = 0$ многоугольной области D под действием градиентной функции (2) при приближении к $z = 0$ по радиальным направлениям будет кривая: при $0 \leq \alpha < 1$ – гипоциклоида, при $1 < \alpha \leq 2$ – эпициклоида. В случае $\alpha = 1$ точке $z = 0$ будет соответствовать единственная точка на $|w| = 2$.*

Вторая глава посвящена исследованию единственной разрешимости внешней окз для некоторых классов функций.

Внешняя окз по параметру s состоит в односвязном случае в отыскании области $D_z \subset \bar{\mathbf{C}}$ с границей L_z и регулярной в D_z функции $w(z)$ по известным граничным значениям

$$w(z)\Big|_{L_z} = u(s) + iv(s),\ 0 \le s \le l, \tag{4}$$

искомой функции, где s – дуговая абсцисса кривой L_z, l – её длина.

В процессе решения задачи сначала восстанавливается функция $\chi(w) = \ln\frac{dz}{dw}$ в области D_w, ограниченной кривой L_w с уравнением (4), а затем определяется функция $z(w)$, обратная к искомой. В постановке М.Т. Нужина при фиксированном значении $w(\infty) = w_0$ для однозначности функции $z(w)$ в D_w необходимо выполнение одного условия разрешимости. В постановке Ф.Д. Гахова, когда значение w_0 не фиксируется, это условие служит для определения полюса w_0 функции $z(w)$ и известно в теории внешних окз как уравнение Ф.Д. Гахова, который впервые его получил и доказал разрешимость[16].

Исследованию числа решений уравнения Ф.Д. Гахова и получению условий единственности решения внешней окз посвящён ряд работ [17] [18] [19] [20] [21] [22]. Ф.Д. Гаховым, В.С. Рогожиным, М.Т. Нужиным, С.Н. Кудряшовым построены примеры неединственности решения уравнения Ф.Д. Гахова.

[16] Гахов, Ф.Д. *Об обратных краевых задачах*/ Ф.Д. Гахов // ДАН СССР. – 1952. – Т. 86. – № 4. – С. 649-652.

[17] Кудряшов, С.Н. *О числе решений внешней обратной краевой задачи*/ С.Н. Кудряшов, Ф.Г. Авхадиев // Тр. семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. ун-т. – 1971. – Вып. 8. – С. 136-143.

[18] Аксентьев, Л.А. *О единственности решения внешней обратной краевой задачи*/ Л.А. Аксентьев, Ю.Е. Хохлов, Е.А. Широкова // Мат. заметки. – 1978. – Т. 24. – С. 319-333.

[19] Насыров, С.Р. *Единственность решения внешней обратной краевой задачи в классе спиралеобразных функций*/ С.Р. Насыров, Ю.Е. Хохлов // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 8. – С. 24-27.

[20] Аксентьев, Л.А. *О поведении конформного радиуса в подклассах однолистных областей*/ Л.А. Аксентьев, В.П. Микка // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 8. – С. 20-28.

[21] Аксентьев, Л. А., *О классах единственности внешней обратной краевой задачи*/ Л.А. Аксентьев, А.В. Казанцев, М.И. Киндер, А.В. Киселёв // Тр. семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. ун-т. – 1990. – Вып. 24. – С. 39-62.

[22] Аксентьев, Л.А. *О теоремах единственности для внешней обратной краевой задачи в подклассах однолистных функций*/ Л.А. Аксентьев, А.В. Казанцев, Н.И. Попов // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 8. – С. 3-13.

Вопрос разрешимости внешней окз возникает и для многосвязных областей. П.Л. Шабалиным[23] получено интегральное представление для решения такой задачи и выведен аналог уравнения Ф.Д. Гахова. Л.А. Аксентьевым[24] установлено, что точка w_0 является решением уравнения Ф.Д. Гахова тогда и только тогда, когда она является стационарной точкой некоторой поверхности в $\mathbb{R}^3$. Используя этот факт, М.И. Киндер[25] доказал, что число решений уравнения Ф.Д. Гахова не меньше порядка связности области. А.В. Киселёв и С.Р. Насыров[26] выяснили структуру множества корней этого уравнения.

В § 2.1 вводится понятие радиуса единственности $R_e \le 1$, который связан с радиусом выпуклости R_k соотношением $R_k \le R_e \le 1$. Имеет место

Теорема 8. *Для функции f из класса $\mathcal{F}$, состоящего из функций, для которых*

$$\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \zeta^n + c\zeta^{n+1} + ..., \quad \left|\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| \le M, \ 1 < M < \infty,$$

радиус единственности

$$R_e[f] = \min\left(1, \ \sqrt[n]{\frac{2}{M\rho_0^{n-2}(1-\rho_0^2)}}\right), \ \textit{где} \ \rho_0 = \sqrt{\frac{n-2}{n}}, \ f \in \mathcal{F},$$

$$R_e[\mathcal{F}] = \min\left(1, \ \sqrt{\frac{2}{M}}\right),$$

радиус выпуклости

$$R_k[f] = \frac{1}{\sqrt[n]{M}}, \ R_k[\mathcal{F}] = \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

---

[23]Шабалин, П.Л. *Исследование общего решения обратной краевой задачи теории аналитических функций: автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук*/ П.Л. Шабалин; Казан. гос. ун-т. – Казань, 1977. – 12с.

[24]Аксентьев, Л.А. *Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области*/ Л.А. Аксентьев // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 2 (261). – С. 3-11.

[25]Киндер, М.И. *Исследование уравнения Ф.Д. Гахова в случае многосвязной области*/ М.И. Киндер // Тр. семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. ун-т. – 1985. – Вып. 22. – С. 104-116.

[26]Киселёв, А.В. *О структуре множества корней уравнения Ф.Д. Гахова для односвязной и многосвязной областей*/ А.В. Киселёв, С.Р. Насыров // Тр. семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. ун-т. – 1990. – Вып. 8. – С. 105-115.

(Для каждой функции f найдётся соответствующее значение R_e, поэтому в случае определённой функции f будем писать $R_e[f]$, для определённого класса $\mathcal{F}$ функций – $R_e[\mathcal{F}]$.)

Далее даются оценки R_k и R_e в классе $\mathcal{F}_\mathcal{N}$ (обозначение автора) функций М.Т. Нужина и для дуг Н.Е. Жуковского.

Теорема 9. *В классе $\mathcal{F}_\mathcal{N}$ функций М.Т. Нужина внешняя обратная краевая задача разрешима единственным образом в круге радиуса*

$$R_e[f] = \min\left(1,\ \frac{1}{\sqrt[n]{a}}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{2n}}\right),\ a > 1,\ f \in \mathcal{F}_\mathcal{N},$$

$$R_e[\mathcal{F}_\mathcal{N}] = \frac{1}{\sqrt{a}},\ a > 1,$$

причём радиус выпуклости для этого класса функций равен

$$R_k[\mathcal{F}_\mathcal{N}] = \frac{1}{\sqrt{2a}},\ a > 1.$$

Теорема 10. *Если одним из решений внешней обратной краевой задачи является дуга Жуковского с отображающей функцией*

$$F(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{\zeta} + ih + \frac{a^2\zeta}{\sqrt{a^2+h^2}+ih\zeta}\right),\ h = ac,\ c > 0,$$

то будет существовать и второе решение. При этом радиус единственности опишется выражением

$$R_e[f] = \sqrt{\frac{27c^4+45c^2+16-2\sqrt{4+3c^2}(4+3c^2)}{27c^2(c^2+1)}} < 1,\ 0 < c < +\infty,$$

где $f'(\zeta) = \zeta^2 F'(\zeta)$. В случае вырождения дуги при $c = 0$ в прямолинейный отрезок решение будет единственным ($R_e[f] = 1$).

В § 2.2 найдены необходимые и достаточные условия однозначности интегрального представления Кристоффеля-Шварца

$$f(\zeta) = c_1\int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-a)^2(1-\bar{a}\zeta)^2}d\zeta + c_2,\ \psi(\zeta) = \prod_{k=1}^{n}(\zeta - e^{i\theta_k})^{\alpha_k-1}, \qquad (5)$$

при $\alpha_k = 1 + \frac{2}{n}$, $k = \overline{1, n}$. Их отражает

Теорема 11. *При* $n = 3$ *интегральное представление* (5) *определяет однозначную функцию с* $a = 0$ *тогда и только тогда, когда* $e^{i\theta_k}$, $k = \overline{1, 3}$, *являются вершинами правильного вписанного в единичную окружность треугольника, при* $n = 4$ *– тогда и только тогда, когда* $e^{i\theta_k}$, $k = \overline{1, 4}$, *являются вершинами вписанного в единичную окружность прямоугольника.*

При $n \geq 5$ *достаточным условием однозначности функции* (5) *с* $a = 0$ *является расположение* $e^{i\theta_k}$ *в вершинах правильного вписанного в окружность* n*-угольника.*

В случае двусвязной полигональной области справедлива

Теорема 12. *Существует однозначное представление аналога интеграла Кристоффеля-Шварца в двусвязном случае*

$$c_1 z(w) + c_2 = \int \frac{\prod_{k=1}^{n} \left[\vartheta_1\left(\frac{\ln w - \ln a_k}{2\pi i}\right)\right]^{\alpha_k - 1}}{\vartheta_1^2\left(\frac{\ln w - \ln a}{2\pi i}\right) \vartheta_1^2\left(\frac{\ln w + \ln \bar{a}}{2\pi i}\right)} \frac{dw}{w^2},$$

где ϑ_1 *– эллиптическая тета-функция. При вырождении одной из граничных компонент в точку оно совпадает с* (5).

Глава 3 посвящена исследованию поверхности конформного и внутреннего радиусов в двусвязном случае.

Понятие конформного радиуса распространяется на многосвязные области двояким образом: с помощью универсальной поверхности наложения и с помощью отображения многосвязной области на круг с концентрическими разрезами[27]. Будем отождествлять конформный радиус универсальной поверхности наложения многосвязной области и конформный радиус самой многосвязной области.

[27] Schiffer, M. *Hadamard's formula and variation of domain functions*/ M. Schiffer // Amer. J. of Math. – 1946. – V. 68. – № 4. – P. 417-448.

В первом параграфе третьей главы изучено строение поверхности конформного радиуса для кольцевой канонической области.

Теорема 13. *Поверхность конформного радиуса над кольцом* $E_{[1,Q]} = \{z: \ 1 < |z| < Q\}$ *состоит из следующих трёх частей:*

а) поверхность над кольцом $1 < |z| < Q^{\alpha}$ *является выпуклой вниз,*

б) поверхность над кольцом $Q^{\beta} < |z| < Q$ *является выпуклой вверх,*

в) поверхность над кольцом $Q^{\alpha} < |z| < Q^{\beta}$ *состоит из седловых точек,* $0 < \alpha < \beta < 1$.

Для кольца $E_{[q,1]}$ формулируется аналогичная теорема 14.

В упомянутой выше статье Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса имеется результат о строении множества значений градиента для двусвязной области, когда одна из двух выпуклых граничных компонент вырождается и область представляет собой проколотую в ∞ внешность выпуклой кривой. Дополнением к этому результату является

Теорема 15. *Градиент конформного радиуса для кольцевой области* $E_{[1,Q]}$ $(E_{[q,1]})$ *осуществляет отображение кольца на вырожденную риманову поверхность, состоящую из двух кругов радиуса 2 с единственной точкой скрепления в нуле и кольцевой складкой вдоль границы одного из них.*

Предельные положения теорем 13 и 14 (при $q \to 0$ и $Q \to \infty$) и соответствующие предельные положения для внутреннего радиуса приводят к выводу о существенном геометрическом различии конформного и внутреннего радиусов в двусвязном случае.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНО В СЛЕДУЮЩИХ РАБОТАХ:

[1] Ахметова, А.Н. *О выпуклости поверхностей, определяемых конформным радиусом плоской области*/ А.Н. Ахметова, Л.А. Аксентьев, А.В. Хмельницкая // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 4. – С. 3-20.

[2] Ахметова, А.Н. *Об отображениях, связанных с градиентом конформного радиуса (кр. сообщ.)*/ А.Н. Ахметова, Л.А. Аксентьев // Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 6. – С. 60-64.

[3] Ахметова, А.Н. *Свойства поверхностей конформного радиуса для интегралов Кристоффеля-Шварца*/ А.Н. Ахметова, Л.А. Аксентьев, А.В. Хмельницкая // Матер. Седьмой международ. Казан. летней научной шк.-конф. – 2005. – С. 10-11.

[4] Ахметова, А.Н. *Об отображениях, связанных с градиентом конформного радиуса*/ А.Н. Ахметова, Л.А. Аксентьев // Матер. Восьмой международ. Казан. летней научной шк.-конф. – 2007. – С. 19-20.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

– Доказано, что поверхность конформного радиуса для области с выпуклой границей, включающей прямолинейный участок, теряет свойство выпуклости при переносе её основания на каноническую область (теоремы 1,2).

– Проведена классификация градиентных отображений (определямых конформным радиусом) областей с выпуклыми границами. Выявлены четыре случая:

i) конформность градиента,

ii) квазиконформность градиента в замкнутой области,

iii) квазиконформность градиента в открытой области с вырождением на границе,

iv) глобальное вырождение градиента (теоремы 3-6).

– По всему классу выпуклых функций на r-линиях уровня этих функций обоснована невырожденность градиента конформного радиуса с коэффициентом квазиконформности $K(r^2) \leq \frac{1+r^2}{1-r^2},\ 0 < r < 1$ (теоремы 4, 5).

– Для r-линий уровня решений внешней обратной краевой задачи введено понятие радиуса Ф.Д. Гахова и даны оценки этого радиуса в классе профилей Н.Е. Жуковского и классе примеров М.Т. Нужина (теоремы 8-10).

В заключение автор выражает глубокую признательность научному руководителю Л.А. Аксентьеву за постановку задач и ценные советы в процессе их решения.