

На правах рукописи

Халитова Талия Фаритовна

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИЛЬНОГО СЖАТИЯ КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЬКА

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2 0 0 9

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте механики и машиностроения Казанского научного центра РАН

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
Аганин Александр Алексеевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор

Даутов Рафаил Замилович,

доктор физико-математических наук
профессор

Сидоров Игорь Николаевич,

Ведущая организация: Учреждение Российской академии наук
Институт механики Уфимского
научного центра РАН (г. Уфа)

Защита состоится «26» февраля 2009 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18, корп. 2, ауд. 218.

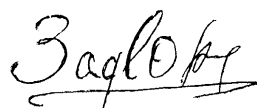
С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета

Автореферат разослан «24» января 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

Д 212.081.21

д.ф.-м.н., профессор



Задворнов О.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Сильное сжатие парогазовых пузырьков сопровождается высокими температурами, давлениями и плотностями содержимого пузырьков, высокими давлениями жидкости в их окрестности. Это представляет значительный интерес для различных приложений. Так, в сонохимии пузырек играет роль химического реактора, в медицине он применяется для разрушения камней в почках. Сильное сжатие пузырьков может вызывать кавитационное разрушение гребных винтов. Наибольший интерес представляет экстремально сильное сжатие, с которым связывают такие феномены, как однопузырьковая сонолюминесценция и нейтронная эмиссия при акустической кавитации. Их теоретические и экспериментальные исследования привели к формированию представления о том, что в финальной высокоскоростной стадии сжатия в пузырьке формируется ударная волна, сходящаяся к его центру. По мере схождения ее интенсивность возрастает так, что кратковременно в центре пузырька образуется сферическое ядро с очень высокими значениями температуры и плотности, что и вызывает свечение в первом случае и нейтронную эмиссию во втором.

Теоретическое представление о таком механизме экстремально сильного сжатия содержимого пузырьков основано на предположении о сферичности процесса сжатия. Однако в реальности пузырек всегда имеет небольшие отклонения от сферической формы. Поэтому разработка математических моделей, методов расчетов и исследование влияния искажений сферичности пузырька на характеристики сильного сжатия являются **актуальными**. До настоящего времени этот вопрос практически не исследовался. Изучалось лишь влияние радиальной (сферической) составляющей движения содержимого пузырька и окружающей жидкости на эволюцию малых возмущений сферичности пузырька, на степень их нарастания. При этом обратное влияние искажений сферичности на радиальную составляющую движения, что представляет наибольший интерес, не учитывалось.

Цель работы. Цель работы состоит в создании численного метода исследования сильного сжатия несферического (осесимметричного) кавитационного пузырька в жидкости. Для этого необходимо решить следующие

задачи:

- выбрать математическую модель;
- разработать экономичный метод расчета;
- провести численное исследование его работоспособности.

Научная новизна работы.

1. Предложено обобщение одномерной модели Нигматулина сильного сжатия кавитационного пузырька на осесимметричный случай.

2. Разработан численный метод расчета задач сильного сжатия осесимметричного кавитационного пузырька.

3. Установлено, что при решении осесимметричных задач сильного сжатия пузырька предлагаемый метод существенно экономичнее классического метода Годунова.

4. Выявлен один из сценариев развития несферичности динамики среды в кавитационном пузырьке при сильном сжатии. Установлено, что в процессе сжатия давление и температура внутри пузырька в несферическом случае могут быть выше, чем в сферическом.

Достоверность обеспечивается корректностью постановки задачи, согласованием результатов расчета разнообразных тестовых и модельных задач с их аналитическими решениями, численными решениями, полученными автором другими методами расчета, и численными решениями других авторов.

Научная и практическая ценность работы. Предложенные в работе математическая модель и численный метод могут быть использованы для проведения детального изучения влияния отклонений формы поверхности пузырьков от сферической на развитие несферичности полей давления, плотности, температуры и скорости в его полости при сильном сжатии. Результаты таких исследований могут быть использованы при планировании экспериментов по экстремально сильному сжатию содержимого пузырьков. Их можно использовать также при оценке реалистичности различных теорий сильного сжатия, основанных на гипотезе о сферической симметрии процесса сжатия.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и научных школах: VI Всероссийский

семинар «Сеточные методы для краевых задач и приложения» (Казань, 2005); V Молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения - 2006» (Казань, 2006); Научная конференция «Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук» (Зеленодольск, 2006); IV Всероссийская научная конференция «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2007); Российская конференция «Механика и химическая физика сплошных сред» (Бирск, 2007); IX Международная конференция «Забабахинские научные чтения» (Снежинск, 2007); VII Всероссийский семинар «Сеточные методы для краевых задач и приложения» (Казань, 2007); VI Молодежная научная школа-конференция «Лобачевские чтения - 2007» (Казань, 2007); VIII Всероссийский семинар по аналитической механике, устойчивости и управлению движением (Казань, 2008); Российский симпозиум «Динамика многофазных сред» (Казань, 2008); Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (Стерлитамак, 2008); Всероссийский VI Школа-семинар молодых ученых и специалистов акад. РАН В.Е.Алемасова «Проблемы теплообмена и гидродинамики в энергомашиностроении» (Казань, 2008); VIII Всероссийский семинар по аналитической механике, устойчивости и управлению движением (Казань, 2008); Итоговые научные конференции Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН за 2006, 2007 г.

Работа выполнена в рамках программы Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН, при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 05-01-00415-а, № 08-01-00215, № 08-01-97029-р_поволжье_а).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 12 статей и 4 тезисов. Из них 2 статьи – в изданиях, входящих в список ВАК.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, содержащих восемнадцать параграфов и заключения, изложенных на 120 страницах, включая 28 рисунков и список использованной литературы из 131 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** отмечена актуальность темы диссертации. Определена цель работы. Отмечена ее научная новизна. Представлено краткое содержание разделов диссертации.

В **первой главе** приведен обзор работ по динамике сферического и несферического пузырька и методам ее численного исследования. В параграфе 1 рассмотрены применяемые в настоящее время модели и методы расчета динамики пузырька. В параграфе 2 приведен обзор литературы по численным методам решения уравнений газовой динамики: явные, неявные и явно-неявные схемы, методы искусственной вязкости, методы аппроксимации интегральных законов сохранения, современные методы повышенного порядка точности.

В параграфе 3 сформулированы краткие выводы по первой главе.

Во **второй главе** описаны математическая модель и метод расчета сильного сжатия газового пузырька в сжимаемой жидкости.

В параграфе 4 описана математическая модель динамики несферического кавитационного пузырька, которая является обобщением одномерной модели Нигматулина на двумерный случай. Модель построена на основе уравнений газовой динамики, описывающих движение как газа в полости пузырька, так и окружающей его жидкости. Нестационарные уравнения газовой динамики в бескоординатной форме имеют вид:

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$(\rho \mathbf{u})_t + (\nabla \cdot \rho \mathbf{u}) \mathbf{u} + (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad (2)$$

$$(\rho E)_t + \nabla \cdot [(\rho E + p) \mathbf{u} - \kappa \nabla T] = 0, \quad (3)$$

с уравнениями состояния вида $p = p(\rho, T)$, $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$. Здесь t — время, ρ — плотность, \mathbf{u} — вектор скорости частицы среды, p — давление, $E = \varepsilon + \mathbf{u}^2/2$ — удельная полная энергия, ε — удельная внутренняя энергия, T — температура, κ — коэффициент теплопроводности. Нижний индекс t обозначает частную производную по времени.

Граничные условия на межфазной поверхности $r = r_s$ имеют вид

$$\rho^+ (\mathbf{D} - \mathbf{u}^+) \cdot \mathbf{n} = \rho^- (\mathbf{D} - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n} = j, \quad p^+ = p^- + 2H\sigma, \quad (4)$$

$$T^+ = T^-, \quad (\kappa \nabla T \cdot \mathbf{n})^+ - (\kappa \nabla T \cdot \mathbf{n})^- = jl, \quad (5)$$

где $\mathbf{D} = \partial \mathbf{r}_s / \partial t = D \cdot \mathbf{n}$ — скорость смещения элемента поверхности пузырька, \mathbf{n} — внешняя единичная нормаль, σ — коэффициент поверхностного натяжения, $2H$ — средняя кривизна поверхности, j — интенсивность фазовых преобразований, l — теплота парообразования. Знак плюс сверху относится к стороне жидкости, а минус — к стороне газа.

Зависимости $\kappa^\pm(T)$, $l(T)$, $\sigma(T)$ являются аппроксимациями экспериментальных данных, j определяется по формуле Герца — Кнудсена — Ленгмюра. На внешней поверхности жидкости $r = r_f$ задаются давление $p = p_f(t)$ и температура $T = T_f(t)$.

Для учета несферичности пузырька, больших градиентов давления и тонких тепловых приграничных слоев в окрестности межфазной границы применяются смешанные эйлерово-лагранжевые (СЭЛ) координаты. Соотношение сферических координат r , θ , ϕ (и связанного с ними времени t) с СЭЛ координатами ξ , η , ζ (и связанного с ними время τ) имеет вид: $r = r(\xi, \eta, \tau)$, $\theta = \theta(\eta)$, $\phi = \zeta$, $t = \tau$.

В параграфе 5 приводится конечно-объемный метод решения уравнений (1)–(3), состоящий в том, что на каждом временном шаге сначала строится расчетная сетка, а затем в два этапа выполняются вычисления, построенные по принципу расщепления по физическим процессам. Дается описание алгоритмов построения сетки и расчетов на первом и втором этапах. На первом этапе игнорируется теплопроводность газа и жидкости. Здесь решаются уравнения (1)–(3) без учета тепловых потоков. Влияние теплопроводности учитывается на втором этапе. Для этого решается уравнение энергии.

На первом этапе используются следующие уравнения газовой динамики:

$$\mathbf{Q}_\tau + \mathbf{F}_\xi + \mathbf{G}_\eta = \mathbf{S}, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{Q} = J\mathbf{q}, \quad \mathbf{F} = J\mathbf{f}, \quad \mathbf{G} = J\mathbf{g}, \quad \mathbf{S} = J\mathbf{s},$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho(U - U_w) \\ \rho u(U - U_w) + p\xi_r \\ \rho v(U - U_w) + pr^{-1}\xi_\theta \\ \rho E(U - U_w) + pU \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho uV \\ \rho vV + pr^{-1}\eta_\theta \\ \rho EV + pV \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -\rho(2u + v \operatorname{ctg} \theta) r^{-1} \\ -\rho(2u^2 + uv \operatorname{ctg} \theta - v^2) r^{-1} \\ -\rho(uv - vr_\tau + 2uv + v^2 \operatorname{ctg} \theta) r^{-1} \\ -(p + \rho E)(2u + v \operatorname{ctg} \theta) r^{-1} \end{pmatrix},$$

с граничными условиями (4) на межфазной поверхности и $p = p_f(\tau)$ на внешней границе жидкости. Здесь $U = u\xi_r + vr^{-1}\xi_\theta$, $V = vr^{-1}\eta_\theta$, $U_w = u_w\xi_r$, $u_w = r_\tau$, u , v — компоненты вектора скорости частицы среды, u_w — радиальная компонента вектора скорости СЭЛ координат, $\xi_r = \theta_\eta/J$, $\xi_\theta = -r_\eta/J$, $\eta_\theta = r_\xi/J$, $J = r_\xi\theta_\eta$ — якобиан преобразования.

Система (6) с указанными граничными условиями решается численно с применением модификации метода Годунова на основе UNO-схемы (UNO — uniformly nonoscillatory, равномерно неосциллирующая). Алгоритм решения состоит из следующих четырех шагов.

Шаг 1. Линейная интерполяция вектора $\hat{\mathbf{q}} = (\hat{\rho}, \hat{\rho}\hat{u}, \hat{\rho}\hat{v}, \hat{\rho}\hat{E})^T$ в ячейке с номером ik на предыдущем временном слое:

$$\hat{\mathbf{q}}^n = \hat{\mathbf{q}}_{ik}^n + (\xi - \xi_i)(\hat{\mathbf{q}}_\xi^n)_{ik} + (\eta - \eta_k)(\hat{\mathbf{q}}_\eta^n)_{ik}, \quad (7)$$

где $\xi_{i-1/2} < \xi < \xi_{i+1/2}$, $\eta_{k-1/2} < \eta < \eta_{k+1/2}$.

Для подавления нефизических осцилляций в окрестности разрывов при определении пространственных производных $\hat{\mathbf{q}}_\xi$ и $\hat{\mathbf{q}}_\eta$ используется UNO-ограничитель вида:

$$(\hat{\mathbf{q}}_\xi^n)_{ik} = \operatorname{minmod} \left[\Delta_{ik}^1 - \frac{1}{2}\Delta_{i+1/2,k}^2, \Delta_{i-1,k}^1 + \frac{1}{2}\Delta_{i-1/2,k}^2 \right] / \Delta\xi, \quad (8)$$

$$\operatorname{minmod}[x, y] = \frac{1}{2}(\operatorname{sign}(x) + \operatorname{sign}(y)) \min(|x|, |y|), \quad \Delta_{ik}^1 = \hat{\mathbf{q}}_{i+1,k}^n - \hat{\mathbf{q}}_{ik}^n,$$

$$\Delta_{i+1/2,k}^2 = \operatorname{fmin} [\hat{\mathbf{q}}_{i+1,k}^n - 2\hat{\mathbf{q}}_{ik}^n + \hat{\mathbf{q}}_{i-1,k}^n, \hat{\mathbf{q}}_{i+2,k}^n - 2\hat{\mathbf{q}}_{i+1,k}^n + \hat{\mathbf{q}}_{ik}^n],$$

$$\operatorname{fmin}[x, y] = \begin{cases} x, & |x| \leq |y|; \\ y, & |x| > |y|. \end{cases}$$

Аналогично определяется производная $\hat{\mathbf{q}}$ по координате η .

Шаг 2. Предиктор: вычисление неизвестных параметров на промежуточном временном слое с применением разложения в ряд Тейлора

$$\hat{\mathbf{q}}_{ik}^{n+1/2} = \hat{\mathbf{q}}_{ik}^n + (\hat{\mathbf{q}}_\tau)_{ik}^n \frac{\Delta\tau^n}{2} \quad (9)$$

и замены временных производных пространственными

$$\mathbf{q}_\tau = \mathbf{b} - A\mathbf{z}_\xi - B\mathbf{z}_\eta,$$

где

$$\mathbf{b} = \mathbf{s} - \frac{1}{J} (J_\tau \mathbf{q} + J_\xi \mathbf{f} + J_\eta \mathbf{g}), \quad \mathbf{z} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, r)^T, \quad A = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}, \quad B = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}.$$

Вычисление матриц A и B размерности 4×5 составляет основную сложность расчета производных по времени. Полученные значения $\hat{\mathbf{q}}_{ik}^{n+1/2}$ применяются для вычисления сеточного аналога вектора свободных членов $\hat{\mathbf{S}}_{ik}^{n+1/2} = \mathbf{s}(\hat{\mathbf{Q}}_{ik}^{n+1/2})$, где $\hat{\mathbf{Q}}_{ik}^{n+1/2} = \hat{J}_{ik}^{n+1/2} \hat{\mathbf{q}}_{ik}^{n+1/2}$.

Шаг 3. Расчет численных потоков \mathbf{F} и \mathbf{G} через границы между ячейками. Сначала по формулам (7) и (9) определяются входные данные для решения задачи о распаде разрыва на гранях между ячейками на момент времени $\tau = \tau^{n+1/2}$:

$$\hat{\mathbf{q}}_{i-1/2R,k}^{n+1/2} = \hat{\mathbf{q}}_{ik}^{n+1/2} - \frac{\Delta\xi}{2} (\hat{\mathbf{q}}_\xi)_{ik}^n, \quad \hat{\mathbf{q}}_{i+1/2L,k}^{n+1/2} = \hat{\mathbf{q}}_{ik}^{n+1/2} + \frac{\Delta\xi}{2} (\hat{\mathbf{q}}_\xi)_{ik}^n.$$

Затем по решениям задач распада разрывов по ξ и η направлениям

$$\hat{\mathbf{q}}_{i+1/2,k}^{n+1/2} = \text{Riemann}(\hat{\mathbf{q}}_{i+1/2L,k}^{n+1/2}, \hat{\mathbf{q}}_{i+1/2R,k}^{n+1/2}),$$

$$\hat{\mathbf{q}}_{i,k+1/2}^{n+1/2} = \text{Riemann}(\hat{\mathbf{q}}_{i,k+1/2L}^{n+1/2}, \hat{\mathbf{q}}_{i,k+1/2R}^{n+1/2}),$$

находятся численные потоки $\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2,k}^{n+1/2}$, $\hat{\mathbf{G}}_{i,k+1/2}^{n+1/2}$. Здесь индексы L и R обозначают отношение параметра к грани ячейки по разные ее стороны (слева и справа по направлению ξ или снизу и сверху – по η). Оператор $\text{Riemann}(\mathbf{x}_L, \mathbf{x}_R)$ обозначает решение задачи Римана.

Шаг 4. Корректор: вычисление сеточных функций на следующем временном слое с использованием явной конечно-объемной схемы:

$$\frac{\hat{\mathbf{Q}}_{ik}^{n+1} - \hat{\mathbf{Q}}_{ik}^n}{\Delta\tau^n} + \frac{\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2,k}^{n+1/2} - \hat{\mathbf{F}}_{i-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta\xi} + \frac{\hat{\mathbf{G}}_{i,k+1/2}^{n+1/2} - \hat{\mathbf{G}}_{i,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta\eta} = \hat{\mathbf{S}}_{ik}^{n+1/2}.$$

Рассчитанные по данной схеме значения полной энергии на втором этапе будут корректироваться с учетом теплопроводности.

Если в (8) положить $\Delta_{i\pm 1/2,k}^2 = 0$, то получится TVD-схема второго порядка точности. Точность TVD-схем снижается не только в окрестности разрывов решения, но и в окрестности локальных экстремумов. При $(\hat{\mathbf{q}}_\xi)_{ik}^n = (\hat{\mathbf{q}}_\eta)_{ik}^n = (\hat{\mathbf{q}}_\tau)_{ik}^n = 0$ получается классическая схема Годунова первого порядка точности. Такая взаимосвязь удобна для контроля правильности программной реализации численного метода.

На втором этапе учитывается влияние теплопроводности. Для этого решение уравнения энергии находится по явной схеме с использованием вспомогательного поля температуры, определяемого по неявной схеме из уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} T_\tau + T_\xi (U - U_w) + T_\eta V + \frac{k_1}{\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\kappa \sqrt{h} (T_\xi s^2 + T_\eta \xi_\theta \eta_\theta r^{-2}) \right] + \\ + \frac{k_1}{\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\kappa \sqrt{h} (T_\xi \xi_\theta + T_\eta \eta_\theta) \eta_\theta r^{-2} \right] = \\ = -\frac{k_2}{\sqrt{h}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (U \sqrt{h}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (V \sqrt{h}) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

где $k_1 = -1/(\rho \varepsilon_T)$, $k_2 = (p - \rho^2 \varepsilon_p) / (\rho \varepsilon_T)$, $s = \sqrt{\xi_r^2 + \xi_\theta^2 r^{-2}}$. Уравнение (10) решается с контактными условиями (5), условием на внешней поверхности жидкости $T = T_f(\tau)$ и условием $T_\xi = 0$ при $r = 0$. При этом используется схема переменных направлений. Ее применение приводит к двум системам алгебраических уравнений, которые решаются методом матричной прогонки.

В параграфе 6 сформулированы краткие выводы по второй главе.

Третья глава посвящена верификации предлагаемого метода расчета и его компьютерного кода. Приводятся решения ряда двумерных задач, имеющих либо известное аналитическое решение, либо эквивалентную приближенную формулировку в виде обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых легко находится численно методом Рунге — Кутты, либо численное решение, полученное другими авторами.

В параграфе 7 выписаны уравнения эволюции радиуса пузырька и его малого отклонения от сферической формы в слое жидкости, полученные в рамках упрощенной формулировки задачи в виде системы обыкновен-

ных дифференциальных уравнений второго порядка с учетом того, что сжимаемость жидкости несущественна. Их аналитическое или численное решение использовалось в качестве эталонного в задачах динамики пузырька в слое жидкости. Параграфы 8-12 содержат результаты тестирования предлагаемого численного метода на следующих двумерных задачах: о свободных колебаниях формы пузырька под действием поверхностного натяжения (параграф 8), о совместных колебаниях формы и объема пузырька под действием поверхностного натяжения (параграф 9), об эволюции поверхности эллипсоидального пузырька в сферической колбе при радиальном движении стенки колбы (параграф 10), об эволюции поверхности эллипсоидального пузырька в слое жидкости под действием поверхностного натяжения на свободной внешней границе (параграф 11), об обтекании сферического тела однородным сверхзвуковым потоком газа (параграф 12).

Показано, что предлагаемый метод позволяет правильно описать эволюцию несферической формы пузырька, совместное сферическое и несферическое движение поверхности пузырька, влияние внешней границы на эволюцию формы пузырька. Выявлено, что предлагаемый метод с удовлетворительной точностью позволяет получить форму несферической ударной волны и значения газодинамических параметров в окрестности ее фронта. Во всех задачах достигнута точность, характерная для UNO-схем. Сравнение численных решений, полученных с применением классической схемы Годунова и ее UNO- и TVD-модификаций второго порядка точности показало, что использование UNO-модификации является более предпочтительным. Схема Годунова обладает большой численной вязкостью за счет первого порядка точности, а TVD-схема теряет второй порядок точности в экстремальных точках.

В параграфе 13 приведены краткие выводы по третьей главе.

В **четвертой главе** показана эффективность и работоспособность предлагаемого численного метода при описании сильного сжатия пузырька.

Параграф 14 содержит постановку и результаты вычислений задачи о сильном чисто сферическом сжатии кавитационного пузырька в дейтерированном ацетоне. В этой задаче в финальной стадии процесса сжатия

в результате быстрого схождения стенки пузырька формируется ударная волна. Со временем ее интенсивность быстро возрастает, а профиль давления в следующей за ней волне сжатия усложняется.

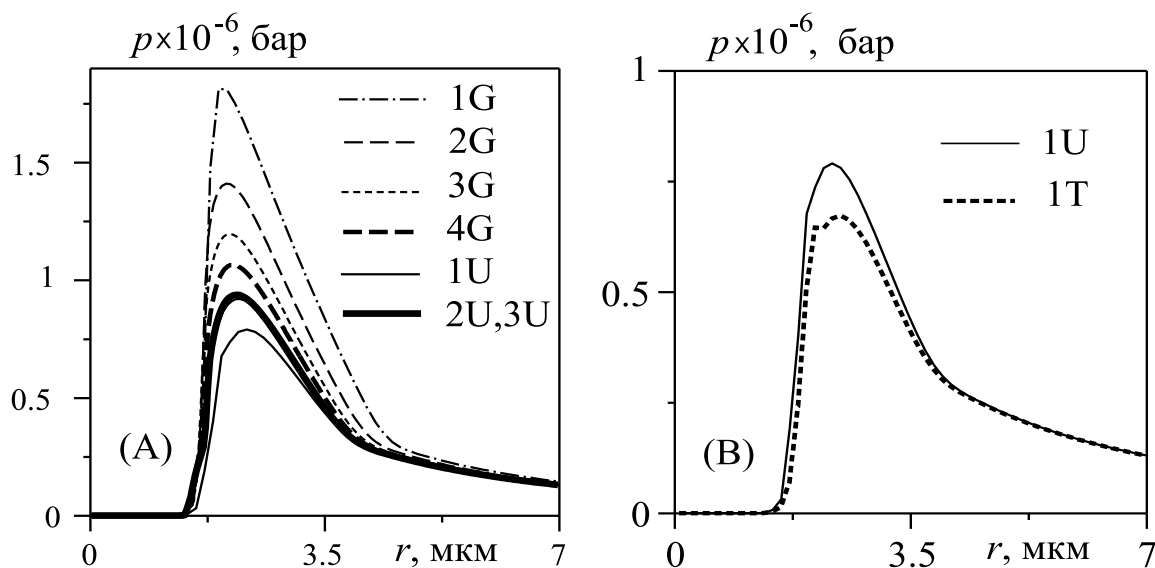


Рис. 1. Радиальные распределения давления газа в полости пузырька в финальной стадии сжатия, полученные с применением классической схемы Годунова, ее UNO (A) и TVD-модификаций (B). Буквы G, U и T означают расчеты методом Годунова, его UNO и TVD-модификациями, соответственно. Цифрами указаны расчетные сетки: 1 - 150+385, 2 - 300+770, 3 - 600+1540, 4 - 1200+3080.

При численном решении учитывалась сжимаемость жидкости, теплопроводность и газа, и жидкости, разрывы газодинамических параметров на фронте ударной волны, применялись реалистичные уравнения состояния. На рис.1А приводятся радиальные распределения давления газа в полости пузырька в финальной стадии сжатия, полученные на ряде последовательно сгущающихся расчетных сеток $N_g + N_l$ (N_g – число ячеек в области газа, а N_l – число ячеек в области жидкости) по методу настоящей работы и с применением классической схемы Годунова, широко используемой при моделировании сферического сжатия пузырька. Для получения удовлетворительной точности по методу настоящей работы требуется сетка 300+770, а для классической схемы Годунова даже сетки 1200+3080 оказывается недостаточно. Таким образом, для достижения “эталонного” решения с применением классического метода Годунова затраты компьютерного времени оказываются более чем в десятки раз большими, чем при

расчетах методом настоящей работы.

При численном решении задач с ударными волнами широко применяются TVD-схемы. На рис. 1В приводится сравнение результатов расчетов, полученных предлагаемым методом и аналогичным методом на основе TVD-модификации схемы Годунова. Видно, что TVD-схема “подрезает” экстремум решения: максимальное значение давления у решения методом TVD меньше, чем у решения методом UNO. UNO-схема в ~ 4 раза экономичнее, чем TVD-схема.

В параграфе 15 рассмотрена задача о схлопывании пустой несферической полости в жидкости. Ее расчеты показали, что до уменьшения радиуса полости в 50 раз UNO-модификация метода Годунова является в тысячи раз экономичнее классического метода Годунова и в 8 раз экономичнее его TVD-модификации.

Параграф 16 содержит исследование задачи об адиабатическом сжатии воздушного пузырька в воде. Сравнение результатов расчетов по модели настоящей работы с результатами расчетов по одной из упрощенных моделей, основанных на расщеплении движения жидкости на сферическую и несферическую составляющие, показало, что упрощенная модель завышает на $\sim 40\%$ максимальное отклонение от сферической формы пузырька.

В параграфе 17 демонстрируется работоспособность предлагаемого метода исследования сильного несферического сжатия пузырька в том случае, когда в его полости возникают значительные неоднородности, и даже ударные волны. Приводится постановка и результаты вычислений двумерной задачи сильного сжатия несферического кавитационного пузырька в дейтерированном ацетоне. На рис. 2 изображено развитие процесса сжатия пузырька в его финальной стадии (моменты времени t_{1-3}). По кривым температуры видно, что интенсивность ударной волны довольно быстро возрастает. При этом в момент t_3 максимальные значения температуры на фронте ударной волны на разных лучах различаются более чем в 2 раза, а максимальные значения давления в волне сжатия за ее фронтом — в ~ 10 раз. Из рис. 2 следует, что в процессе несферического сжатия давление и температура в полости пузырька могут быть выше, чем при чисто сферическом сжатии.

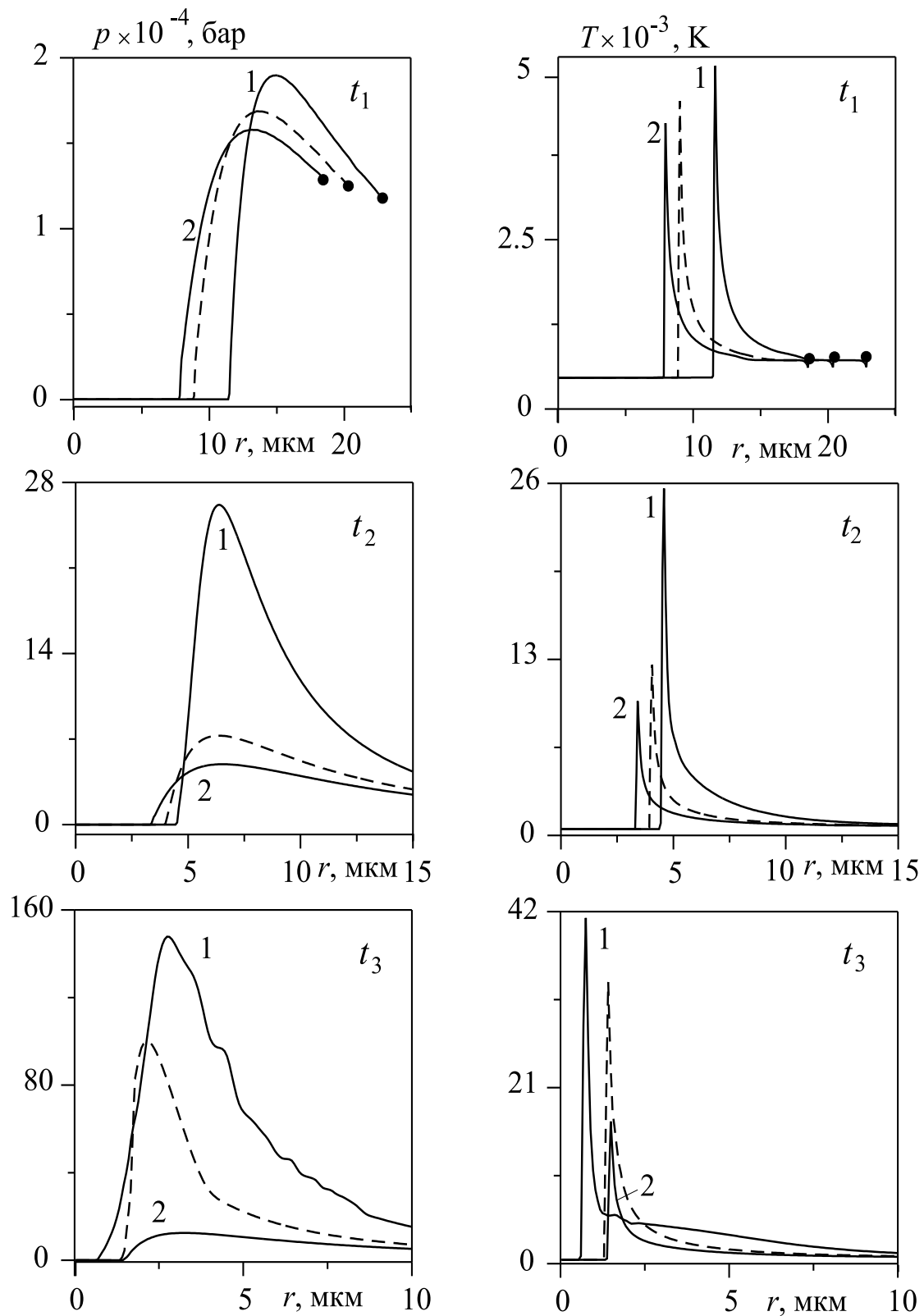


Рис. 2. Радиальные распределения давления и температуры внутри полости пузырька для трех последовательных моментов времени t_{1-3} финальной стадии сжатия в сечениях $\theta = 0$ (кривые 1) и $\theta = \pi/2$ (кривые 2). Эти распределения даны сплошными кривыми. Для сравнения пунктирными кривыми приведены результаты расчетов для сжатия чисто сферического пузырька.

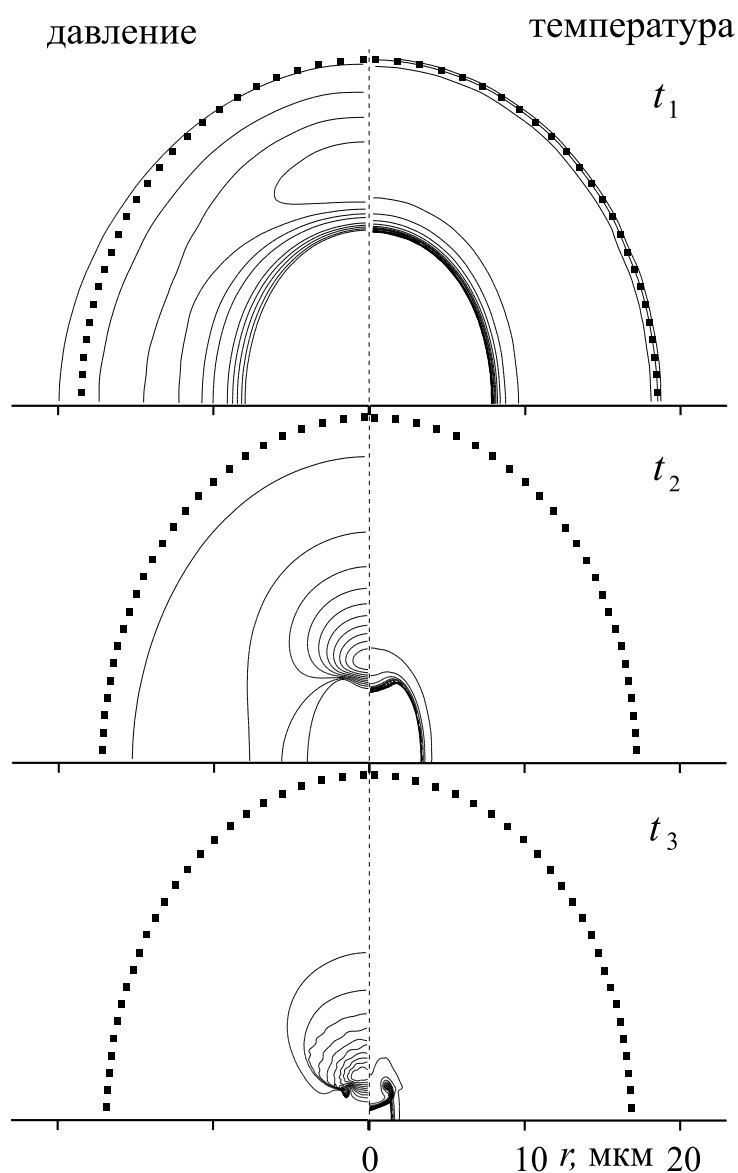


Рис. 3. Изолинии давления и температуры пара в пузырьке и небольшой окрестности окружающей жидкости в три представленных на рис. 2 момента времени t_{1-3} финальной стадии сжатия: слева – изобары; справа – изотермы (поверхность пузырька обозначена символами ■).

В процессе сжатия форма пузырька изменяется от приплюснутой по оси симметрии сферы (в начале сжатия) до вытянутой (в финале сжатия). Для иллюстрации особенностей динамики пара внутри пузырька в финальной стадии сжатия на рис. 3 приводятся изолинии давления и температуры в моменты времени t_{1-3} . На каждом графике изображены 10 линий уровня, которые распределены равномерно между максимальными и минимальными значениями p и T . Видно, что по мере приближения к центру пузырька ударная волна довольно сильно деформируется. Сначала

(момент t_1) ее форма подобна форме поверхности пузырька (вытянутому по оси симметрии эллипсоиду). Затем (момент t_2) у нее сверху (и снизу) появляется вмятина. В ходе дальнейшего сжатия форма ударной волны изменяется, так что к моменту t_3 в ее верхней (и нижней) части осевого сечения при $\theta \approx \pi/4$ ($\theta \approx 3\pi/4$) возникает заострение. Расчеты показывают, что в рамках принятой математической модели предлагаемый метод расчета удовлетворительно описывает динамику жидкости и пара в полости пузырька до тех пор, пока радиус радиально сходящейся ударной волны в пузырьке не станет меньше 8% текущего радиуса пузырька.

В параграфе 18 приведены краткие выводы по четвертой главе.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работе.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Предложена математическая модель сильного сжатия осесимметричного кавитационного пузырька, являющаяся обобщением одномерной модели Нигматулина.

2. Разработан численный метод расчета задач сильного сжатия несферического кавитационного пузырька на основе UNO-модификации метода Годунова второго порядка точности.

3. Установлено, что предлагаемый метод существенно экономичнее классического метода Годунова при решении двумерных (осесимметричных) задач сильного сжатия пузырька.

4. Показано, что предлагаемый метод расчета удовлетворительно описывает сильное сжатие несферического кавитационного пузырька в дейтерированном ацетоне до тех пор, пока радиус ударной волны в пузырьке не станет меньше 8% радиуса пузырька.

5. Выявлен один из возможных сценариев развития несферичности ударной волны в пузырьке в финальной стадии сжатия. Показана трансформация несферических зон экстремально высокого давления и температуры. Установлено, что в процессе сжатия давление и температура внутри пузырька в несферическом случае могут быть выше, чем в сферическом.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Аганин А.А. Эволюция формы осесимметричного пузырька при коллапсе / А.А. Аганин, Т.Ф. Халитова // Материалы Шестого Всероссийского семинара «Сеточные методы для краевых задач и приложения». Казань: Изд-во КГУ, 2005. С. 24–28.

2. Халитова Т.Ф. Численное моделирование динамики осесимметричного газового пузырька в жидкости / Т.Ф. Халитова // Сборник докладов научной конференции «Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук». Казань: Изд-во КГУ, 2006. С. 72–74.

3. Аганин А.А. Моделирование сильного сжатия осесимметричного газового пузырька в жидкости / А.А. Аганин, Т.Ф. Халитова // Материалы Пятой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения - 2006». Казань: Казанское математическое общество, 2006. С. 7–8.

4. Аганин А.А. Моделирование свободных колебаний полости в жидкости / А.А. Аганин, Т.Ф. Халитова // Труды четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи». Самара: СамГТУ, 2007. Т. 5. С. 9–11.

5. Аганин А.А. Расчет эволюции отклонения от сферической формы пустой полости при ее сильном сжатии / А.А. Аганин, Т.Ф. Халитова // Материалы Седьмого Всероссийского семинара «Сеточные методы для краевых задач и приложения». Казань: Изд-во КГУ, 2007. С. 19–22.

6. Аганин А.А. Моделирование эволюции малых искажений сферичности коллапсирующего пузырька / А.А. Аганин, Т.С. Гусева, Т.Ф. Халитова // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. Вып. 5. Уфа: Гилем, 2007. Т. 5. С. 60–65.

7. Аганин А.А. Прямое численное моделирование сильного сжатия осесимметричной газовой полости в жидкости / А.А. Аганин, Т.Ф. Халитова, Н.А. Хисматуллина // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. Вып. 5. Уфа: Гилем, 2007. Т. 5. С. 73–78.

8. Аганин А.А. Устойчивость сферического сжатия газовой полости в жидкости / А.А. Аганин, Т.Ф. Халитова, Н.А. Хисматуллина // Тезисы IX Международной конференции «Забабахинские научные чтения». Снежинск: Изд-во РФЯЦ-ВНИИТФ, 2007. С. 31 – 32.

9. Аганин А.А. Устойчивость сферического сжатия газовой полости в жидкости [Электронный ресурс] / А.А. Аганин, Т.Ф. Халитова, Н.А. Хисматуллина // Труды IX международной конференции «Забабахинские научные чтения». URL: <http://www.vniitf.ru/rig/konfer/9zst/s1/1-16.pdf> (дата обращения 14.11.2008)
10. Халитова Т.Ф. Моделирование сжатия газовой полости в жидкости с учетом теплопроводности, испарения и конденсации / Т.Ф. Халитова, Н.А. Хисматуллина // Материалы Шестой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения - 2007». Казань: Казанского математического общества, 2007. С. 232–234.
11. Халитова Т.Ф. Коллапс газовой полости в жидкости с осесимметричными отклонениями от сферической формы / Т.Ф. Халитова, Н.А. Хисматуллина // Материалы VII Всероссийского семинара по аналитической механике, устойчивости и управлению движением. Казань, 2008. С. 78–79.
12. Халитова Т.Ф. Расчет сильного сжатия осесимметричного парового пузырька в жидкости / Т.Ф. Халитова, Н.А. Хисматуллина // Материалы VIII Всероссийского семинара по аналитической механике, устойчивости и управлению движением. Казань, 2008. С. 78 – 79.
13. Ильгамов М.А. Динамика осесимметричного кавитационного пузырька при коллапсе / М.А. Ильгамов, Т.Ф. Халитова, Н.А. Хисматуллина // Труды международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы». Уфа: Гилем, 2008. Т. 3. С. 109–113.
14. Халитова Т.Ф. Коллапс сферического парового пузырька в жидкости / Т.Ф. Халитова, Н.А. Хисматуллина // Материалы докладов VI Школы-семинара молодых ученых и специалистов акад. РАН В.Е.Алемасова «Проблемы теплообмена и гидродинамики в энергомашиностроении». Казань: Изд-во КГУ, 2008. С. 153 – 156
15. Аганин А.А. Моделирование сильного сжатия газовой полости в жидкости / А.А. Аганин, М.А. Ильгамов, Т.Ф. Халитова, // Математическое моделирование. 2008. Т. 20. № 11. С. 89-103.
16. Аганин А.А. Расчет сильного сжатия сферического парового пузырька в жидкости / А.А. Аганин, Т.Ф. Халитова, Н.А. Хисматуллина // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. № 6. С. 17–27.