

На правах рукописи



Сухова Ольга Владимировна

**РИМАНОВЫ СТРУКТУРЫ ПОЧТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ
НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ
ГЛАДКОГО МНОГООБРАЗИЯ**

01.01.04. — геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань - 2009

Работа выполнена на кафедре геометрии Пензенского государственного педагогического университета им. В.Г. Белинского

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
профессор
Паньженский Владимир Иванович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Евтушик Леонид Евгеньевич

доктор физико-математических наук,
профессор
Степанов Сергей Евгеньевич

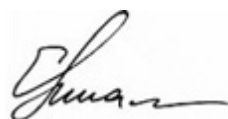
Ведущая организация: Московский педагогический
государственный университет

Защита состоится 5 февраля 2009 года в 14ч. 30мин. на заседании Диссертационного совета Д 212. 081. 10 при Казанском государственном университете им. В.И. Ульянова-Ленина по адресу: 420008, г.Казань, ул. Профессора Нужи́на, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина / г.Казань, ул.Кремлевская,18 /

Автореферат разослан ” 19 ” декабря 2008г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук, доцент



/Липачев Е.К./

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Систематическое исследование структур почти произведения (π - структур), в том числе и римановых структур почти произведения, было начато в середине 50-х годов прошлого столетия. К числу первых работ в этом направлении следует видимо отнести работы Легранда [12] - [14]. В работе [14] Легранд исследовал естественную π -структуру на главном расслоенном многообразии, горизонтальное распределение которой задавалось инфинитезимальной связностью. Большое число работ посвящено построению различных связностей, согласованных с π -структурой [11], [13]. В работах Б.Н. Шапукова [4] - [6] изучались естественные π -структуры и связности на расслоенных пространствах и их автоморфизмы.

Имеется большое число различных классов (римановых) структур почти произведения. В работе [15] Навейра получил 64 класса римановых структур почти произведения аналогично тому, как это было сделано Греем и Хервелла в [9] для почти эрмитовых структур. В работе [3] С.Е. Степанов выделил восемь основных классов структур почти произведения, заданных на гладком многообразии с линейной связностью без кручения. Указанным классам даны геометрические характеристики и получены инвариантные признаки принадлежности тому или иному классу.

Изучение специальных римановых метрик на касательном расслоении TM гладкого многообразия M начинается с известной работы Сасаки [16], в которой вводится и исследуется естественный класс метрик, являющихся эрмитовыми относительно почти комплексной структуры, порожденной связностью Леви-Чивита римановой метрики g базисного многообразия M .

Изучались также римановы метрики на TM , у которых по главной диагонали стоят разные блоки. Такие метрики уже не являются эрмитовыми, а принадлежат классу римановых метрик естественной структуры почти произведения. Примером такой метрики является известная метрика Чигера-Громола, [10], [17]. В указанных работах получены некоторые оценки различных кривизн касательного расслоения в зависимости от кривизны базы.

Автоморфизмы касательных расслоений со специальными римановыми метриками исследованы в работах [1], [7].

Целью диссертационной работы является изучение римановых структур почти произведения, заданных на касательном расслоении гладкого многообразия, в частности, получение инвариантных характеристик классов Навейра и С.Е. Степанова, а также исследование кривизн касательного расслоения риманова многообразия, наделенного специальной римановой метрикой структуры почти произведения.

Методы исследования. Основным методом исследования, применяемым в работе, является аппарат тензорного анализа. Большая часть вычислений проводится в бескоординатной форме с использованием исчисления Кошуля. Исследования носят локальный характер и ведутся в классе достаточно гладких функций.

Научная новизна. Результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми.

Результаты, выносимые на защиту:

1. Исследованы обобщенные лагранжевы пространства с метрикой Тамма

$$\bar{g}_{ij} = \varphi(z)g_{ij} + \psi(z)y_i y_j,$$

где φ и ψ - произвольные функции аргумента $z = \frac{1}{2}g_{ps}y^p y^s$, $y_i = g_{ip}y^p$, $\varphi \neq 0$, $\varphi + 2z\psi \neq 0$, а $g_{ij}(x)$ - компоненты (псевдо) риманова метрического тензора. Выяснено, что метрика Тамма принадлежит классу обобщенных финслеровых метрик тогда и только тогда, когда она является локально конической, [2]. Установлено, что среди метрик Тамма нет финслеровых метрик. Доказано, что экстремали ассоциированного лагранжева пространства с метрикой Тамма совпадают с геодезическими риманова пространства с метрикой g , а усеченная связность Картана метрики Тамма совпадает со связностью Леви-Чивита метрики g .

2. На касательном расслоении риманова многообразия изучен специаль-

ный класс римановых метрик структуры почти произведения

$$\tilde{g} = g_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j + \bar{g}_{ij}(x, y)\delta x^i \otimes \delta x^j,$$

где g_{ij} - компоненты риманова метрического тензора базисного многообразия, \bar{g}_{ij} - компоненты метрики Тамма, причем $\varphi > 0$, $\psi \geq 0$. Данный класс содержит как частный случай метрику Сасаки, метрику Чигера-Громола. Вычислена связность Леви-Чивита метрики \tilde{g} , получены выражения для тензора кривизны, тензора Риччи, секционных кривизн касательного расслоения, наделенного метрикой, принадлежащей рассматриваемому классу. Установлена зависимость скалярной кривизны касательного расслоения от функций φ , ψ и объектов базисного многообразия. В случае, когда базисное многообразие является пространством постоянной секционной кривизны, найдены условия на метрику \tilde{g} и размерность базы, при которых скалярная кривизна касательного расслоения является постоянной величиной. Для некоторых частных случаев римановых метрик \tilde{g} установлена зависимость промежутков знакопостоянства скалярной кривизны касательного расслоения от размерности и кривизны базы.

3. Установлены условия принадлежности классам Навейра римановых структур почти произведения, заданных на касательном расслоении гладкого многообразия с помощью инфинитезимальной связности и метрики

$$\tilde{g} = g_{ij}(x, y)dx^i \otimes dx^j + \bar{g}_{ij}(x, y)\delta x^i \otimes \delta x^j,$$

где $g_{ij} = g_{ji}$, $\bar{g}_{ij} = \bar{g}_{ji}$, $\det\|g_{ij}\| \neq 0$, $\det\|\bar{g}_{ij}\| \neq 0$.

4. Получены инвариантные характеристики классов С.Е. Степанова структур почти произведения в случае, когда в качестве исходного многообразия выступает касательное расслоение, структура почти произведения определена инфинитезимальной связностью, а в качестве линейной связности выбрана связность Леви-Чивита римановой метрики \tilde{g} структуры почти произведения.
5. Получены тензорные признаки классов Грея-Хервеллы почти эрмитовых структур, естественным образом возникающих на касательном

расслоении почти симплектического многообразия.

Теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем изучении структур почти произведения, римановых метрик структуры почти произведения, геометрии касательного расслоения, в аналитической механике.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на геометрическом семинаре физико-математического факультета Пензенского гос. пед. университета (2004-2008гг.), на Четвертой молодежной научной школе конференции (Казань, декабрь 2005г.), на Пятой молодежной научной школе конференции (Казань, декабрь 2006г.), на Международной конференции "Лаптевские чтения" (Пенза, декабрь 2006г.), на Шестой молодежной научной школе конференции (Казань, декабрь 2007г.), на XIX международной летней школе - семинаре "Волга-2007" по проблемам теоретической и математической физики (Казань, июнь 2007г.), на геометрическом семинаре им. Г.Ф. Лаптева при МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, октябрь 2008г.), на геометрическом семинаре КГУ (Казань, октябрь 2008г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав основного текста, включающего в себя 15 параграфов, и списка литературы, содержащего 69 работ. Диссертация изложена на 150 листах машинописного текста.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Введение содержит обзор литературы по теме диссертации, обоснование актуальности темы и краткое содержание работы.

Глава 1 (§1-5) в основном носит реферативный характер.

В §1 вводятся понятия структуры почти произведения, римановой структуры почти произведения, почти эрмитовой структуры. В §2 приводится

классификация С.Е. Степанова структур почти произведения на многообразии с линейной связностью. Даются определения и геометрическая интерпретация для каждого из классов, прослеживаются принципы построения данной классификации. §3 посвящен классификации Навейра римановых многообразий почти произведения. Рассматриваются алгебраические основы построения данной классификации, а также геометрические свойства некоторых классов, [8]. В §4 приводятся основные идеи классификации Грея-Хервеллы почти эрмитовых структур.

В §5 главы 1 исследуется пространство с метрикой Тамма.

Гладкое n -мерное многообразие M называется *пространством Тамма*, если в каждом касательном пространстве $T_x M$ задана (псевдо) риманова метрика, инвариантная относительно всех вращений и зависящая гладким образом от $x \in M$. Компоненты метрического тензора пространства Тамма имеют вид

$$\bar{g}_{ij} = \varphi(z)g_{ij} + \psi(z)y_i y_j, \quad (1)$$

где φ и ψ - произвольные функции аргумента $z = \frac{1}{2}g_{ps}y^p y^s$, такие, что $\varphi \neq 0$, $\varphi + 2z\psi \neq 0$, а $g_{ij}(x)$ - компоненты (псевдо) риманова метрического тензора, $y_i = g_{ip}y^p$. Получены условия, при которых метрика Тамма является метрикой обобщенного финслерова пространства (Лемма 5.1). Установлено, что среди метрик Тамма нет финслеровых метрик (Лемма 5.2), но есть лагранжевы метрики (Лемма 5.4). Доказано, что экстремали ассоциированного лагранжева пространства с метрикой Тамма совпадают с геодезическими риманова пространства с метрикой g (Лемма 5.5); усеченная связность Картана регулярного обобщенного пространства с метрикой Тамма совпадает со связностью Леви-Чивита метрики g (Лемма 5.6).

Глава 2 (§6-9) посвящена классификациям структур почти произведения, римановых структур почти произведения и почти эрмитовых структур, естественным образом возникающих на касательном расслоении гладкого многообразия с заданной инфинитезимальной связностью.

В §6 на касательном расслоении гладкого многообразия вводятся структура почти произведения P и почти комплексная структура J , определяемые заданной инфинитезимальной связностью. Рассматривается риманова

метрика структуры почти произведения. В адаптированных координатах матрица компонент метрического тензора этой структуры имеет вид

$$(\tilde{g}_{IJ}) = \begin{pmatrix} g_{ij}(x, y) & 0 \\ 0 & \bar{g}_{ij}(x, y) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Вычислены коэффициенты связности Леви-Чивита данной метрики. Установлен также вид матрицы произвольной эрмитовой метрики на TM и выделен естественный частный случай

$$(\hat{g}_{IJ}) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{ij}(x) \\ -\omega_{ij}(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

когда базисное многообразие M наделено почти симплектической структурой $\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij}dx^i \wedge dx^j$.

В §7 исследуются инвариантные характеристики классов С.Е. Степанова структур почти произведения, заданных на касательном расслоение гладкого многообразия, распределение горизонтальных площадок которых определяется инфинитезимальной связностью с коэффициентами $N_i^k(x, y)$, а в качестве линейной связности выступает связность Леви-Чивита метрики (2). Инвариантные признаки классов получены в виде условий, накладываемых на компоненты метрического тензора \tilde{g}_{IJ} , тензора

$$\bar{B}_{ij}^k = L_{ij}^k - \bar{\Gamma}_{ij}^k = \dot{\partial}_j N_i^k - \frac{1}{2}\bar{g}^{ks}(\delta_i \bar{g}_{sj} + \delta_j \bar{g}_{is} - \delta_s \bar{g}_{ij}) \quad (4)$$

и подобъект объекта неголономности $R_{ij}^k = \delta_j N_i^k - \delta_i N_j^k$, где $\{\delta_i\}$ - локальный базис горизонтального распределения инфинитезимальной связности. Доказаны следующие утверждения:

Теорема 7.1. *Структура почти произведения на TM является интегрируемой тогда и только тогда, когда $R_{ij}^k = 0$. Если $R_{ij}^k \neq 0$, то структура полуинтегрируема.*

Теорема 7.2. *Для того, чтобы структура почти произведения на TM была плоской необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$g_{ij \cdot m} - \bar{g}_{mp} R_{ij}^p = 0, \quad \bar{g}_{pj} \bar{B}_{mi}^p + \bar{g}_{ip} \bar{B}_{mj}^p = 0. \quad (5)$$

В случае, когда справедливо только одно из данных равенств, структура является полуплоской.

Теорема 7.3. Для того чтобы структура почти произведения на TM была чебышевской необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$g_{ij;m} + \bar{g}_{mp}R_{ij}^p = 0, \quad \bar{g}_{pj}\bar{B}_{mi}^p + \bar{g}_{ip}\bar{B}_{mj}^p = 0. \quad (6)$$

Если выполняется только одно из данных равенств, то структура является получебышевской.

Теорема 7.4. Для того, чтобы структура почти произведения на TM была полугеодезической необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

$$\dot{\partial}_m g_{ij} = 0, \quad R_{ij}^k = 0, \quad (7)$$

$$\bar{g}_{pj}\bar{B}_{mi}^p + \bar{g}_{ip}\bar{B}_{mj}^p = 0. \quad (8)$$

В случае одновременного выполнения условий (7), (8) структура является геодезической и полудеккартовой.

В §8 получены инвариантные характеристики классов Навейра римановых структур почти произведения в случае, когда в качестве исходного многообразия выступает касательное расслоение TM , структура почти произведения определяется инфинитезимальной связностью, а метрика (2) рассматривается как риманова метрика почти произведения.

Доказаны, следующие утверждения (Теоремы 8.1 - 8.14).

Горизонтальное распределение римановой структуры почти произведения (TM, \tilde{g}, P) удовлетворяет

- а) условию F (является интегрируемым), если и только если $R_{ij}^k = 0$;
 б) условию AF (является вполне геодезическим) тогда и только тогда, когда

$$\dot{\partial}_s g_{ij} = 0; \quad (9)$$

- в) условию TGF (задает вполне геодезическое слоение), если и только если

$$R_{ij}^k = 0, \quad \dot{\partial}_k g_{ij} = 0; \quad (10)$$

- г) условию D_1 (является минимальным) тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^n f_i^p f_i^s (\dot{\partial}_m g_{ps} - \bar{g}_{mk}R_{ps}^k) = 0; \quad (11)$$

д) условию F_1 (задает минимальное слоение), если и только если выполняются условия

$$R_{ij}^k = 0, \quad \sum_{i=1}^n f_i^p f_i^s \dot{\partial}_m g_{ps} = 0; \quad (12)$$

е) условию D_2 (является омбилическим), тогда и только тогда, когда

$$\dot{\partial}_m g_{ij} - \frac{1}{n} g_{ij} \sum_{l=1}^n f_l^p f_l^s (\dot{\partial}_m g_{ps} - \bar{g}_{mk} R_{ps}^k) = 0; \quad (13)$$

ж) условию F_2 (задает омбилическое слоение), если и только если имеют место равенства:

$$R_{ij}^k = 0, \quad \dot{\partial}_m g_{ij} - \frac{1}{n} g_{ij} \sum_{l=1}^n f_l^p f_l^s \dot{\partial}_m g_{ps} = 0. \quad (14)$$

Вертикальное распределение рассматриваемой римановой структуры почти произведения (TM, \tilde{g}, P) является интегрируемым, и удовлетворяет

а) условию AF , а следовательно и TGF (задает вполне геодезическое слоение) тогда и только тогда, когда

$$\bar{g}_{pj} \bar{B}_{mi}^p + \bar{g}_{ip} \bar{B}_{mj}^p = 0; \quad (15)$$

б) условию D_1 , а следовательно и F_1 (задает минимальное слоение) тогда и только тогда, когда справедливо равенство:

$$\sum_{i=1}^n f_{n+i}^{n+p} f_{n+i}^{n+s} (\bar{g}_{ls} \bar{B}_{mp}^l + \bar{g}_{pl} \bar{B}_{ms}^l) = 0; \quad (16)$$

в) условию D_2 , а следовательно и F_2 (задает омбилическое слоение), если и только если выполняется условие:

$$\bar{g}_{kj} \bar{B}_{mi}^k + \bar{g}_{ik} \bar{B}_{mj}^k - \frac{1}{n} \bar{g}_{ij} \sum_{l=1}^n f_{n+l}^{n+p} f_{n+l}^{n+s} (\bar{g}_{ks} \bar{B}_{mp}^k + \bar{g}_{pk} \bar{B}_{ms}^k) = 0. \quad (17)$$

Здесь f_i^p, f_{n+i}^{n+p} - функции на TM , $\det \|f_i^p\| \neq 0$, $\det \|f_{n+i}^{n+p}\| \neq 0$, являющиеся коэффициентами разложения ортонормированного базиса $\{E_i, E_{n+i}\}$, $E_i \in H$, $E_{n+i} \in V$, по векторным полям естественного адаптированного базиса на TM : $E_i = f_i^p \delta_p$, $E_{n+i} = f_{n+i}^{n+p} \dot{\partial}_p$. Имеет место

Теорема 8.15. *Если на TM задана риманова метрика $\tilde{g} = g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j + \bar{g}_{ij} \delta y^i \otimes \delta y^j$, где $\bar{g}_{ij} = \varphi(z) g_{ij} + \psi(z) y_i y_j$ - компоненты метрики*

Гамма, и инфинитезимальная связность порождается усеченной связностью Картана метрики Гамма, то риманова структура почти произведения (TM, \tilde{g}, P) принадлежит классу Навейра (AF, TGF) .

В §9 получены признаки классов Грея-Хервеллы почти эрмитовой структуры, заданной на касательном расслоении гладкого многообразия с эрмитовой метрикой (3), в случае, когда инфинитезимальная связность порождается связностью ∇ , согласованной с почти симплектической структурой ω . Доказаны следующие утверждения:

Теорема 9.1. *Почти эрмитова структура (TM, \hat{g}, J) является келеровой тогда и только тогда, когда форма ω является симплектической, связность ∇ не имеет кручения и является плоской.*

Теорема 9.3. *Почти эрмитова структура (TM, \hat{g}, J) является почти келеровой тогда и только тогда, когда базисное многообразие (M, ω) является симплектическим пространством с нулевым тензором кривизны.*

Также установлено, что для почти эрмитовых структур (TM, \hat{g}, J) классы приближенно келеровых, локально конформно келеровых, эрмитовых и эрмитовых семи-келеровых структур сводятся к классу келеровых (Теорема 9.2), а класс квази келеровых структур - к классу почти келеровых (Теорема 9.4).

В главе 3 (§10-15) на касательном расслоении риманова многообразия (M, g) рассматривается структура почти произведения, горизонтальное распределение которой определяется связностью Леви-Чивита метрики g . Изучается класс римановых метрик структуры почти произведения, матрицы которых в адаптированных к структуре почти произведения координатах имеют следующий блочно-диагональный вид:

$$\tilde{g}_{IJ} = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & \varphi(z)g_{ij} + \psi(z)y_i y_j \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где φ, ψ - некоторые функции аргумента $z = \frac{1}{2}g_{ps}y^p y^s$, такие что $\varphi > 0$ и $\psi \geq 0$. Для метрик данного класса, содержащего как частные случаи метрику Сасаки, метрику Чигера-Громола, исследуются различные кривизны касательного расслоения (TM, \tilde{g}) .

В §10 для метрик рассматриваемого класса получены выражения, определяющие связность Леви-Чивита. В §11 вычислен тензор кривизны касательного расслоения с метрикой (18). В §12 построен специальный ортонормированный репер касательного расслоения с метрикой (18), состоящий из лифтированных векторов ортонормированного репера базисного многообразия. Получены равенства, определяющие тензор Риччи пространства (TM, \tilde{g}) .

В §13 найдены секционные кривизны риманова многообразия (TM, \tilde{g}) . Доказано (Теорема 13.1), что в случае, когда базисное многообразие является пространством постоянной секционной кривизны k , для секционных кривизн касательного расслоения с метрикой \tilde{g} справедливы следующие утверждения: $\tilde{K}(X^h, Y^h)$ неотрицательны при $0 \leq k \leq \frac{2}{3z\varphi}$; $\tilde{K}(X^h, Y^v)$ неотрицательны; $\tilde{K}(X^v, Y^v)$ знакопеременны.

Вычислены секционные кривизны пространства (TM, \tilde{g}) вдоль двумерных направлений, определяемых векторами построенного ортонормированного репера. Справедлива

Теорема 13.2. *Среди пространств (TM, \tilde{g}) нет пространств постоянной ненулевой секционной кривизны.*

В §14 найдена скалярная кривизна пространства (TM, \tilde{g}) . В случае, когда базисное многообразие имеет постоянную секционную кривизну k , получена формула, выражающая зависимость скалярной кривизны касательного расслоения с метрикой (18) от кривизны k , размерности n базы и функций φ и ψ . Имеет место

Теорема 14.1. *Если базисное многообразие является пространством постоянной секционной кривизны k , а функции φ и ψ таковы, что $\varphi = \frac{a^2}{z}$, $\psi \geq 0$, где a - отличная от нуля константа, то касательное расслоение с метрикой \tilde{g} имеет постоянную скалярную кривизну.*

В §15, полагая что (M, g) - риманово многообразие постоянной секционной кривизны k , исследованы промежутки знакостоянства скалярной кривизны касательного расслоения (TM, \tilde{g}) для некоторых частных случаев метрики \tilde{g} . Доказаны следующие утверждения:

Теорема 15.1. *Пусть риманово многообразие (M, g) имеет постоянную*

ную секционную кривизну k , $\varphi = \frac{a^2}{z}$, $\psi \geq 0$, ($a = \text{const} \neq 0$). Тогда скалярная кривизна \tilde{S} пространства (TM, \tilde{g}) равна нулю при $k = \frac{n \pm \sqrt{n^2 + 2(n-2)}}{2a^2}$;
 положительна при $k \in (\frac{n - \sqrt{n^2 + 2(n-2)}}{2a^2}, \frac{n + \sqrt{n^2 + 2(n-2)}}{2a^2})$;
 отрицательна при $k \in (-\infty, \frac{n - \sqrt{n^2 + 2(n-2)}}{2a^2}) \cup (\frac{n + \sqrt{n^2 + 2(n-2)}}{2a^2}, +\infty)$.

Теорема 15.2. Пусть (M, g) - риманово многообразие постоянной секционной кривизны k , $\varphi = 1$, $\psi = c$, где $c = \text{const} > 0$. Тогда скалярная кривизна \tilde{S} касательного расслоения (TM, \tilde{g}) отрицательна при $k \in (-\infty, -c]$, положительна при $k = 0$, и знакопеременна в остальных случаях.

Если (M, g) - риманово многообразие постоянной секционной кривизны k , \tilde{g} - метрика Сасаки, то скалярная кривизна \tilde{S} касательного расслоения (TM, \tilde{g}) отрицательна при $k < 0$, равна нулю при $k = 0$ и знакопеременна при $k > 0$.

Список литературы

- [1] Ибрагимова, Р.Х. Движения на касательных расслоениях, сохраняющие ортогональную и касательную структуры / Р.Х. Ибрагимова // Известия ВУЗов. Математика. — 1996. — N8. — С.29-34.
- [2] Паньженский, В.И. Исследование локально-конических многообразий с помощью соприкасающихся римановых метрик / В.И. Паньженский // Геометрия погруженных многообразий. — М.: МГПИ. — 1986. — С.65-70.
- [3] Степанов С.Е. О классификации структур почти произведения на многообразии с линейной связностью / С.Е. Степанов // Известия ВУЗов. Математика. — 1999. — N1. — С.61-68.
- [4] Шапуков, Б.Н. Линейные связности векторного расслоения / Б.Н. Шапуков // Труды геометрического семинара. Межвуз. темат. сб. науч. тр. — вып.8. — Казань, 1975. — С.118-131.
- [5] Шапуков, Б.Н. О структуре почти произведения на векторном расслоении / Б.Н. Шапуков // Труды геометрического семинара. Межвуз. те-

мат. сб. науч. тр. — вып.11 — Казань, 1979. — С.100-110.

[6] Шапуков, Б.Н. Автоморфизмы расслоенных пространств / Б.Н. Шапуков // Труды геометрического семинара. Межвуз. темат. сб. науч. тр. — вып.8. — Казань, 1982. — С.97-108.

[7] Blănută V., Yawata M. Infinitesimal transformations of the $2-\pi$ structures on tangent bundle / Victor Blănută, Makoto Yawata // Tensor N.S. — 1994 — Vol.55. — P.43-52.

[8] Gil-Medrano, O. Geometric properties of some classes of Riemannian almost-product manifolds / O. Gil-Medrano // Rend. Circ. mat. Palermo. — 1983. — 32, N3. — P.315-329.

[9] Gray A., Hervella Luis M. The sixteen Classes of almost Hermitian manifolds and their lineare invariants / A. Gray, M. Luis Hervella // Ann. mat. pura ed appl. — 1980. — 123. — P.35-58.

[10] Gudmundsson S., Kappos E. On the geometry of the Tangent Bundle with the Cheeger-Gromoll Metric / S. Gudmundsson, E. Kappos // Tokyo J.Math. — 2002. — Vol.25, N1. — P.75-83.

[11] Hsu Chen-Jung. On some properties of π -structures on differentiable manifold / Chen-Jung Hsu // Tohoku Math. J. — 1960. — 12, N3. — P. 429-454.

[12] Legrand G. Sur les varietes a structure de presque-produit complexe / G. Legrand // C. r. Acad. sci. — 1956. — 242, N3. — P.335-337.

[13] Legrand G. Etude d'une generalisation des structures presque complexe sur les varietes differentiables / G. Legrand // Rend. Circolo mat. Palermo. — 1958. — 7, N3. — P.323-354; — 1959. — 8, N1. — P. 5-48.

[14] Legrand G. Une interpretation de la forme de courbure d'une connexion infinitesimale / G. Legrand // C. r. Acad. sci. — 1960. — 250, N21. — P.3441-3442.

[15] Naveira, A.M. A classification of Riemannian almost-product manifolds / A.M. Naveira // Rend. mat. eappl. — 1983. — 3, N3. — P.577-592.

[16] Sasaki Shigeo. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds I / S. Sasaki // Tohoku Math. Jour.— 1958 —10, N3. — P.338-354.

[17] Sekizawa, M. Curvatures of Tangent Bundle with the Cheeger-Gromoll Metric / M. Sekizawa // Tokyo J.Math. — 1991. — Vol.14, N2. — P.407-417.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Паньженский В.И. К геометрии пространств с метрикой Тамма / В.И. Паньженский, О.В. Сухова // Лаптевские чтения: Сборник трудов Международного геометрического семинара им. Г. Ф. Лаптева. - Пенза:ПГПУ, 2004. — С. 95-101.

[2] Сухова О.В. Инвариантные характеристики классов Степанова структур почти произведения на касательном расслоении / О.В. Сухова // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. научн. тр. — Выпуск 36. — Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2005. — с. 141-146.

[3] Сухова О.В. О вполне геодезическом слоении, определяемом инфинитезимальной связностью касательного расслоения обобщенного лагранжева пространства / О.В. Сухова // Движения в обобщенных пространствах: Межвуз. сб. научн. тр. — Пенза: ПГПУ, 2005. — с.136-139.

[4] Сухова О.В. Инвариантные характеристики некоторых классов Навейра римановых структур почти произведения на касательном расслоении гладкого многообразия / О.В. Сухова // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. научн. тр. — Выпуск 37. — Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2006. — с.168-175.

[5] Сухова О.В. О некоторых классах Навейра римановых структур почти произведения на касательном расслоении гладкого многообразия / О.В. Сухова // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. — ГОУ ВПО Чувашский гос. пед. ун-т им. И.Я. Яковлева. — 2006г. — N5(52). — С. 175-179.

[6] Сухова О.В. О кривизнах касательного расслоения риманова многообразия со специальной метрикой структуры почти произведения / О.В. Сухова // Лаптевские чтения: Сборник трудов Международного геометрического семинара им. Г. Ф. Лаптева. — Пенза: ПГПУ, 2007 . - с.114-121.

[7] Паньженский В.И. Почти эрмитовы структуры на касательном расслоении почти симплектического многообразия / В.И. Паньженский, О.В. Сухова // Известия высших учебных заведений. Математика. — Казань: Издательство КГУ им. В.И.Ульянова-Ленина. — 2007г. — N11. — с.75-78.