На правах рукописи

Али Абдул Маджид Шихаб

ГЕОМЕТРИЯ ТЕНЗОРА КОНГАРМОНИЧЕСКОЙ КРИВИЗНЫ ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

01.01.04 – геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2011

Работа выполнена на кафедре геометрии ФГБОУ ВПО «Московский педагогический государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Кириченко Вадим Федорович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Шелехов Александр Михайлович

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры “Высшей и прикладной математики” Смоленский филиала МИИТ, Бонару Михаил Борисович

Ведущая организация: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Защита состоится 22 декабря 2011 года в 14 часов 30 минут в ауд. 337 НИИММ им. Н. Г. Чеботарева на заседании диссертационного совета Д. 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. проф. Нужина, д. 1/37.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, ул. Кремлевская, 18).

Автореферат разослан «__» ноября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук, доцент Липачев Е. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Постановка вопроса и актуальность темы. Понятие *К*-пространства, т.е. почти эрмитова многообразия, фундаментальная форма которого является формой Киллинга, является одним из наиболее интересных обобщений понятия келерова многообразия. Оно сравнительно недавно вошло в сферу геометрических исследований и довольно быстро привлекло внимание ряда ведущих геометров, чем объясняется неустоявшаяся терминология: наряду с термином "*К-пространство*", используемым в работах С.Татибаны, И.Ватанабэ, К.Такамацу, И.Сато и др., используются синонимы: "почти (nearly) келерово многообразие" (А.Грей, Дж.Вольф и др.), а также "почти татибаново пространство" (К.Яно, С.Ямагуши, М.Мацумото и др.). Следует отметить также, что термины "*nearly Kâhler manifold*" и "*almost Kâhler manifold*" несмотря на идентичность русского перевода, обозначают различные геометрические объекты [1].

Интерес к понятию К-пространства пробудился после того, как в 1955 году А.Фрелихер доказал в [2] существование канонической почти эрмитовой структуры на шестимерной сфере S^6, вложенной в алгебру октав **O** в качестве вполне омбилического подмногообразия многообразия $\boldsymbol{R}^8$=**O**, а Т.Фуками и С.Исихара в [3] доказали, что фундаментальная форма этой структуры является формой Киллинга (т.е. ее ковариантный дифференциал является дифференциальной формой), что, очевидно, равносильно приближенной келеровости этой структуры. В 1959 году вышла работа С.Татибаны [4], в которой *К*-пространство выступает уже как самостоятельный геометрический объект. Среди более поздних работ, посвященных исследованию *К*-пространств следует выделить работы А.Грея, в особенности, [5], [6] и [7] написанную совместно с Дж.Вольфом, в которых получено большое число относящихся к этой области результатов и поставлен ряд задач.

Одним из факторов, обуславливающих интерес к *К*-пространствам, является их близость к келеровым многообразиям, богатство геометрических свойств которых хорошо известно. Возникает естественный вопрос, какие из этих свойств допускают экстраполяцию на область *К*-пространств, причем ответ на этот вопрос требует более глубокого понимания природы этих свойств. Один из способов подхода к этому вопросу состоят в нахождении определенных тождеств, которым удовлетворяет оператор кривизны *К*-пространства и которые аналогичны соответствует тождествам, известным для келеровых многообразий. Это позволяет перенести доказательства ряда свойств келеровых многообразий на случай *К*-пространств с некоторыми изменениями. Такой способ со всеми его достоинствами и недостатками был широко использован А.Греем в [5] и рядом других авторов.

Другой тип стоящих в этой области задач состоит в исследовании свойств априорно определенных видов К-пространств (например, конформно-плоских *К*-пространств, *К*-пространств постоянной голоморфной секционной кривизны и т.п.) и, как завершающая фаза такого исследования, классификации *К*-пространств этих видов. Задачи такого типа рассматриваются, например, в [5], [6], [8], и др.

В настоящее время исследования приближенно келеровых многообразий связаны с именами А.Грея [5], [9], В.Ф.Кириченко [10], [11], [12], Ватанабе и Такамацу [13], [14], Ванхекке [15], и многих других.

Конформная геометрия является одним из наиболее важных разделов дифференциальной геометрии, берущим начало от работ Л.Эйлера и интенсивно изучаемым и в настоящее время с самых различных точек зрения. В настоящее время этот раздел геометрии находит важные приложения в теории калибровочных полей в связи с известными результатом Пенроуза–Атьи–Хитчина–Сингера, утверждающим, что твисторное пространство над 4-мерным римановым многообразием M несет каноническую комплексную структуру тогда и только тогда, когда М конформно полуплоско [16]. Рядом авторов была получена классификация 4-мерных конформно-полуплоских римановых многообразий при дополнительных предположениях их келеровости и некоторых других. С другой стороны, геометрия келеровых многообразий является комплексным аналогом римановой геометрии: многие важнейшие понятия римановой геометрии, такие как секционная кривизна, пространственные формы, аксиомы подмногообразий и многие другие имеют своего комплексного “двойника”, имеющего весьма нетривиальный смысл в геометрии келеровых и, более обще, почти эрмитовых многообразий.

К числу таких понятий относятся тензоры: Вейля конформной кривизны, Вейля проективной кривизны, конциркулярной кривизны и конгармонической кривизны. Изучение конформно-инвариантных свойств римановых многообразий, в том числе и наделенных дополнительной структурой, является одной из наиболее актуальных задач современной дифференциальной геометрии. В частности, сюда относится изучение конформно-инвариантных свойств почти эрмитовых многообразий. Значительный интерес представляет специальный тип конформных преобразований – конгармонические преобразования, т.е. конформные преобразования, сохраняющие свойство гармоничности гладких функций. Этот тип преобразований был введен в рассмотрение Иши [17] в 1957 году и в настоящее время изучается с различных точек зрения. Известно, что такие преобразования имеют тензорный инвариант – так называемый тензор конгармонической кривизны. Этот тензор является алгебраическим тензором кривизны, т.е. он обладает классическими свойствами симметрии тензора римановой кривизны.

Геометрию этого тензора в случае когда риманова структура дополнена до почти контактной метрической структуры, в частности, до сасакиевой и К-контактной структур изучали ряд авторов [18], [19], и др. Изучению геометрии тензора конгармонической кривизны почти эрмитовых структур уделялось очень мало внимания.

Пополнение римановой структуры до почти эрмитовой структуры позволяет выделить еще несколько конгармонических инвариантов – элементов спектра тензора конгармонической кривизны, а также дополнительные свойства симметрии тензора конгармонической кривизны.

Цель диссертационной работы состоит в изучении геометрии тензора конгармонической кривизны приближенно келеровых многообразий.

Основные задачи диссертационного исследования:

1. Выделить конгармонические инварианты – элементы спектра тензора конгармонической кривизны почти эрмитовой структуры, а также дополнительные свойства симметрии тезора конгармонической кривизны. В частности выделить аналоги классов Грея.

2. Изучить конгармонически плоские приближенно келеровы многообразия.

3. Исследовать приближенно келеровы многообразия конгармонически постоянного типа.

4. Исследовать приближенно келеровы многообразия точечно постоянной голоморфной конгармонической кривизны.

5. Исследовать конгармонически реккурентные приближенно келеровы многообразия.

Методы исследования. Результаты диссертационного исследования получены систематическим использованием тензорного исчисления в сочетании с методом присоединенных G-структур.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертационном исследовании в ходе решения поставленных задач, являются новыми. Научная новизна обусловлена тем, что изучением геометрии тензора конгармонической кривизны приближенно келеровых многообразий геометры раннее не занимались.

В диссертационной работе приведены доказательства всех основных выводов, которые сформулированы в виде теорем и предложений.

Теоретическое и прикладное значение. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения почти эрмитовых структур. Теория, разработанная в диссертации, может быть использована в качестве специальных и факультативных лекционных курсов для студентов старших курсов и аспирантов математических факультетов, а также при выполнении ими курсовых, дипломных и научных работ.

Апробация работы. Результаты исследования докладывались: на XVIII Международной конференции “Математика. Экономика. Образование”; VI Международный симпозиум “Ряды Фурье и их приложения”; Междисциплинарный семинар “Информационно-коммуникационные технологии” Новороссийск, 2010 г.; на второй Российской школы-конференции с международным участием для молодых ученых «Математика, информатика, их приложения и роль в образовании». Тверь, 2010 г.; конференции, посвященной 110-летию математического факультета. Москва, 2011 г.; на научно-исследовательском семинаре кафедры геометрии МПГУ (руководитель доктор физ.-мат. наук, проф. Кириченко В.Ф.) (ноябрь 2010). На научно исследовательском семинаре кафедры геометрии Каз. ГУ (руководитель доктор физ.-мат. наук, проф. Шурыгин В.В.) (декабрь 2010 г., октябрь 2011г.).

Публикации. Основные научные результаты, включенные в диссертационную работу, опубликованы в 8 печатных работах автора (см. [52]–[59]).

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертационная работа является самостоятельным исследованием автора. Почти все опубликованные научные работы по теме исследования выполнены без соавторов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения (исторический обзор, общая характеристика диссертации, содержание диссертации), пяти глав и списка литературы, включающего 59 наименований. Полный объем диссертации составляет 76 страниц машинописного текста.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Краткий обзор содержания диссертации

Во введении дается обзор публикаций по теме исследований, раскрывается актуальность темы. Далее формулируется цель диссертационного исследования, а затем перечисляются основные задачи, решение которых позволяют достичь поставленной цели. Новизна работы отражается в приведенных основных результатах. Указаны методы исследования, теоретическое значение работы, ее апробация.

В главе 1 напоминаются геометрические факты, необходимые для дальнейшего изложения. Все факты взяты из монографии В.Ф.Кириченко [20] и мы придерживаемся терминологии, принятой в этой монографии.

Глава 2 посвящена исследованию конгармонических инвариантов – элементов спектра тензора конгармонической кривизны, а также дополнительных свойства симметрии тензора конгармонической кривизны. В данной главе выделены 7 конгармонических инвариантов и на их основе выделены 7 классов почти эрмитовых многообразий и получены тождества, характеризующие выделенные классы. Изучаются связи между этими инвариантами и дополнительными свойствами симметрии тензора конгармонической кривизны, а также геометрический смысл обращения в нуль этих инвариантов.

В главе 3 нами будет найден критерий точечного (глобального) постоянства конгармонического типа NK-многообразия. Доказано, что NK-многообразие конгармонически постоянного типа является многообразием постоянной скалярной кривизны.

Глава 4 посвящена исследованию NK-многообразий постоянной голоморфной конгармонической (короче, HK-) кривизны.

Доказано, что почти эрмитово многообразие (M,g,J) является многообразием постоянной HK-кривизны c тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $K^{(a\ \ d)}_{\ (bc)} = \frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}$. В частности, NK-многообразие является многообразием точечно постоянной конгармонично голоморфной кривизны c тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $\tilde{A}^{ad}_{bc} = \frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}$. Доказано, что точечное постоянство голоморфной конгармонической кривизны связного NK-многообразия размерности свыше четырех равносильно ее глобальному постоянству.

В главе 5 мы рассматриваем ковариантный дифференциал тензора конгармонической кривизны приближенно келерова многообразия. Здесь мы получили компоненты ковариантного дифференциала тензора конгармонической кривизны приближенно келерова многообразия на пространстве присоединенной G-структуры. Доказано, что тензор голоморфной секционной кривизны локально конгармонически симметрического *NK*-многообразия параллелен в первой канонической связности. Далее исследованы конгармонически рекуррентные *NK*-многообразия, доказано, что конгармонически рекуррентное *NK*-многообразие является *NK*-многообразием постоянного типа $c=\frac{1}{n(n-1)}B^{abc}B_{abc}=\frac{1}{n(n-1)}B$, а также что конгармонически реккурентное *NK*-многообразие является либо конгармонически симметрическим, либо келеровым многообразием.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Выделены конгармонические инварианты – элементы спектра тензора конгармонической кривизны почти эрмитовой структуры, а также дополнительные свойства симметрии тезора конгармонической кривизны.

2. Найдены несколько дополнительных свойств симметрии тензора конгармонической кривизны *NK*-многообразия. В терминах этих свойств выделен и изучен класс конгармонически-паракелеровых *NK*-многообразий.

Конгармонически-паракелерово *NK*-многообразие является многообразием постоянной неотрицательной скалярной кривизны. При этом оно является многообразием нулевой скалярной кривизны тогда и только тогда, когда оно келерово.

Келерово многообразие размерности свыше четырех конгармонически-паракелерово тогда и только тогда, когда оно риччи-плоско.

Четырехмерное келерово многообразие конгармонически паракелерово тогда и только тогда, когда оно является многообразием нулевой скалярной кривизны.

Конгармонически плоское келерово многообразие M размерности свыше четырех локально голоморфно изометрично комплексному евклидову пространству $\boldsymbol{C}^n$, снабженному канонической келеровой структурой.

3. Найден аналитический критерий конгармонического постоянства типа *NK*-многообразия, с помощью этого критерия доказано: что локальное конгармоническое постоянство типа *NK*-многообразия в размерности больше 4 равносильно его глобальному конгармоническому постоянству типа; *NK*-многообразие конгармонически постоянного типа является многообразием постоянной скалярной кривизны.

4. Получен аналитический критерий постоянной голоморфной конгармонической кривизны *NK*-многообразия.

Почти эрмитово многообразие (M,g,J) является многообразием постоянной *НК*-кривизны c тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной *G*-структуры $K^{(a\ \ d)}_{\ \ (bc)}=\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}$.

NK-многообразие является многообразием точечно постоянной конгармонично голоморфной кривизны c тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной *G*-структуры $\tilde{A}^{ad}_{bc}=\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}$.

Точечное постоянство голоморфной конгармонической кривизны связного *NK*-многообразия размерности свыше четырех равносильно ее глобальному постоянству.

5. Найден аналитический критерий конгармонически реккурентности *NK*-многообразия. С помощью этого критерия доказано, что: конгармонически рекуррентное *NK*-многообразие является *NK*-многообразием постоянного типа $c = \frac{1}{n(n-1)} B^{abc} B_{abc} = \frac{1}{n(n-1)} B$; конгармонически реккурентное *NK*-многообразие является либо конгармонически симметрическим, либо келеровым многообразием.

Список литературы

1. Gray, A. *Vector cross products on manifolds* / A. Gray // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – V.141. – P. 465-504.
2. Frölicher, A. *Sur differentialgeometrie der compexen structuren.* / A. Frölicher // Math. Ann. – 1955. – V. 129. P. 50-95.
3. Fukamy, T. *Almost Hermitian structure on* S^6. / T. Fukamy, S. Ishihara // Tôhoku Math. J. – 1955. – V. 7. – P. 151-156.
4. Tachibana, S. *On almost analythic vectors in certain almost Hermitian manifolds*. / S. Tachibana // Tôhoku Math. J. – 1959. – V.11. – P. 351-363.
5. Gray, A. *Nearly Kâhler manifolds*. / A. Gray // J. Diff. Geom. – 1970. – V. 4, №3. – P. 283-309.
6. Gray, A. *Six dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products.* / A. Gray // Tôhoku Math. J. – 1969. – V. 2. – P. 614-620.
7. Wolf, J. *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms.* / J. Wolf, A. Gray // J. Diff. Geom. – 1968. – V. 2. P. 77-159.
8. Kojo, H. *On a K-space with certain conditions*. / H. Kojo // Hokkaido Math. J. – 1972. – V. 1, №2. – P. 228-231.
9. Gray, A. *The structures of nearly Kähler manifolds*. / A. Gray // Ann. Math. – 1976. – V. 223. – P. 233-248.
10. Кириченко, В.Ф. *Дифференциальная геометрия К-пространств*. / В.Ф. Кириченко // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии ВИНИТИ АН СССР. – 1977. – Т.8. – С. 139-161.
11. Kirichenko, V.F. *Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR-submanifolds in generalized Hermitian geometry*. I. / V.F. Kirichenko //Geometriae Dedicate. – 1994. – V.51. – P. 75-104.
12. Kirichenko, V.F. *Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR-submanifolds in generalized Hermitian geometry*. II. / V.F. Kirichenko //Geometriae Dedicate. – 1994. – V.52. – P. 53-85.
13. Takamatsu, K. *Classification of a conformally flat K-space*. / K. Takamatsu, Y. Watanabe// Tôhoku Math. J. – 1972. – V. 24, №3. – P. 435-440.
14. Watanabe, Y. *On a K-space of constant holomorphic sectional curvature*. / Y. Watanabe, K. Takamatsu // Kodai Math. Semin. Repts. – 1973. – V. 25, № 3. – P. 297-306.

15. Vanhecke, L. *Some theorems for quasi- and nearly Kähler manifolds.* / L. Vanhecke // Bull. Unione mat. ital. – 1975. – V. 12, № 3. – P. 174-188.
16. Кириченко, В.Ф. *Некоторые типы К-пространств*. / В.Ф. Кириченко // Успехи мат. наук. – 1975. – Т.30, №3. С. 163-164.
17. Ishii, Y. *On conharmonic transformations*. / Y. Ishii // Tensor. – 1957. – V. 7(2). – P. 73-80.
18. Khan, Q. *On conharmonically and special weakly Ricci symmetric Sasakian manifolds*. / Q. Khan // Novisad J. Math. – 2004. – V. 34, № 1. – P. 71-77.
19. Dwivedi, M.K. *On conharmonic curvature tensor in K-contact and Sasakian manifolds*. http://math.usm.my/bulletin/pdf/acceptedpapers/2009-04-002_R2.pdf/

РАБОТЫ АВТОРА, ОПУБЛИКОВАННЫЕ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Кириченко, В.Ф. *Геометрия тензора конгармонической кривизны почти эрмитовых многообразий*. / В.Ф. Кириченко, А.Р. Рустанов, А.А. Шихаб // Математические заметки. – Москва, 2011. – 90, №1. – С. 87-103.

2. Шихаб, А.А. *Приближенно келеровы многообразия постоянной голоморфной конгармонической кривизны*. / А.А. Шихаб // Преподаватель XXI век. – 2011, №1. – С. 199-206.

3. Шихаб, А.А. *К-постоянство типа NK многообразия.* / А.А. Шихаб // Преподаватель XXI век. – 2011, №3. – С. 204-208.

4. Кириченко, В.Ф. *О Геометрии тензора конгармонической кривизны приближенно келеровых многообразий*. / В.Ф. Кириченко, А.А. Шихаб // Фундаментальная и прикладная математика. – 2010. Т. 16, №2. – С. 43-54.

5. Шихаб, А.А. *Приближенно келеровы многообразия голоморфной конгармонической кривизны*. / А.А. Шихаб // Математика, информатика, физика и их преподавание. - М.: МПГУ. – 2009. – С. 137-140.

6. Шихаб, А.А. *К-постоянство типа NK многообразия*. / А.А. Шихаб // Наука в вузах: Математика, информатика, физика, образование. - М.: МПГУ. – 2010. – С. 195-196.

7. Шихаб, А.А. *Ковариантный дифференциал тензора конгармонической кривизны приближенно келеровых многообразий.* / А.А. Шихаб // XVIII Международная конференция "Математика. Экономика. Образование". VI Международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Междисциплинарный семинар

“Информационно-коммуникационные технологии”. Труды. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ. – 2010. С. 56-62.

8. Shihab, A.A. *On the geometry of conharmonic curvatuar tensor of nearly kahler manifold*. / A.A. Shihab // Journal of Basrah Researches. – 2011. – v. 37, № 4. – P. 39-48.