На правах рукописи

Моргун Мария Владимировна

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань — 2009

Работа выполнена на кафедре алгебры Пензенского государственного педагогического университета имени В.Г. Белинского

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, профессор Султанов Адгам Яхиевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Аминова Ася Васильевна, доктор физико-математических наук, профессор Столяров Алексей Васильевич

Ведущая организация: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Защита состоится 23 апреля 2009 года в 14 ч. 30 мин. на заседании Диссертационного совета Д. 212. 081. 10 при Казанском государственном университете имени В.И. Ульянова-Ленина по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан ≪ ≫ марта 2009 года

Ученый секретарь
Диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук, доцент

Липачев Е.К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория движений в пространствах аффинной связности является одним из активно развивающихся разделов современной дифференциальной геометрии. Впервые вопрос о движениях в пространствах аффинной связности был поставлен в 1927 году Л.П. Эйзенгардтом и М.С. Кнебельманом. Они получили систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, определяющую составляющие бесконечно малого движения в пространстве аффинной связности и доказали, что размерность группы движений не превосходит $n^2 + n$, где n – размерность пространства аффинной связности. Ими же установлено, что пространства, допускающие группу движений размерности n^2+n, являются локально плоскими. К одним из первых работ по движениям в пространствах аффинной связности относятся работы Э. Картана [7], П.К. Рашевского [11], П.А. Широкова [16]. Систематические исследования групп движений в пространствах аффинной связности впервые начаты И.П. Егоровым. Внимание И.П. Егорова привлекла опубликованная в 1903 году теорема Фубини: не существует риманова пространства с полной группой движений порядка $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, то есть на единицу меньше наивысшего порядка $\frac{n(n+1)}{2}$, который допускают лишь пространства постоянной кривизны и только они. И.П. Егоров впервые поставил аналогичный вопрос для пространств аффинной связности, а именно: существуют ли пространства аффинной связности, обладающие полными группами движений порядка $r = n^2+n-1$? В 1945 году им установлено, что максимальная размерность групп движений пространств аффинной связности без кручения ненулевой кривизны равна точно n^2. Из этого следовало, что не существует пространств аффинной связности полные группы движений которых имеют размерности r, где $n^2 < r < n^2 + n$ $(n \geq 2)$. Тем самым была выявлена первая лакуна в распределении размерностей полных групп движений пространств аффинной связности. Затем им были установлены и другие лакуны. Вопросами движений в различных пространствах занимались А.З. Петров, Н.С. Липатов, Г.И. Кручкович, А.С. Солодовников, Н.С. Синюков, А.В. Аминова, В.Р. Кайгородов, А.И. Егоров, А.Я. Султанов, А.А. Ловков, Н.Д. Никитин, В.И. Паньженский, Л.С. Горшкова, А.Т. Кондратьев и другие геометры. Из зарубежных геометров, занимавшихся вопросами движений, отметим К. Яно, У. Муто, Г. Врэнчану, Ш. Кобаяси, К. Номидзу, Ямагути, Мацумото, И. Левина, В. Думитраша. Обзор результатов этих геометров приведен в статьях И.П. Егорова [5], [6]. Б.Л. Лаптев исследовал многообразия с объектами аффинной и проективной связностей, зависящими от точки и направления, им получены условия интегрируемости уравнений проективных и аффинных движений в инвариантной форме [8]. В работах А.В. Аминовой [1], [2] исследуются аффинные, проективные, почти проективные движения в пространствах аффинной связности; максимальная размерность интранзитивных групп движений непроективно-евклидовых пространств аффинной связности установлена А.Я. Султановым [12]. Дальнейшее развитие теории связностей, производной Ли получили в работах Б.Н. Шапукова [14], [15], В.В. Шурыгина [17].

В 1963 году в работе [9] А.П. Нордена введено понятие пространства декартовой композиции. В этой же работе А.П. Норден показал, что задание аффинной связности, по отношению к которой композиция является декартовой, равносильно заданию произвольной аффинной связности на любой позиции каждого базисного многообразия. Среди этих связностей можно выделить связности, являющиеся прямым произведением аффинных связностей. Вопрос о движениях в прямых произведениях двух пространств аффинной связности оставался открытым. Исходя из выше изложенного, тема диссертационной работы является актуальной.

Целью диссертационной работы является исследование алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений двух пространств аффинной связности и их размерностей.

Методы исследования. В диссертации применяются результаты и методы локальной дифференциальной геометрии, теории групп Ли преобразований, используется аппарат тензорного анализа и производной Ли.

Научная новизна. Результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми и заключаются в следующем:

1) установлены необходимые и достаточные условия, при которых прямое произведение двух пространств аффинной связности является проективно-евклидовым, симметрическим, рекуррентным пространством аффинной связности,

2) получены оценки верхних границ размерностей алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений неплоских проективно-евклидовых пространств аффинной связности и локально плоского пространства аффинной связности,

3) установлены оценки верхних границ размерностей алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений двух неплоских проективно-евклидовых пространств аффинной связности,

4) найдены оценки верхних границ размерностей алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений проективно-евклидовых и непроективно-евклидовых пространств аффинной связности,

5) получены оценки размерностей алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений двух непроективно-евклидовых пространств аффинной связности. Доказана точность полученных оценок.

Теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы при исследованииях прямого произведения пространств аффинной связности, а также при чтении спецкурсов и факультативных курсов для студентов математических специальностей.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на всероссийских молодежных научных школах-конференциях "Лобачевские чтения"(Казань, КГУ, 2005, 2006, 2007), на международной летней школе-семинаре по современным проблемам теоретической и математической физики "Петровские чтения"(Казань, КГУ, 2007), на международном геометрическом семинаре им. Г.Ф. Лаптева (Пенза, ПГПУ, 2007), на геометрическом семинаре кафедр геометрии и алгебры ПГПУ (Пенза, 2005-2008 гг.), на внутривузовских научных конференциях профессорско-преподавательского состава ПГПУ (Пенза, 2006, 2007, 2008), на геометрическом семинаре кафедры геометрии КГУ (Казань, 2008), на геометрическом семинаре при МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 2009).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 13 работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на разделы, списка литературы. Объем диссертации составляет 115 страниц.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы основные результаты диссертации, приведено краткое содержание работы.

Глава 1 состоит из 7 разделов. В разделе 1.1 описано построение прямого произведения гладких многообразий. В разделе 1.2 дается определение прямого произведения пространств аффинной связности по А. П. Нордену. В разделе 1.3 вводятся понятия естественного продолжения векторных полей, линейных дифференциальных форм, тензорных полей с гладких многообразий на их прямое произведение. В разделе 1.4 рассмотрены некоторые свойства прямого произведения аффинных связностей, связанные с естественными продолжениями векторных полей. Приведены формулы для вычисления компонентов тензорных полей кручения и кривизны связности, являющейся прямым произведением двух аффинных связностей. В разделе 1.5 получены необходимые и достаточные условия, при которых прямое произведение двух пространств аффинной связности является проективно-евклидовым пространством аффинной связности. В разделах 1.6, 1.7 найдены условия, при которых прямое произведение двух неплоских пространств аффинной связности является симметрическим, рекуррентным.

В главе 2 исследуются инфинитезимальные аффинные преобразования прямых произведений проективно-евклидовых пространств аффинной связности. И. П. Егоровым [4] доказано, что не существует проективно-евклидовых пространств аффинной связности с антисимметричным тензорным полем Риччи. Поэтому для проективно-евклидовых пространств аффинной связности возможны лишь два случая: либо пространство это с симметричным тензорным полем Риччи, называемое эквипроективным [10], либо с тензорным полем Риччи, обладающим ненулевыми симметричной $\overset{0}{R} = Ric^{(+)}$ и антисимметричной $S = Ric^{(-)}$ частями. Предполагается, что $\overset{0}{R}$ приведено к каноническому виду в окрестности некоторой точки x_0. Тогда существует координатная окрестность, содержащая точку x_0, такая, что $\overset{0}{R}_{i_1i_1} \neq 0$ для некоторого индекса i_1. Возможны следующие случаи:

(α) $\overset{0}{R}_{i_1i_1} \neq 0$, $\overset{0}{R}_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ и существует составляющая вида $S_{i_1i_2} \neq 0$,

(β) $\overset{0}{R}_{i_1i_1} \neq 0$, $\overset{0}{R}_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, $S_{i_1i_t} = 0$ $(t = 2, 3, \ldots, n)$, но существует составляющая вида $S_{i_2i_3} \neq 0$.

Таким образом, при построении прямого произведения проективно-евклидовых пространств аффинной связности основными являются следующие случаи:

(1) одно пространство является неплоским эквипроективным пространством аффинной связности, а другое пространство — плоское;

(2) одно пространство — проективно-евклидово, тензорное поле Риччи которого не является симметричным и удовлетворяет условиям (α), а другое пространство является плоским;

(3) одно пространство — проективно-евклидово, тензорное поле Риччи ко-

торого не является симметричным и удовлетворяет условиям (β), а другое пространство является плоским;

(4) оба пространства являются неплоскими эквипроективными пространствами аффинной связности;

(5) оба пространства — проективно-евклидовы с несимметричными тензорными полями Риччи;

(6) одно пространство — неплоское эквипроективное, а другое является проективно-евклидовым, тензорное поле Риччи которого не является симметричным.

В результате рассмотрения каждого из случаев, доказано следующее:

Теорема 1. Пусть $({}^1M_{n_1},\ {}^1\nabla)$ — неплоское эквипроективное пространство аффинной связности, $({}^2M_{n_2},\ {}^2\nabla)$ — локально плоское, тогда размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения $({}^1M_{n_1} \times^2 M_{n_2}, {}^1\nabla \times {}^2\nabla)$ не больше, чем $n_1^2+n_2^2+2n_2$, причем указанная граница — точная.

Теорема 2. Пусть $({}^1M_{n_1},\ {}^1\nabla)$ — проективно-евклидово пространство аффинной связности, удовлетворяющее условиям (α). Пространство $({}^2M_{n_2},\ {}^2\nabla)$ является локально плоским. Тогда размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $({}^1M_{n_1} \times^2 M_{n_2},\ {}^1\nabla \times^2 \nabla)$ не превосходит $n_1^2 + n_2^2 + 2n_2 - n_1 + 1$.

Теорема 3. Пусть $({}^1M_{n_1},\ {}^1\nabla)$ — проективно-евклидово пространство аффинной связности, удовлетворяющее условиям (β). Пространство $({}^2M_{n_2},\ {}^2\nabla)$ является локально плоским. Тогда алгебра Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения $({}^1M_{n_1} \times^2 M_{n_2}, {}^1\nabla \times^2 \nabla)$ изоморфна прямой сумме алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространств $({}^aM_{n_a},{}^a\nabla)$ $(a = 1, 2)$.

Из этой теоремы получено

Следствие. Если $({}^1M_{n_1},\ {}^1\nabla)$ — проективно-евклидово пространство аффинной связности, тензорное поле Риччи которого удовлетворяет условиям

(β), $({}^2M_{n_2},\ {}^2\nabla)$ — локально плоское пространство, то размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения этих пространств не превосходит $n_1^2 + n_2^2 - 2n_1 + n_2 + 3$.

Теорема 4. Алгебра Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения $({}^1M_{n_1} \times^2 M_{n_2},\ {}^1\nabla \times^2 \nabla)$ неплоских проективно-евклидовых пространств аффинной связности изоморфна прямой сумме алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований этих пространств.

Следствиями теоремы 4 являются следующие предложения:

Предложение 1. Максимальная размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения неплоских эквипроективных пространств аффинной связности равна точно $n_1^2 + n_2^2$.

Предложение 2. Максимальная размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения проективно-евклидовых пространств аффинной связности с несимметричными тензорными полями Риччи равна точно $n_1^2 - n_1 + n_2^2 - n_2 + 2$.

Предложение 3. Максимальная размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения неплоского эквипроективного пространства аффинной связности и проективно-евклидово пространства аффинной связности, тензорное поле Риччи которого не является симметричным, равна точно $n_1^2 + n_2^2 - n_2 + 1$, где n_1 — размерность эквипроективного пространства аффинной связности, n_2 — размерность проективно-евклидово пространства с несимметричным тензорным полем Риччи.

В главе 3 рассматриваются инфинитезимальные аффинные преобразования прямого произведения пространств аффинной связности, в случае когда хотя бы одно из них непроективно-евклидово. В частности, в разделах 3.1, 3.2 исследуются прямые произведения проективно-евклидового и непроективно-евклидового пространств аффинной связности, в разделе 3.3 — прямые произведения непроективно-евклидовых пространств аффинной связности.

Пространство $(M_n,\ \nabla)$ $(n \geq 3)$ является непроективно-евклидовым, если тензорное поле Вейля W отлично от нулевого. В локальных координатах условие $W \neq 0$ равносильно условию $R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma} \neq 0$ для некоторых индексов $\sigma \neq \alpha, \beta, \gamma$ [13]. Это условие эквивалентно выполнению одному из следующих:

(а) существует карта гладкого атласа $(U,\ x^{\alpha})$ такая, что существует хотя бы одна составляющая тензорного поля кривизны вида $R^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_3}$ отличная от нуля для некоторых попарно различных между собою индексов;

(б) в каждой карте $(V,\ y^{\alpha})$ все составляющие тензорного поля кривизны вида $R^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_3}$ равны нулю, но существует карта $(U,\ x^{\alpha})$ такая, что существует хотя бы одна составляющая тензорного поля кривизны вида $R^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ отличная от нуля для некоторых попарно различных между собою индексов.

Из этого следует, что при рассмотрении прямых произведений неплоского проективно-евклидового и непроективно-евклидового пространств аффинной связности существенными являются следующие случаи:

(1) один сомножитель является неплоским эквипроективным пространством аффинной связности, другой сомножитель является непроективно-евклидовым пространством аффинной связности, удовлетворяющим условию (а);

(2) один сомножитель является неплоским эквипроективным пространством аффинной связности, другой сомножитель является непроективно-евклидовым пространством аффинной связности, удовлетворяющим условию (б);

(3) один сомножитель является проективно-евклидовым пространством аффинной связности, удовлетворяющим условиям (α), другой сомножитель является непроективно-евклидовым пространством аффинной связности, удовлетворяющим условию (а);

(4) один сомножитель является проективно-евклидовым пространством аффинной связности, удовлетворяющим условиям (α), другой сомножитель является непроективно-евклидовым пространством аффинной связности, удовлетворяющим условию (б);

(5) один сомножитель является проективно-евклидовым пространством аффинной связности, удовлетворяющим условиям (β), другой сомножитель

является непроективно-евклидовым пространством аффинной связности, удовлетворяющим условию (а);

(6) один сомножитель является проективно-евклидовым пространством аффинной связности, удовлетворяющим условиям (β), другой сомножитель является непроективно-евклидовым пространством аффинной связности, удовлетворяющим условию (б).

Если оба сомножителя прямого произведения непроективно-евклидовы пространства аффинной связности, то возникают следующие случаи:

(1) оба сомножителя являются непроективно-евклидовыми пространствами аффинной связности, удовлетворяющими условию (а);

(2) оба сомножителя являются непроективно-евклидовыми пространствами аффинной связности, удовлетворяющими условию (б);

(3) один сомножитель удовлетворяет условию (б), другой сомножитель — условию (а).

При рассмотрении каждого из случаев, доказаны следующие теоремы, в которых n_1 — размерность первого сомножителя, n_2 — размерность второго сомножителя.

Теорема 1. Размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения неплоского эквипроективного пространства аффинной связности и непроективно-евклидового пространства аффинной связности, удовлетворяющего условию (а), не превосходит $n_1^2+n_2^2-n_2+3$, причем указанная граница точная.

Теорема 2. Размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения неплоского эквипроективного пространства аффинной связности и непроективно-евклидового пространства аффинной связности, удовлетворяющего условию (б), не превосходит $n_1^2+n_2^2-2n_2+5$, причем указанная граница точная.

Теорема 3. Размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения проективно-евклидового пространства аффинной связности, удовлетворяющего условиям (α), с непроективно-евклидовым пространством аффинной связности, удовлетворяющим условию (а), не превосходит $n_1^2+n_2^2-n_1-n_2+6$.

Теорема 4. Размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения проективно-евклидового пространства аффинной связности, удовлетворяющего условиям (α), с непроективно-евклидовым пространством аффинной связности, удовлетворяющим условию (б), не превосходит $n_1^2+n_2^2-n_1-2n_2+9$.

Теорема 5. Размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения проективно-евклидового пространства аффинной связности, удовлетворяющего условиям (β), с непроективно-евклидовым пространством аффинной связности, удовлетворяющим условию (а), не превосходит $n_1^2+n_2^2-2n_1-2n_2+8$.

Теорема 6. Размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения проективно-евклидового пространства аффинной связности, удовлетворяющего условиям (β), с непроективно-евклидовым пространством аффинной связности, удовлетворяющим условию (б), не превосходит $n_1^2+n_2^2-2n_1-3n_2+11$.

Теорема 7. Если каждое пространство $({}^aM_{n_a},\ {}^a\nabla)$ $(a=1,2)$ удовлетворяет условию (а), то размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения этих пространств не превосходит $n^2-5n+14$, где $n=n_1+n_2$, причем указанная граница является точной.

Теорема 8. Если каждое пространство $({}^aM_{n_a},\ {}^a\nabla)$ $(a=1,2)$ удовлетворяет условию (б), то размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $({}^1M_{n_1}\times^2 M_{n_2},\ {}^1\nabla\times^2\nabla)$ не превосходит $n^2-7n+22$, где $n=n_1+n_2$, причем указанная граница является точной.

Теорема 9. Если пространство $({}^1M_{n_1},\ {}^1\nabla)$ удовлетворяет условию (б), а $({}^2M_{n_2},\ {}^2\nabla)$ — условию (а), то размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $({}^1M_{n_1}\times^2 M_{n_2},\ {}^1\nabla\times^2\nabla)$ не превосходит $n^2 - 6n + 18$, где $n = n_1 + n_2$, причем указанная граница — точная.

В главе 4 рассматриваются инфинитезимальные аффинные преобразования вещественных реализаций $\nabla^{\mathbb{R}}$ голоморфной линейной связности ∇ на $M_n^{\mathbb{A}}$, где $\mathbb{A}$ — алгебра двойных чисел. Так как вещественная реализация многообразия $M_n^{\mathbb{A}}$ есть многообразие $M_{2n}^{\mathbb{R}}$, причем $M_{2n}^{\mathbb{R}} ={}^1M_n \times{}^2 M_n$ и $\nabla^{\mathbb{R}} ={}^1 \nabla \times{}^2 \nabla$ [3], то результаты полученные в предыдущих главах применены к пространству $(M_{2n}^{\mathbb{R}},\ \nabla^{\mathbb{R}})$ с учетом того, что многообразия ${}^aM$ $(a = 1, 2)$ имеют одну и ту же размерность.

Список литературы

[1] Аминова, А.В. Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности, I / А.В. Аминова // Труды геометрического семинара. ВИНИТИ. — Т. 6. — М., 1974 — С. 317–346.

[2] Аминова, А.В. Группы почти проективных движений пространств аффинной связности / А.В. Аминова // Известия вузов. Математика. — 1979. — № 4. — С. 71–75.

[3] Вишневский, В.В. Пространства над алгебрами / В.В. Вишневский, А.П. Широков, В.В. Шурыгин. — Казань.: Изд-во Казан. ун-та, 1984. — 262 с.

[4] Егоров, И.П. Движения в пространствах аффинной связности.: Дис.... докт. физ.-мат. наук: 01.01.04 / И.П. Егоров. — МГУ, 1955.

[5] Егоров, И.П. Движения в обобщенных дифференциально-геометрических пространствах / И.П. Егоров // Итоги науки / ВИНИТИ: Алгебра, топология, геометрия. 1965. — М., 1967.— С. 375–428.

[6] Егоров, И.П. Автоморфизмы в обобщенных пространствах / И.П. Егоров // Итоги науки и техники / ВИНИТИ. – Т. 10: Проблемы геометрии. – М., 1978. – С. 147–192.

[7] Картан, Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства / Э. Картан. — М.: ИЛ, 1949. — 384 с.

[8] Лаптев, Б.Л. Дифференцирования Ли / Б.Л. Лаптев // Итого науки / ВИНИТИ: Алгебра. Топология. Геометрия. 1965. – М., 1967. – С. 429–465.

[9] Норден, А.П. Пространства декартовой композиции / А.П. Норден // Известия вузов. Математика. – 1963. – № 4(35). – С. 117–128.

[10] Норден, А.П. Пространства аффинной связности / А.П. Норден. – М.: Наука, 1976. – 431 с.

[11] Рашевский, П.К. Симметрические пространства аффинной связности / П.К. Рашевский // Труды семин. по вект. и тенз. анализу. – Вып. 8, 1950. – С. 82–92.

[12] Султанов, А.Я. О максимальной размерности интранзитивных групп

движений пространств аффинной связности / А.Я. Султанов // Движения в обобщенных пространствах: Межвузовский сборник научных трудов. – Пенза, 2000. – С. 79–90.

[13] Схоутен, И.А. Введение в новые методы дифференциальной геометрии / И.А. Схоутен, Д.Дж. Стройк. — М.: Гос. изд. ин. лит., 1948. – Т. 2. — 348 с.

[14] Шапуков, Б.Н. Связности на дифференцируемых расслоениях./ Б.Н. Шапуков // Итоги науки и техники / ВИНИТИ. – Т. 15: Проблемы геометрии. – М., 1983. – С. 61–93.

[15] Шапуков, Б.Н. Производная Ли на расслоенных многообразиях / Б.Н. Шапуков // Итоги науки и техники / ВИНИТИ. – Т. 73: Современная математика и ее приложения. Темат. обзоры. – М., 2002. – С. 103–134.

[16] Широков, П.А. Избранные работы по геометрии / П.А. Широков. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1966. – 442 с.

[17] Шурыгин, В.В. Многообразия над алгебрами и их применение в геометрии расслоений струй / В.В. Шурыгин // Успехи матем. наук. – 1993. – Т. 48. – № 2(290). – С. 75–106.

Публикации автора по теме диссертации

[18] Моргун, М.В. Некоторые свойства прямого произведения линейных связностей / М.В. Моргун // Движения в обобщенных пространствах: Межвуз. сб. научн. тр. — Пенза: ПГПУ, 2005, С. 84–90.

[19] Моргун, М.В. О прямом произведении линейных связностей / М.В. Моргун // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: Изд-во Казанского матем. об-ва, 2005. — Т. 31. — С. 104–106.

[20] Моргун, М.В. Об аффинных векторных полях прямого произведения проективно-евклидовых пространств аффинной связности / М.В. Моргун // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: Изд-во Казанского матем. об-ва, 2006. — Т. 34. — С. 164–165.

[21] Моргун, М.В. О размерностях алгебр Ли инфинитезимальных аффин-

ных преобразований прямого произведения пространств аффинной связности / М.В. Моргун // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. научн. тр. — Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2006. — Вып. 37. — С. 113–119.

[22] Моргун, М.В. О размерностях алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений пространств аффинной связности / М.В. Моргун // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. — Чебоксары, 2006. — С. 112-117.

[23] Моргун, М.В. Об алгебрах Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения проективно-евклидовых и непроективно-евклидовых пространств аффинной связности / М.В. Моргун // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: Изд-во Казанского математического об-ва, КГУ, 2007. — Т. 36. — С. 151–154.

[24] Моргун, М.В. Об алгебрах Ли аффинных векторных полей прямого произведения проективно-евклидового пространства аффинной связности и непроективно-евклидового пространства аффинной связности / М.В. Моргун // Петровские чтения: Материалы XIX Международной летней школы-семинара по современным проблемам теорет. и математ. физики. — Казань, 2007. — С. 34–35.

[25] Моргун, М.В. Об алгебрах Ли аффинных векторных полей прямого произведения проективно-евклидового и плоского пространств аффинной связности / М.В. Моргун // Лаптевские чтения: Сб. тр. Международ. геометр. семин. им. Г.Ф. Лаптева. — Пенза: ПГПУ. — Пенза, 2007. — С. 74–79.

[26] Моргун, М.В. О прямом произведении неплоских проективно-евклидовых пространств аффинной связности / М.В. Моргун // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. научн. тр. — Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2007. — Вып. 38. — С. 103–106.

[27] Моргун, М.В. Об алгебрах Ли аффинных векторных полей вещественных реализаций голоморфных линейных связностей / М.В. Моргун,

А.Я. Султанов // Известия вузов. Математика. — 2008. — № 4. — С. 59–65.

[28] Моргун, М.В. О вещественной реализации голоморфной линейной связности специального вида над алгеброй двойных чисел / М.В. Моргун // Петровские чтения: Материалы XX Международ. летней школы-семин. по современным проблемам теорет. и матем. физики. — Казань, 2008. — С. 43

[29] Моргун, М.В. Оценка размерностей алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения двух пространств аффинной связности с дополнительными условиями. I / М.В. Моргун // Известия Пензен. гос. пед. ун-та. Физ.-матем. и тех. науки. — Пенза, 2008. — № 8(12). — С. 28–32.

[30] Моргун, М.В. Аффинные преобразования вещественных реализаций голоморфных линейных связностей с несимметричным тензорным полем Риччи над алгеброй двойных чисел / М.В. Моргун // Тр. участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Абрау-Дюрсо, 9–15 сентября. — Ростов-на-Дону, 2008. — С. 49–50.