

На правах рукописи

Гоголашвили Булат Эдуардович

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГРАВИТАЦИОННЫХ ФРОНТОВ ПРОПИТКИ
И ПРОЦЕССЫ ПАЛЬЦЕОБРАЗОВАНИЯ
В НЕНАСЫЩЕННОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

01.02.05 — механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ–2008

Работа выполнена в Отделении механики Научно-исследовательского института математики и механики им. Н. Г. Чеботарева Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Егоров Андрей Геннадьевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Саламатин Андрей Николаевич

кандидат физико-математических наук
Беляев Алексей Юрьевич

Ведущая организация: Институт механики и машиностроения
КазНЦ РАН, г. Казань

Защита состоится 29 мая 2008 г. в 14 часов 30 минут в аудитории мех. 2 на заседании диссертационного совета Д 212.081.11 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан апреля 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук, доцент

А. А. Саченков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Угроза поверхностного заражения подземных вод токсичными веществами при авариях на промышленных предприятиях и складах химических продуктов является в наше время актуальной экологической проблемой. Попавшие на дневную поверхность водорастворимые загрязнения мигрируют с потоком влаги через зону аэрации к зеркалу грунтовых вод и могут в конечном итоге нанести непоправимый ущерб природным экосистемам обширного региона. Защитные свойства зоны аэрации, связанные с адсорбцией загрязнителя частицами почвы, во многом определяются режимом фильтрационных потоков.

Многочисленные эксперименты свидетельствуют о том, что в ненасыщенных грунтах движимый гравитацией однородный фронт пропитки, как правило, распадается на систему устойчиво развивающихся потоков («пальцев»). Понимание причин, вызывающих неустойчивость гравитационных фронтов пропитки, и учёт этого эффекта необходимы для верного предсказания интенсивности переноса влаги и водорастворимых загрязнений от дневной поверхности к зеркалу грунтовых вод. Действительно, наличие предпочтительных путей, порождаемых распадом фронта пропитки на отдельные пальцы, существенно уменьшает время миграции влаги в зоне аэрации, снижая её защитную роль.

Практическая важность и научная значимость феномена пальцеобразования диктуют необходимость разработки адекватной математической модели этого явления. К сожалению, традиционные модели влагопереноса (например модель Ричардса) оказываются в данной ситуации малопригодными, так как не принимают в расчёт динамических эффектов, играющих значительную роль при образовании и развитии пальцев. Многочисленные попытки учёта динамических эффектов в модели Ричардса дали определённое понимание некоторых аспектов проблемы, однако построение целостной модели остаётся всё ещё актуальной задачей.

Цели работы. Построение и верификация математической модели влагопереноса в ненасыщенном грунте, способной адекватно описать процессы образования и развития пальцев.

Научная новизна. Реализована новая микромодель пористой среды, сочетающая в себе достоинства моделей связки капилляров и решётчатых моделей. Предложенная модель учитывает взаимодействие пор

между собой, но, в отличие от решётчатых моделей, в качестве инструмента исследования используется не прямое численное моделирование, а аналитический подход, основанный на приближении среднего поля. Применение построенной микромодели к описанию процесса пропитки показало, что основные параметры процесса существенно зависят от темпа пропитки.

Проведён анализ возможных модификаций традиционной модели влагопереноса, учитывающий эффекты памяти. Показано, что одновременный учёт динамических (релаксация) и статических (гистерезис) эффектов позволяет качественно верно описать наблюдаемые особенности процесса пальцеобразования. Гистерезис отвечает за устойчивое развитие пальцев, в то время как релаксация их генерирует.

На основе обширного экспериментального материала проведена верификация релаксационной модели влагопереноса. Найдены коэффициентные зависимости времени релаксации от управляющих параметров (давления и водонасыщенности) для различных пористых сред.

Научное и практическое значение. Полученные в диссертационной работе результаты расширяют теоретические знания о процессе переноса влаги в ненасыщенных пористых средах. Разработанные модели могут применяться для расчёта скорости распространения жидких загрязнителей в почве и оценки защитных свойств зоны аэрации.

Достоверность результатов. Предложенные в диссертации математические модели основаны на общих законах и моделях механики сплошных сред, а также на физически обоснованных гипотезах и упрощениях. Полученные результаты качественно и количественно согласуются с известными экспериментальными данными.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на XVII сессии Международной школы по моделям механики сплошной среды (Казань, 2004); на Международной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» (Казань, 2004); на Международном семинаре Recent Advances in Multi-phase Flow in Porous Media (Казань, 2004); на Международной конференции 2004 American Geophysical Union Fall Meeting (San Francisco, 2004); на Международном семинаре Upscaling Flow and Transport Process in Porous Media (Delft, 2005); на Четвёртой молодёжной научной школе-конференции «Лобачевские чтения-2005» (Казань, 2005); на Международном семинаре Summer School on Upscaling and Modelling of Coupled Transport

Processes in the Subsurface (Utrecht, 2006); на XVIII сессии Международной школы по моделям механики сплошной среды (Саратов, 2007); на итоговых научных конференциях Казанского государственного университета; на семинарах отделения механики НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарёва Казанского государственного университета.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 7 работ. Список основных публикаций приведён в конце автореферата.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 121 странице, содержит 61 рисунок и 7 таблиц. Список литературы насчитывает 99 наименований.

Содержание работы

Во введении отмечается актуальность темы, представлен обзор литературы по теме диссертации, формулируется цель и положения, выносимые на защиту. Дается краткий обзор структуры и содержания диссертации.

Первая глава работы посвящена исследованию особенностей процессов перераспределения влаги в пористой среде на основе микромоделирования.

В параграфе 1.1 рассматривается модель пористой среды в виде связки цилиндрических капилляров различного размера, не взаимодействующих между собой. Подробно излагаются положения микромоделей Туллера-Ора, в которой эти капилляры имеют полигональное поперечное сечение. Этот подход является значительно более реалистичным по сравнению с моделью цилиндрических капилляров, поскольку позволяет учитывать плёночные и уголковые течения жидкости, доминирующие при малых насыщенностях пористой среды. Тем не менее игнорирование взаимодействия пор является её принципиальным недостатком.

Параграф 1.2 представляет модель, преодолевающую этот недостаток путём моделирования пористой среды в виде решётки со связями — цилиндрическими капиллярами различного поперечного сечения. Определяющим параметром для такой модели является координационное число решётки Z , равное среднему числу выходящих из одного узла связей. В работе использовалось характерное для типичных лабораторных песков значение $Z = 4.6$. Другим параметром модели является плотность распределения поперечных размеров связей (капилляров).

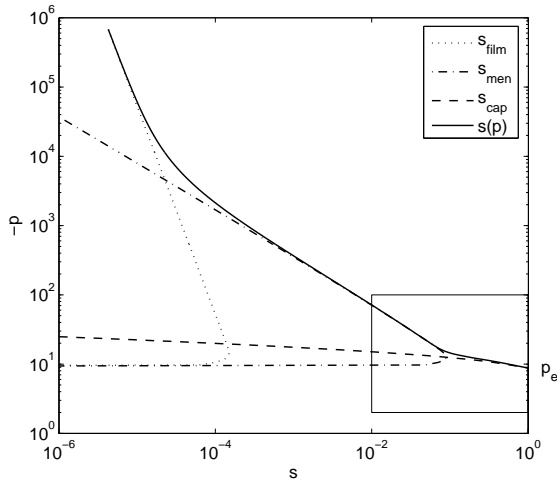


Рис. 1. Зависимость насыщенности от давления (в см водного столба) для грунта 20/30

В качестве функции распределения пор по размерам использовалось гамма-распределение. Выбор двухпараметрического закона распределения позволяет согласовать её с известными эмпирическими моделями Брукса-Кори и Ван-Генухтена, в которые также входят два определяющих параметра.

Сформулированная в параграфе 1.2 микромодель использовалась далее (параграф 1.3) для вычисления гидравлических функций (капиллярного давления и гидравлической проницаемости) пористой среды при её дренировании. Первая из этих функций при заданном уровне давления определялась осреднением насыщенностей отдельных капилляров по всему массиву пор с учётом взаимодействия между ними. Зависимость водонасыщенности среды от давления $s(p)$ может быть представлена в виде суммы вкладов жидкости, сосредоточенной в заполненных капиллярах, уголковых менисках пор и в плёнках на твёрдой поверхности: $s(p) = s_{\text{cap}}(p) + s_{\text{men}}(p) + s_{\text{film}}(p)$ (см. рис. 1). Асимптотический анализ поведения этих функций при $p \rightarrow \infty$ показал, что влияние адсорбированных пленок начинает сказываться лишь при очень низких насыщенностях $s \sim 10^{-4}$. В то же время мениски в углах пор играют существенную роль при влажностях менее 20%, и их влияние необходимо учитывать.

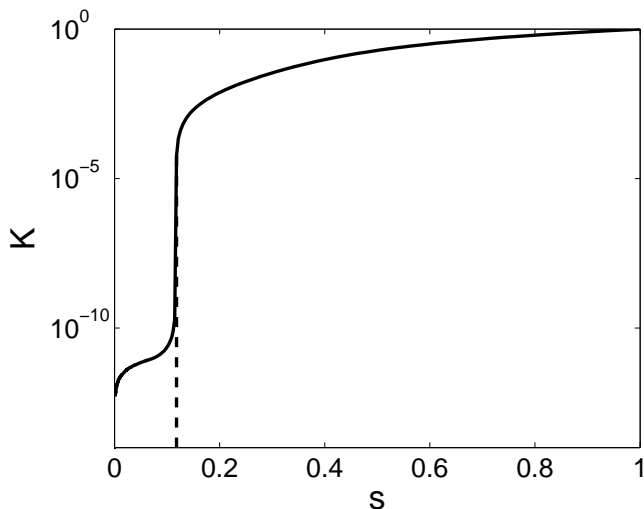


Рис. 2. Зависимость относительной фазовой проницаемости от насыщенности

Другой важной гидравлической характеристикой пористой среды является зависимость относительной фазовой проницаемости K от насыщенности. Для её вычисления была применена известная электрическая аналогия, сводящая проблему отыскания фазовой проницаемости к задаче нахождения эффективной проводимости решётки по заданному распределению проводимостей её связей. Считая, что проводимости отдельных пор не зависят друг от друга, и используя известную аппроксимацию среднего поля, можно найти эффективную проводимость решётки $K_*(p)$ как решение алгебраического уравнения

$$\frac{2}{Z} = \left\langle \frac{\bar{k}}{\bar{k} + K_*(Z/2 - 1)} \right\rangle.$$

Здесь \bar{k} — проводимость отдельной связи, а под средним понимается математическое ожидание относительно заданной плотности распределения пор по размерам. Полученная в результате решения зависимость относительной фазовой проницаемости K от давления p вместе с найденной ранее зависимостью водонасыщенности среды от давления $s(p)$ даёт в итоге искомую функцию $K(s)$. Её типичный вид представлен на рис. 2 сплошной линией. На этом же рисунке штриховой линией показана та же самая кривая при игнорировании потока по адсорбированным

жидким плёнкам. Обе кривые практически совпадают вплоть до достижения величины s остаточного значения $S_{res}^{(k)}$.

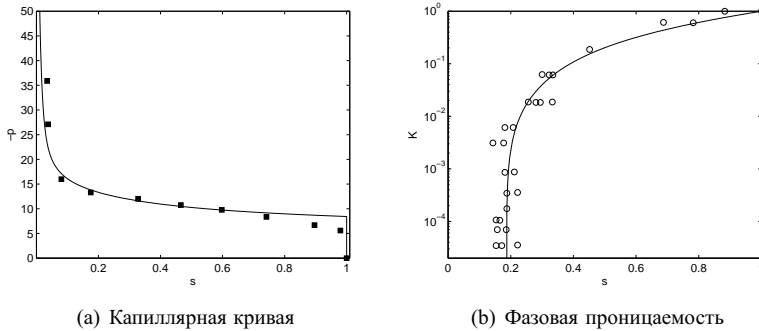


Рис. 3. Сравнение теоретически полученных зависимостей гидравлических функций (сплошные линии) с экспериментальными данными (маркеры) для песка 12/20 и $Z = 4.6$

Построенная микромодель верифицировалась по известным экспериментальным данным дренирования промышленно производимых песчаных лабораторных засыпок 12/20, 20/30, 30/40. Их код соответствует размеру сит, через которые просеивается песок; средний диаметр зёрен составляет, соответственно, 1.105, 0.713 и 0.532 мм. Построенные гидравлические функции продемонстрировали вполне удовлетворительное согласование с экспериментальными данными как по капиллярной кривой, так и по относительной фазовой проницаемости для всех трёх песков (см. рис. 3, на котором представлены результаты такого согласования для песка 12/20). Кроме того, была получена хорошая корреляция между найденными в результате подбора параметров величинами среднего размера пор и известными из экспериментов средними размерами зёрен пористой засыпки. Тестирование построенной микромодели на других (помимо гамма-распределения) двухпараметрических плотностях распределения пор по размерам дало приблизительно те же значения параметров модели, что и гамма-распределение.

Найденные в ходе верификации по данным дренажа параметры модели были использованы в параграфе 1.4 для определения гидравлических функций при медленной (равновесной) пропитке. При построении модели пропитки дополнительно учитывались кооперативный механизм и механизм схлопывания (“snap-off”) заполнения пор, а также наличие в

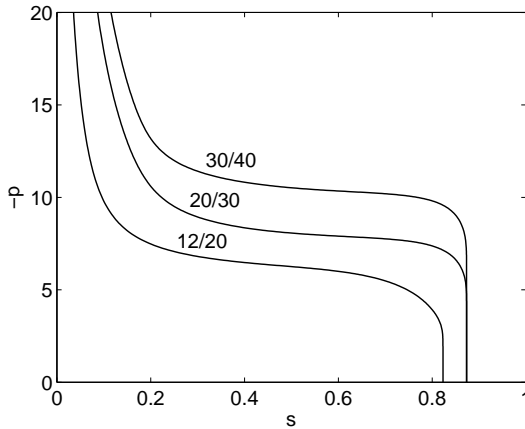


Рис. 4. Главные кривые пропитки для трёх лабораторных песков

среде заземлённого воздуха. Это позволило получить значения остаточной по воздуху насыщенности $s_{\text{air}} = 0.823, 0.874, 0.879$ для сред 12/20, 20/30 и 30/40 соответственно. Полученные величины согласуются с экспериментальными данными.

В параграфе 1.5 строится модель первичной (быстрой) пропитки. Высокие темпы роста влажности изначально сухой пористой среды позволяют в этой ситуации пренебречь медленными (плёночные и уголко-вые течения) механизмами заполнения пор по сравнению с поршневым вытеснением в капиллярах и кооперативным заполнением. Особенностью этой модели является немонотонность кривой $p = P(s)$ первичной пропитки. Разумеется, в реальных натуральных экспериментах подобная немонотонность не может быть реализована, и переход из сухого во влажное состояние будет осуществляться скачком (пунктирная линия на рис. 5). Соответствующая этому скачку характерная полка давления на кривой первичной пропитки, соединяющая состояние нулевой насыщенности с близким к полному насыщению состоянием, отмечается практически всеми исследователями, работающими с лабораторными песками.

Полученные результаты позволяют сделать заключение о существенной зависимости общей картины протекания процесса пропитки от темпа его протекания и, следовательно, о необходимости модификации традиционных моделей влагопереноса учётом в них динамических (ре-

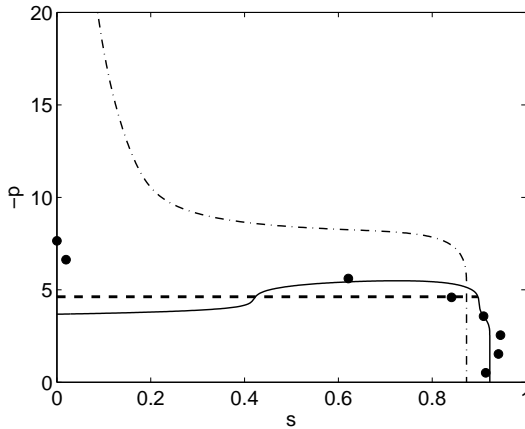


Рис. 5. Кривая первичной пропитки (сплошная линия) и главная кривая пропитки (штрихпунктирная линия) для среды 30/40. Маркеры — кривая первичной пропитки по экспериментальным данным Д. А. ДиКарло

лаксационных) эффектов. В зависимости от темпа процесса пропитки элемент пористой среды в фазовой плоскости (s, p) должен следовать по траектории, промежуточной между первичной (бесконечно быстрый процесс) и главной (бесконечно медленный процесс) кривыми пропитки (рис. 5).

Вторая глава диссертационной работы посвящена анализу макроскопических уравнений влагопереноса и их возможных релаксационных модификаций.

В параграфе 2.1 проводится анализ устойчивости традиционной для механики грунтов модели Ричардса, которая при отсутствии источников или стоков жидкости имеет вид

$$\frac{\partial s}{\partial t} - \nabla \cdot K(s) \nabla p - \frac{\partial}{\partial z} K(s) = 0, \quad (1)$$

$$p = P(s). \quad (2)$$

Здесь s — относительная водонасыщенность ($s \in [0, 1]$), p — давление жидкости, K — относительная фазовая проницаемость, z — вертикальная координата, противоположная по направлению силе тяжести. Функция $P(s)$ определяет равновесное капиллярное давление, отвечающее заданному уровню водонасыщенности.

Анализ показал, что любое решение уравнения Ричардса является устойчивым, тем самым делая это уравнение непригодным для моделирования процессов пальцеобразования.

Следующим шагом исследования стало рассмотрение модифицированных моделей Ричардса. Изучались такие модификации, при которых изменению подвергается лишь равновесное соотношение (2) между давлением и водонасыщенностью:

$$\Phi(s, p, \dot{s}, \dot{p}, \dots) = 0. \quad (3)$$

Для системы уравнений (1), (3) был проведён линейный анализ устойчивости решения типа бегущей волны

$$s = s(\xi), \quad p = p(\xi), \quad \xi = z + Vt,$$

описывающего распространение гравитационного фронта пропитки. Соответствующие граничные условия имели вид

$$s(-\infty) = s_-, \quad s(+\infty) = s_+, \quad 0 < s_- < s_+ < 1.$$

Как обычно, задавались гармонические возмущения

$$\begin{aligned} s &= s_0(\xi) + \varepsilon s_1(\xi) \exp(i(\omega_x x + \omega_y y) + kt) + O(\varepsilon^2), \\ p &= p_0(\xi) + \varepsilon p_1(\xi) \exp(i(\omega_x x + \omega_y y) + kt) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

базового автомодельного решения $s_0(\xi)$, $p_0(\xi)$ задачи (1), (3), и исследовалась задача на собственные значения для отыскания собственных функций $s_1(\xi)$, $p_1(\xi)$ и дисперсионной кривой $k(\omega)$. Оказалось, что при малых ω вне зависимости от вида функции Φ дисперсионная кривая определяется как

$$k = -\frac{C}{s_+ - s_-} \omega^2 + O(\omega^4), \quad \text{где } C = \int_{-\infty}^{+\infty} K(s_0) \frac{dp_0}{d\xi} d\xi.$$

Отсюда видно, что для низкочастотных возмущений автомодельное решение устойчиво при $C > 0$ и неустойчиво в противном случае.

Полученный критерий показывает, что неустойчивость фронтов пропитки для общего случая модификации модели Ричардса связана с монотонностью профиля давления в базовом решении типа бегущей волны: $C < 0$ лишь в том случае, если p_0 возрастает с глубиной на некотором интервале изменения ξ . Поэтому для того, чтобы модифицированная модель Ричардса обладала свойством неустойчивости, необходимым для воспроизводства феномена пальцеобразования, нужно, чтобы

оно продуцировало немонотонность в решениях типа бегущей волны. Это требование к модели полностью согласуется с результатами экспериментальных работ.

Вид модифицированной модели конкретизируется в параграфе 2.2 на основе термодинамического подхода Хассанизаде. Всякая релаксационная модификация модели Ричардса должна удовлетворять энтропийному неравенству, которое выводится на основе балансовых соотношений для свободной энергии Гельмгольца на границе раздела фаз и может быть записано в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t}(p - P(s)) \geq 0.$$

В качестве таких модификаций далее привлекаются модели P - и S -релаксации. Первая из них заменяет зависимость (2) на релаксационный закон вида

$$\tau \frac{\partial s}{\partial t} = p - P(s), \quad (4)$$

а вторая — на соотношение

$$\tau \frac{\partial s}{\partial t} = S(p) - s. \quad (5)$$

Ещё одним фактором, принятым в расчёт при построении модифицированной модели, стал учёт гистерезисного характера зависимости давления от насыщенности.

В параграфе 2.3 рассматриваются решения типа бегущих волн для описанных выше релаксационных моделей. Анализ фазовой плоскости модифицированных уравнений позволил получить критерий, связывающий значение коэффициента релаксации в точке за фронтом волны и её форму (монотонная/немонотонная). В том случае, когда $\tau(s_+, p_+)$ больше критического значения τ_{cr} , определяемого по формуле

$$\tau_{\text{cr}} = \frac{P'^2(s_+)K(s_+)}{4V(K'(s_+) - V)},$$

профили насыщенности и давления будут немонотонными (см. рис. 6). Это свойство решения, как было доказано в параграфе 2.1, приводит к неустойчивости фронта пропитки при низкочастотных его возмущениях и к образованию пальцев. Здесь же демонстрируется важная роль гистерезиса в подавлении нефизических (осциллирующих) решений.

Критерий устойчивости волны пропитки, полученный ранее, был выведен в предположении малости частоты возмущений ω исходного решения типа бегущей волны. В параграфе 2.4 рассматривается вопрос

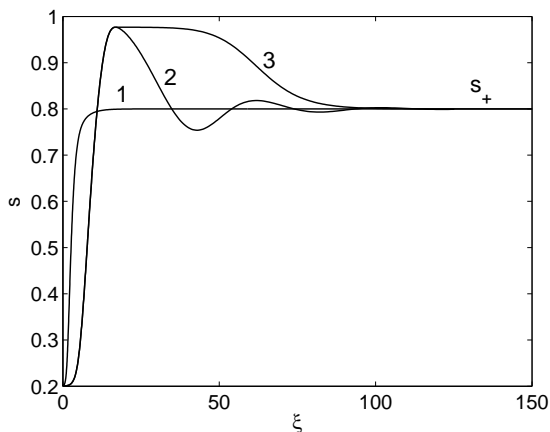


Рис. 6. Профили насыщенности для различных моделей влагопереноса: 1 – P -модель при $\tau(s_+, p_+) < \tau_{cr}$; 2 – P -модель при $\tau(s_+, p_+) > \tau_{cr}$; 3 – модель с учётом гистерезиса

устойчивости фронта пропитки во всём интервале изменения ω . Для этого численно решается соответствующая спектральная задача. Анализ решения показывает, что неустойчивость фронта пропитки на низких возмущающих частотах с ростом частоты меняется на устойчивость. Имеется также характерное значение частоты ω_0 , при котором возмущения растут быстрее всего. Естественно связывать эту величину с характерным расстоянием между пальцами, на которые распадается изначально однородный гравитационный фронт пропитки.

В параграфе 2.5 было проведено двумерное моделирование распространения одиночного пальца и распада фронта пропитки на систему пальцев на основе системы уравнений (1), (4). В качестве зависимости $\tau(s, p)$ выбиралась простейшая функция вида $\tau = \tau_0 \cdot (-p)$. Численная реализация опиралась на схему, предложенную ранее Р. З. Даутовым и А. А. Ахтареевым. Численные расчёты подтвердили, что выявленная в предыдущих параграфах неустойчивость фронта пропитки приводит к его распаду на систему устойчиво развивающихся пальцев. Характерное расстояние между пальцами соответствует теоретически предсказанному. Размытие пальцев за счёт оттока влаги из них в окружающую сухую среду обеспечивается гистерезисом капиллярной кривой при дренаже и пропитке. Морфологические особенности пальца (область питания, тело

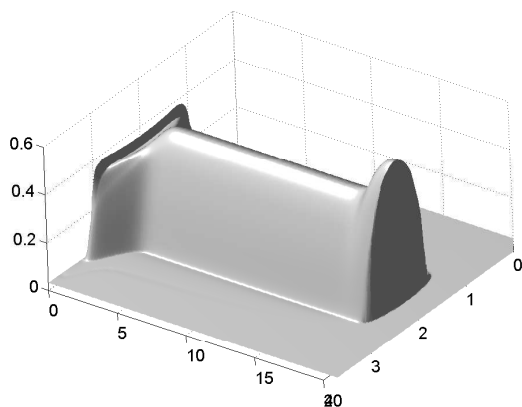


Рис. 7. Поле насыщенности для одиночного пальца

пальца, головка пальца) качественно совпадают с выявленными в экспериментах, а профиль влажности вдоль оси пальца — с полученным в результате решения автомодельной задачи.

Заключительная третья глава диссертационной работы посвящена верификации построенной в предыдущей главе релаксационной модели влагопереноса на основании экспериментов Д. А. ДиКарло по гравитационной пропитке пористых сред. Результаты этих экспериментов в силу своей полноты и широты охвата предоставляют хорошую базу для тестирования теоретических моделей.

В параграфе 3.1 даётся описание методики экспериментов и процедур по обработке их результатов. Установлены следующие характерные особенности процесса:

1. зависимость вида профиля насыщенности от величины потока жидкости (монотонные профили для очень больших и очень маленьких потоков, немонотонные в промежуточном случае);
2. зависимость вида профиля насыщенности от величины начальной водонасыщенности среды (немонотонные профили для сухой среды и монотонные для влажной);
3. почти постоянная скорость перемещения пальца.

В параграфе 3.2 обсуждается модель P -релаксации

$$\tau(s, p) \frac{\partial s}{\partial t} = p - P(s). \quad (6)$$

Конкретный вид зависимости $\tau(s, p)$ выбирается за счёт согласования теоретических и экспериментальных зависимостей насыщенности в голове пальца от входного потока жидкости.

Далее, в параграфе 3.3 формулируется исходная постановка задачи одномерного влагопереноса в пористой среде, записываются начальные и граничные условия, приводятся соотношения для сканирующих дренажных кривых, конкретизирующих гистерезисный закон.

Постановка задачи завершается в параграфе 3.4, в котором на основании экспериментальных данных строятся аппроксимации главных кривых пропитки и дренажа, а также зависимость гидравлической проницаемости от насыщенности.

В параграфе 3.5 описывается процедура определения решения типа бегущей волны модифицированной задачи (1), (6). В связи с необходимостью учёта гистерезиса задачу приходится решать в два этапа. Первоначально решается задача для фазы быстрой пропитки, и релаксация играет здесь важнейшую роль. На втором этапе (отвечающем процессу дренирования) релаксационными эффектами можно пренебречь. Это связано с тем, что дренирование, по сравнению с пропиткой, протекает значительно медленнее. Зависимость давления от насыщенности, в силу влияния гистерезиса, при этом будет определяться уже не главной, а сканирующей капиллярной кривой.

Параграф 3.6 посвящён определению вида коэффициента релаксации $\tau(s, p)$. Для этого было использовано предположение о том, что он может быть представлен в виде произведения двух независимых функций насыщенности и давления: $\tau(s, p) = \tau_s(s)\tau_p(p)$. Функции τ_p и τ_s определялись из условия согласования результатов вычисления зависимости насыщенности в голове пальца с соответствующими экспериментальными данными. Результаты вычисления этих функций представлены на рис. 8 и 9.

Адекватность построенной релаксационной модели проверялась в параграфе 3.7, где полученные с её помощью результаты сравнивались с результатами экспериментов Д. А. ДиКарло. Сопоставление установленных профилей насыщенности показало хорошее согласование численных и экспериментальных кривых во всём диапазоне изменения потоков. Столь же хорошее качество согласования продемонстрировали и зависимости насыщенности в хвосте и в голове пальца от величины по-

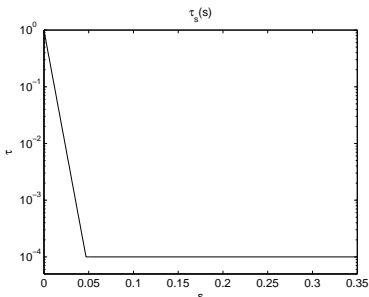


Рис. 8. График функции τ_s

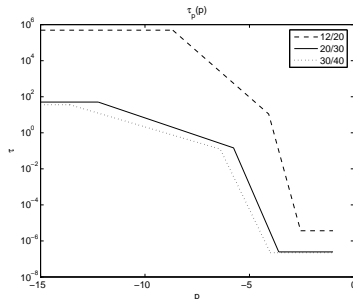


Рис. 9. Графики функции τ_p для различных лабораторных песков

тока. Эти же зависимости показали качественно сходное с экспериментами поведение при изменении начальной насыщенности s_0 среды, а именно исчезновение немонотонности профилей насыщенности по мере приближения этой величины к 0.02 (см. рис. 10).

В заключении подводятся итоги и обозначаются возможности дальнейшего развития проведённых исследований.

Основные результаты диссертационной работы

1. Построена микромодель пористой среды, учитывающая взаимодействие пор и использующая приближение среднего поля для вычисления зависимости капиллярного давления и проницаемости от водонасыщенности.
2. Проведён анализ устойчивости релаксационных модификаций модели Ричардса влагопереноса в пористой среде. Показано, что совместный учёт релаксации и гистерезиса способен воспроизвести экспериментально наблюдаемое явление пальцеобразования.
3. Предложена и верифицирована применительно к лабораторным пескам релаксационная модель влагопереноса в ненасыщенной пористой среде, способная адекватно описать известные экспериментальные данные.

Работа была выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-00516) и совместного проекта РФФИ и НВО (№ 05-01-890001-НВО).

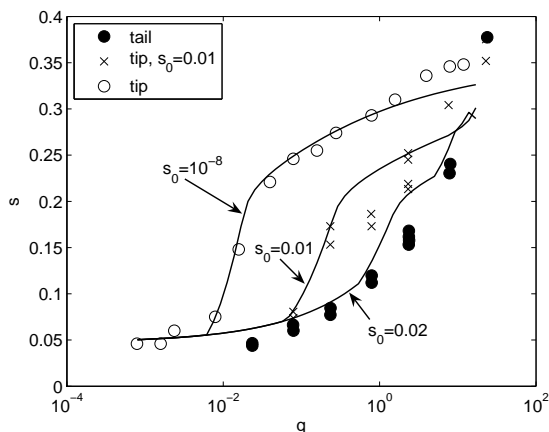


Рис. 10. Сравнение расчётной зависимости насыщенности в хвосте (tail) и в голове (tip) пальца от потока влаги с экспериментальными данными для песка 20/30

Список опубликованных работ по теме диссертации

1. Гоголашвили Б. Э. Определение равновесных гидравлических функций на основе микромоделирования пористой среды / Б. Э. Гоголашвили // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. — Т. 27. Модели механики сплошной среды: материалы XVII сессии Межд. школы по моделям механики сплошной среды (Казань, 4–10 июля 2004 г.) — Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2004. — С. 88–95.
2. Гоголашвили Б. Э. Применение микромоделирования пористой среды в задачах влагопереноса в ненасыщенных грунтах / Б. Э. Гоголашвили // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. — Т. 25. Актуальные проблемы математики и механики: материалы межд. научн. конф. (Казань, 26 сент.–1 окт. 2004 г.) — Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2004. — С. 88–89.
3. Gogolashvili B. E. Hydraulic functions of variably saturated porous media: Upscaling from single-pore to sample-scale model / B. E. Gogolashvili, A. G. Egorov, J. L. Nieber // Eos Trans. AGU, Fall Meet. Suppl. — 2004. — 85(47). — Abstract H31D-0435.

4. Егоров А. Г. Вычисление гидравлических функций на решётчатой модели пористой среды в приближении среднего поля / А. Г. Егоров, Б. Э. Гоголашвили // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2005. — Т. 147, кн. 3. — С. 57–74.
5. Гоголашвили Б. Э. Приближение среднего поля при вычислении гидравлических функций на решётчатой модели пористой среды / Б. Э. Гоголашвили // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. — Т. 31. Лобачевские чтения-2005: материалы Четвёртой молодёжной научной школы-конференции (Казань, 16–18 декабря 2005 г.) — Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2005. — С. 45–46.
6. Гоголашвили Б. Э. Применение релаксационных модификаций модели Ричардса для описания экспериментов по пальцеобразованию / Б. Э. Гоголашвили // Материалы Междунар. конф. «XVIII сессия Международной Школы по моделям механики сплошной среды» (Саратов, 27 авг.–1 сент. 2007 г.) — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2007. — С. 91–94.
7. Гоголашвили Б. Э. Верификация релаксационной модели Ричардса по экспериментальным данным для одномерной пропитки / Б. Э. Гоголашвили, Р. З. Даутов, А. Г. Егоров // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. — 2007. — № 3. — С. 85–92.