На правах рукописи

ЕГОРОВА ИРИНА ПЕТРОВНА

Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа второго рода

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико – математических наук

Казань – 2010

Работа выполнена на кафедре высшей математики Самарского государственного архитектурно – строительного университета и в лаборатории дифференциальных уравнений Института прикладных исследований АН Республики Башкортостан (г. Стерлитамак)

Научные руководители: доктор физико – математических наук, профессор
$\boxed{\text{Волкодавов Виктор Филиппович}}$,
доктор физико – математических наук, чл.-корр. АН РБ, профессор
Сабитов Камиль Басирович

Официальные оппоненты: доктор физико – математических наук, профессор
Солдатов Александр Павлович,

доктор физико – математических наук, профессор
Хайруллин Равиль Сагитович

Ведущая организация: Башкирский государственный университет

Защита состоится 17 июня 2010 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете (федеральный) по адресу: г. Казань, ул. Профессора М.Т.Нужина, дом 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан «___» мая 2010 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук,
доцент Е.К. Липачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В работе рассматриваются нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа второго рода в классической и прямоугольной областях.

Начало исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в работах Ф. Трикоми и С. Геллерстедта. В дальнейшем основы теории уравнений смешанного типа были заложены в работах Ф.И. Франкля, К.И. Бабенко, М.А. Лаврентьева, А.В.Бицадзе, М.М. Смирнова, В.Ф. Волкодавова, С.П. Пулькина, К.Б. Сабитова, А.И. Кожанова, В.И. Жегалова, А.М. Нахушева, Е.И. Моисеева, Р.С. Хайруллина, О.А. Репина, А.П. Солдатова и других математиков.

Следует отметить, что подавляющая часть работ по уравнениям смешанного типа относится к исследованию краевых задач смешанного типа с нехарактеристическим вырождением. Краевые задачи для уравнений смешанного типа второго рода или с характеристическим вырождением изучены сравнительно мало.

Первые исследования по уравнениям смешанного типа второго рода принадлежат И.Л.Каролю. Для уравнения

$$Lu \equiv u_{xx} + (sgny)|y|^m u_{yy} = 0, \quad m > 0, \tag{1}$$

в области G, ограниченной простой жордановой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $O(0,0)$ и $A(1,0)$, и характеристиками OC и AC уравнения (1), расположенными в полуплоскости $y < 0$, он доказал существование и единственность решения задачи Трикоми (задача Т) при $0 < m < 1$ в случае, когда граница Γ эллиптической части смешанной области G совпадает с так называемой "нормальной"кривой Γ_0: $(x-1/2)^2+(\frac{2}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}})^2 = 1/4$. Но в общем случае, то есть для произвольной кривой Γ, доказательство единственности решения задачи T и его существования оставалось открытым. К.Б. Сабитов доказал единственность решения задачи T для уравнения (1) при любой кривой Γ из класса Ляпунова при $0 < m < 1$. Им показано, что задача Трикоми для уравнения (1) при $m \geq 2$ поставлена некорректно. В связи с этим он исследовал задачу Трикоми для уравнения $x^m u_{xx} + (sgny)u_{yy} = 0$ при всех $m > 0$.

Ф.И. Франкль свел прямую задачу теории сопла Лаваля к новой задаче для уравнения (1) с показателем $m = 1/2$, где на линии перехода вместо классического условия непрерывности $u_y(x,0+0) = u_y(x,0-0)$, $0 < x < 1$, ввел требование разрывности $u_y(x,0+0) = -u_y(x,0-0)$, $0 < x < 1$.

И.Л. Кароль исследовал также уравнение смешанного типа второго рода

$$Lu \equiv u_{xx} + yu_{yy} + au_y = 0, \quad a = const, \tag{2}$$

в области аналогичной G. При $0 < a < 1$ он изучил задачу Трикоми с весовыми условиями склеивания, т. е. на линии изменения типа вместо обычного требования непрерывности производной по нормали: $u_y(x,+0) = u_y(x,-0)$, $0 < x < 1$, вводится условие сопряжения с весом

$$\lim_{y \to 0-0} (-y)^a u_y = \lim_{y \to 0+0} y^a u_y, \; 0 < x < 1.$$

Когда $a < 0$ при условии существования равенства $u_{xx}(x,0) + au_y(x,0) = 0$, $0 < x < 1$, им доказаны теоремы существования и единственности решения задачи Дирихле.

Задача T для уравнения (2) при $a < 0$ становится корректно поставленной, если условия склеивания ввести по–иному. С.С. Исамухамедов для уравнения (2) в области G при $a = -n + a_0$, $\frac{1}{2} < a_0 < 1$, $n = 1, 2, \ldots$, поставил задачу T со следующими условиями склеивания:

$$u(x,+0) = u(x,-0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

$$\lim_{y \to +0} (-y)^a [u_y + A_n^+(u)] = (-1)^k \lim_{y \to -0} (-y)^a \frac{\partial}{\partial y} [u - A_n^-(\tau)] = \nu(x), 0 < x < 1,$$

где

$$A_n^-(\tau) = \sum_{k=0}^{n} N_k (-y)^k \int_0^1 \tau^{2k}(z) (t(1-t))^{k+a_0-\frac{3}{2}} dt,$$

$$A_n^+(u) = \sum_{k=1}^{n} M_k y^{k-1} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}, \quad z = x - 2\sqrt{-y}(1-2t),$$

$N_k (k = \overline{0,n})$, $M_k (k = \overline{1,n})$ – определенные постоянные.

Единственность решения этой задачи доказана методом экстремума, а существование для случая, когда кривая Γ совпадает с нормальной кривой Γ_0 – методом интегральных уравнений.

Ю.М. Крикуновым изучен случай $a_0 = 1/2$ для некоторых специальных областей.

Хайруллин Р.С. для уравнения (2) в случае $a \le -1/2$ в смешанной области, ограниченной нормальным контуром Γ_0 и двумя характеристиками, доказал однозначную разрешимость задачи Трикоми методом интегральных уравнений. В случае общей области, ограниченной при $y > 0$ произвольной кривой Γ из класса Ляпунова и двумя характеристиками уравнения (2), им показана фредгольмовость задачи Трикоми при тех же $a \le -1/2$.

В последние годы жизни В.Ф. Волкодавовым рассмотрены краевые задачи для уравнений смешанного эллиптико – гиперболического типа, для которых линия изменения типа есть их характеристика. В постановках этих задач условие сопряжения на линии изменения типа состоит в склеивании производной по нормали из области эллиптичности с производной дробного порядка или интегралом дробного порядка из области гиперболичности. Первые результаты в данном направлении были опубликованы в статье В.Ф. Волкодавова, О.Ю. Наумова, где решена краевая задача для уравнения

$$V(u) = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & y > 0, \\ u_{xy} = 0, & y < 0, \end{cases}$$

в области Ω, ограниченной гладкой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$, с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, и отрезками прямых AC $(x + +y = 0)$ и CB $(x = 1)$ в полуплоскости $y < 0$, с условиями: $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}), V(u) \equiv 0$ на $\Omega_+ \cup \Omega_-$,

$$u|_\Gamma = \varphi(s),\ s \in [0,l],\ \ u|_{CB} = g(y),\ y \in [-1,0],$$
$$H_+(x) = b(x)H_-(x),\ x \in (0,1),$$

где $\varphi(s)$, $g(y)$, $b(x)$ – заданные функции, l – длина кривой Γ, s – длина дуги кривой Γ, отсчитываемая от точки $B(1,0)$,

$$H_+(x) = \int_0^x (x-t)^{-p}\tau'(t)dt,\ 0 < p < 1,\ \ \tau(x) = u(x,0),\ x \in [0,1],$$
$$H_-(x) = \lim_{y \to -0} \int_{-y}^x (x-t)^{-\lambda} u(x,-t)dt,\ 0 < \lambda < 1,$$
$$\Omega_+ = \Omega \cap y > 0,\ \Omega_- = \Omega \cap y < 0.$$

Краевые задачи с подобными условиями сопряжения изучены в работе Ю.О. Плотниковой для уравнения смешанного типа

$$0 = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - \lambda u, & y > 0, \\ u_{xy} + \lambda u, \quad \lambda = const, & y < 0. \end{cases}$$

Е.А. Баровой изучены краевые задачи с сопряжением производной по нормали с дробной производной для двух классов уравнений смешанного типа

$$Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & y > 0, \\ u_{xy} + q\left[\ln a(x)\right]' u_y = 0,\ q > 0,\ a(x) > 0, & y < 0, \end{cases}$$

и

$$Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + \dfrac{p}{x} u_x = 0,\ 0 < p < 1, & y > 0, \\ u_{xy} + \dfrac{p}{2}\dfrac{1}{x+y}(u_x + u_y) = 0, & y < 0. \end{cases}$$

Интерес к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа возник после известных работ Ф.И.Франкля, в которых впервые обращено внимание на то, что задачи трансзвуковой динамики сводятся к этой задаче. Так, если рассматривать задачу перехода через звуковой барьер установившихся двумерных безвихревых течений идеального газа в соплах, когда сверхзвуковые зоны примыкают к стенкам сопла вблизи минимального сечения, то она сводится к задаче Дирихле для уравнения смешанного типа.

На некорректность задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева: $u_{xx} + +(sgny)u_{yy} = 0$ в смешанной области, гиперболическая часть γ границы которой лежит в характеристическом треугольнике $0 \leq x+y < x-y \leq 1$, впервые обратил внимание А.В Бицадзе. Причем некорректность задачи Дирихле не зависит от малости меры области, заключенный между γ и $y = 0$. Результат А.В Бицадзе с необходимостью поставил вопрос поиска смешанных областей, для которых задача Дирихле является корректно поставленной.

В работах А.П. Солдатова доказаны теоремы существования и единственности решения задач типа Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе в смешанной области, ограниченной при $y > 0$ и $y < 0$ соответственно гладкими дугами с общими концами в точках $(0,0)$ и $(0,1)$, при этом дуга при $y < 0$ лежит внутри характеристического треугольника.

Е.И.Моисеев исследовал нелокальную краевую задачу для вырождающегося эллиптического уравнения

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m > -2, \ 0 < x < 1, \quad y > 0,$$

с данными: $u(0,y) = u(1,y)$, $u_x(0,y) = 0$, $y \geq 0$, $u(x,0) = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, в предположении, что $u(x,y)$ ограничена или стремится к нулю на бесконечности. Методом спектрального анализа доказана теорема единственности и существования решения поставленной задачи.

Сабитов К.Б. исследовал задачу Дирихле для вырождающегося уравнения смешанного типа первого рода

$$(sgn\ y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - b^2 (sgn\ y)|y|^m u = 0\ , \quad m > 0, \quad b \geq 0, \qquad (3)$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)|0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, α, β – заданные действительные числа. Методами спектрального анализа установлен критерий единственности решения, которое построено в виде суммы ряда Фурье.

К.Б. Сабитовым и А.Х. Трегубовой (Сулеймановой) для уравнения смешанного типа второго рода

$$u_{xx} + (sgny)|y|^m u_{yy} - b^2 u = 0, \ 0 < m < 2, \ b = const \geq 0,$$

исследован вопрос о корректности постановки задачи Дирихле в зависимости от показателя степени m вырождения.

М.Е. Лернером и О.А. Репиным для уравнения смешанного типа

$$(sgny)|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m > 0,$$

в области, эллиптическая часть которой есть полуполоса $\{0 < x < 1,\, y > 0\}$, а гиперболическая часть представляет собой характеристический треугольник, рассмотрена краевая задача с двумя нелокальными краевыми условиями $u(0,y) - u(1,y) = \varphi_1(y)$, $u_x(0,y) - u_x(1,y) = \varphi_2(y), \quad y \geq 0$. Доказательство единственности решения поставленной задачи проводится с помощью принципа экстремума, существование – методами интегральных преобразований и уравнений.

В работах Сабитова К.Б. и Сидоренко О.Г. изучена краевая задача с условиями периодичности для уравнения (3) в прямоугольной области D. Методом спектральных разложений установлен критерий единственности решения. При этом решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи.

Целью работы является исследование на корректность нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа с характеристическим вырождением в классической и прямоугольной областях.

Методы исследования. В первой главе широко используются аналитические методы решения дифференциальных уравнений с частными производными: методы Римана, Римана – Адамара и Грина , принцип экстремума, методы теории интегральных уравнений. Во второй главе при доказательстве единственности и существования решения нелокальных задач для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области использован метод спектрального анализа и теория специальных функций.

Научная новизна.

1) Установлены принципы экстремума для уравнений гиперболического и смешанного эллиптико – гиперболического типов.

2) Доказаны теоремы единственности и существования решения краевых задач для уравнений смешанного типа с нелокальным условием сопряжения, содержащим производную дробного порядка.

3) Показано, что корректность постановки краевой задачи с условиями периодичности (нелокальной задачи) для уравнения смешанного типа второго рода (1) в прямоугольной области существенным образом зависит от показателя степени m вырождения. Установлены промежутки изменения параметра m: $0 < m < 1$, $1 \leq m < 2$, в которых нелокальная задача или видоизмененные нелокальные задачи поставлены корректно. При $0 < m < 1$ установлен критерий единственности решения нелокальной задачи, которое построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. Когда $1 \leq m < 2$ доказаны теоремы единственности и существования решения видоизмененных задач. Решения построены в виде суммы рядов и установлены достаточные условия сходимости рядов в соответствующих классах решений уравнения (1).

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и методы исследования представляют научный интерес и могут быть использованы для дальнейшей разработки краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных и уравнений смешанного типа.

Апробация работы. Результаты, приведенные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на областном семинаре по дифференциальным уравнениям под руководством д. ф.-м. н., проф. В.Ф. Волкодавова (г. Самара, СамГПУ, 2004 – 2005 гг.), научных семинарах по теории дифференциальных уравнений под руководством д. ф.-м. н., проф. К.Б. Сабитова (г. Самара, СамГПУ, г. Стерлитамак, СФ АН РБ, 2006 – 2010 гг.), на научном семинаре кафедры "Дифференциальные уравнения" Казанского государственного университета (науч. рук. – д.ф.-м.н., проф. В.И. Жегалов, 2010 г.), а также на следующих научных конференциях: четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи" (29 – 31 мая 2007г., Самара, СамГТУ), международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика И. Н. Векуа "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения" (28 мая – 2 июня 2007г., Новосибирск, НГУ), международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы" (24 – 28 июня 2008г., Стерлитамак, СФ АН РБ), международной конференции, посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего "Современные проблемы математики, механики и их приложений" (30 марта – 02 апреля 2009 г., Москва, МГУ), международном Российско – Абхазском симпозиуме "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики" (17 – 22 мая 2009 г., Нальчик – Эльбрус), международной школе – конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании", посвященной 100 – летию БашГУ (02 – 05 октября 2009 г., Уфа, БашГУ), II - ой всероссийской научно – практической конференции "Интегративный характер современного математического образования", посвященной памяти заслуженного деятеля науки РФ, профессора В.Ф. Волкодавова (26 – 28 октября 2009 г., Самара, ПГСГА).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ, в том числе работы в издании из перечня ВАК [4], [11], список которых приведен в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, разделенных на 6 параграфов, списка литературы. Объем диссертации составляет 106 страниц. Библиография – 92 наименования.

Основное содержание работы

Во **введении** приведен краткий обзор литературы по теме диссертации, излагается краткое содержание работы, сформулированы основные результаты, которые выносятся на защиту.

Первая глава посвящена изучению краевых задач для уравнения смешанного типа

$$L(u)=\begin{cases} u_{xx}+y^m u_{yy}=0, \quad 0<m<1, & y>0,\\ u_{xy}-\frac{q}{x+y}(u_x+u_y)=0, \quad q=\frac{m}{2(2-m)}, & y<0, \end{cases} \tag{4}$$

на множестве $D=D_-\cup D_+$, где $D_-=\{(x,y)|-1<-x<y<0\}$, а D_+ ограничена кусочно-гладкой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y>0$ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$, и отрезком $[0,\,1]$ оси $y=0$.

В § **1.1** для уравнения (4) на множестве D ставится следующая краевая задача с нелокальным интегральным условием сопряжения с данным на характеристике $x=1$ при $-1\le y\le 0$.

Задача V_1**.** На множестве D найти функцию $u\,(x,\,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D_+), u(x,y)\in C^1(D_-), u_{xy}\in C(D_-); \tag{5}$$

$$Lu(x,y)\equiv 0, \quad (x,y)\in D_+\cup D_-; \tag{6}$$

$$u\,(x(s),\,y(s))=\varphi(s), \quad 0\le s\le l; \tag{7}$$

$$u|_{x=1}=\psi(y), \quad -1\leqslant y\leqslant 0; \tag{8}$$

$$\nu_+(x)=-v_-(x), \quad x\in(0,1), \tag{9}$$

где $x=x(s)$, $y=y(s)$ – параметрические уравнения кривой Γ, s – длина дуги кривой Γ, отсчитываемая от точки (1,0) против часовой стрелки, l – длина кривой Γ, $\varphi(s)$, $\psi(y)$ – заданные достаточно гладкие функции, причём $\varphi(0)=\psi(0)$,

$$\nu_+(x)=\lim_{y\to 0+0} u_y(x,y), \quad x\in(0,1),$$

$$v_-(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_x^1 (t-x)^{-r_1} u_1(t,0)\,dt + \int\limits_0^x (x-t)^{-r_2} u_2(x,\,-t)\,dt,\ 0 < r_1,\, r_2 < 1,$$

$u_1(x,\,y)$ – решение задачи Гурса для уравнения (4) в области D_- с данными: $u_1(x,\,0) = \tau(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $u_1(1,\,y) = 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$, $\tau(1) = 0$, а $u_2(x,\,y)$ – решение задачи Гурса для уравнения (4) в области D_- с данными: $u_2(x,\,0) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $u_2(1,\,y) = \psi(y)$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$, $\psi(0) = 0$.

Для доказательства единственности решения поставленной задачи (5) – (9) установлен принцип экстремума в областях гиперболичности D_- и в целом смешанной области D.

Лемма 1. *Пусть* $u\,(x,\,y) \in C\left(\overline{D}_-\right)$ *является решением уравнения (4) в области* D_- *и* $u(1,\,y) \equiv 0$, $-1 \leq y \leq 0$. *Тогда если* $u\,(x,\,0) = \tau\,(x)$, $\tau\,(x) \in C\,[0,\,1] \cap C^1\,(0,\,1)$, $\tau'\,(x) \in L_1[0,1]$, *достигает на сегменте* $[0,\,1]$ *наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке* $\xi \in (0,\,1)$, *то* $v_-\,(\xi) < 0$ ($v_-\,(\xi) > 0$).

Лемма 2. *Пусть функция* $u\,(x,\,y)$ *удовлетворяет условиям (5), (6), (9) и* $u\,(1,\,y) = 0$, $-1 \leq y \leq 0$. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{D_+}} u\,(x,\,y) = u\,(Q) > 0$ ($\min\limits_{\overline{D_+}} u\,(x,\,y) = u\,(Q) < 0$), *то этот максимум (минимум) достигается на кривой* Γ.

Из данных утверждений следует единственность решения задачи V_1.

Доказательство существования решения задачи (5) – (9) для простоты вычислений проводится для случая, когда кривая $\Gamma \equiv \Gamma_0$. В этом случае доказательство существования решения задачи (5) – (9) эквивалентно редуцируется к вопросу разрешимости интегрального уравнения

$$\tau(x) = \int\limits_0^1 \tau(s) K(x,\,s) ds + F(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{10}$$

Лемма 3. *Функция* $K(x,\,s)$ *непрерывна в квадрате* $[0,\,1] \times [0,\,1]$, *кроме линий* $x = 0$, $s = 0$ *и* $s = x$, *и справедлива оценка*

$$|K(x,\,s)| \leqslant \begin{cases} C_1\left[x^{2q-1} + (x+s-2xs)^{2q-1}\right] + C_2 s^{-r_1}, & r_1 < 2q, \\ C_3\left(x^{2q-1} + s^{-r_1}\right)\left|\ln\left|1 - \dfrac{x}{s}\right|\right| + C_4(x+s-2xs)^{2q-1}, & \\ & r_1 = 2q, \\ C_5\left(x^{r_1-1} + s^{-2q}\right)|s-x|^{2q-r_1} + C_6(x+s-2xs)^{2q-1}, & \\ & r_1 > 2q, \end{cases}$$

где C_i – положительные постоянные.

Лемма 4. *Если* $\psi(y) \in C[-1,\, 0] \cap C^1(-1,\, 0)$, $\psi'(y) \in L_1[-1,\, 0]$, $\psi(0) = 0$, $\varphi(x) = [x(1-x)]^{\left(\frac{1}{2}+q\right)(1+\gamma)}\overline{\varphi}(x)$, $\overline{\varphi}(x) \in C[0,\, 1]$, $\gamma > 0$, *то функция* $F(x) \in C[0,\, 1] \cap C^1(0,\, 1)$, $F'(x) \in L_1[0,\, 1]$.

Из лемм 3 и 4 следует, что интегральное уравнение (10) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода со слабой особенностью. Разрешимость полученного уравнения следует из единственности решения задачи (5) – (9). При этом решение уравнения (10) $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^1(0,1)$ и $\tau'(x) \in L_1[0,1]$.

Теорема 1. *Если* $\Gamma \equiv \Gamma_0$, *функции* $\psi(y)$ *и* $\varphi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 4, то существует единственное решение задачи (5) – (9).*

В § **1.2** для уравнения (4) на множестве D изучена краевая задача с сопряжением производной дробного порядка из области гиперболичности с данным на нехарактеристической линии $y = -x$, $0 \le x \le 1$.

Задача V_2**.** На множестве D найти функцию $u\,(x,\, y)$, удовлетворяющую условиям (5), (6), (7) и

$$\nu_+(x) = v_-(x), \quad x \in (0,1), \tag{11}$$

$$\lim_{y \to -x+0} (x+y)^{-q} u(x,\, y) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{12}$$

где

$$v_-(x) = \frac{d}{dx} \int\limits_0^x (x-t)^{-r} u(t,\, 0)\, dt, \quad 0 < r < 1.$$

Исследование задачи V_2 проводится аналогично §1.1. Здесь в качестве вспомогательной задачи в области D_- используется задача типа Дарбу с данными (5), (6), (12) и с условием $u(x,0) = \tau(x), 0 \le x \le l$, где $\tau(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, $\tau(0) = 0$.

Единственность решения задачи V_2 доказана на основании принципа экстремума, а существование сведено к однозначной разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Теорема 2. *Если* $\Gamma \equiv \Gamma_0$, *функция* $\varphi(x) = \overline{\varphi}(x)[x(1-x)]^{(\frac{1}{2}+q)(1+\gamma)}$, $\overline{\varphi}(x) \in C[0,\, 1]$, $\gamma > 0$, $r < q$, *то существует единственное решение задачи (5), (6), (7), (11), (12).*

В **главе 2** для уравнения смешанного типа второго рода

$$u_{xx} + (sgny)|y|^m u_{yy} = 0, \ \ 0 < m < 2, \tag{13}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\,0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$ в зависимости от значений параметра m установлены классы корректности следующих задач.

Задача 2.1. *Пусть* $0 < m < 1$. *Найти в области* D *функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям*:

$$u(x,y) \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2\left(D_+ \cup D_-\right); \tag{14}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \ (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{15}$$

$$u(0,y) = u(1,y), \ u_x(0,y) = u_x(1,y), \ -\alpha \le y \le \beta; \tag{16}$$

$$u(x,\beta) = f(x), \ u(x,-\alpha) = g(x), \ 0 \le x \le 1, \tag{17}$$

где $f(x)$, $g(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции, причем* $f(0) = f(1)$, $g(0) = g(1)$, $f'(0) = f'(1)$, $g'(0) = g'(1)$.

Задача 2.3.1. Пусть $1 \le m < 2$. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (14) – (16) и

$$u(x,\beta) = f(x), \ 0 \le x \le 1. \tag{18}$$

Задача 2.3.2. Пусть $1 \le m < 2$. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (14) – (16) и

$$u_y(x,\beta) = \varphi(x), \ 0 \le x \le 1, \tag{19}$$

где $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Задача 2.4.1. Пусть $1 < m < 2$. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (15) – (17) и

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{20}$$

$$\lim_{y \to 0+0} y^{m-1} u_y(x,y) = -\lim_{y \to 0-0} (-y)^{m-1} u_y(x,y), \quad m > 1, \ \ 0 \le x \le 1; \tag{21}$$

Задача 2.4.2. Пусть $m = 1$. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (15) – (17), (20) и

$$\lim_{y \to 0+0} \frac{u_y(x,y)}{\ln y} = -\lim_{y \to 0-0} \frac{u_y(x,y)}{\ln(-y)}, \quad m = 1, \ \ 0 \le x \le 1. \tag{22}$$

При построении решении этих задач применяется система собственных функций одномерной спектральной задачи:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ 0 < x < 1,$$

$$X(0)=X(1),\ X'(0)=X'(1),$$

которая имеет вид:

$$X_k(x):1,\sqrt{2}\cos\lambda_k x,\sqrt{2}\sin\lambda_k x, \tag{23}$$

здесь $X_0(x)=1$, $\lambda=\lambda_k^2=(2\pi k)^2$, $k=1,2,\ldots$. Система собственных функций (23) ортонормирована, полна и образует базис в пространстве $L_2[0,1]$.

Используя систему (23), решение задачи (14) – (17) построено в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,y)=u_0(y)+\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}u_k(y)\cos\lambda_k x+\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}v_k(y)\sin\lambda_k x, \tag{24}$$

где функции $u_0(y)$, $u_k(y)$, $v_k(y)$ определены соответственно по формулам:

$$u_0(y)=\frac{f_0-g_0}{\alpha+\beta}y+\frac{\alpha f_0+\beta g_0}{\alpha+\beta},\ -\alpha\le y\le\beta, \tag{25}$$

$$u_k(y)=\begin{cases}\dfrac{f_k\sqrt{\alpha y}\delta_k(\alpha,y)+g_k\sqrt{\beta y}E_k(y,\beta)}{\delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y>0,\\ \dfrac{f_k\sqrt{-\alpha y}F_k(\alpha,-y)+g_k\sqrt{-\beta y}\delta_k(-y,\beta)}{\delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y<0,\end{cases} \tag{26}$$

$$v_k(y)=\begin{cases}\dfrac{\widetilde{f}_k\sqrt{\alpha y}\delta_k(\alpha,y)+\widetilde{g}_k\sqrt{\beta y}E_k(y,\beta)}{\delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y>0,\\ \dfrac{\widetilde{f}_k\sqrt{-\alpha y}F_k(\alpha,-y)+\widetilde{g}_k\sqrt{-\beta y}\delta_k(-y,\beta)}{\delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y<0,\end{cases} \tag{27}$$

где

$$\delta_k(\alpha,y)=J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right)K_{\frac{1}{2q}}\left(p_k y^q\right)+\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right)I_{\frac{1}{2q}}\left(p_k y^q\right),$$

$$E_k(y,\beta)=I_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\beta^q\right)K_{\frac{1}{2q}}\left(p_k y^q\right)-I_{\frac{1}{2q}}\left(p_k y^q\right)K_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\beta^q\right),$$

$$F_k(\alpha,-y)=\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right)J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-y)^q\right)-\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-y)^q\right)J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right),$$

$$\delta_k(-y,\beta)=J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-y)^q\right)K_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\beta^q\right)+\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-y)^q\right)I_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\beta^q\right),$$

$$\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-y)^q\right)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2q}}\left(J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-y)^q\right)+J_{-\frac{1}{2q}}\left(p_k(-y)^q\right)\right),$$

f_k и g_k – коэффициенты разложения функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно по системе $\{\sqrt{2}\cos\lambda_k x\}$, f_0 и g_0 – коэффициенты разложения функций f_k и g_k по системе $\{1\}$, а $\widetilde{f}_k$, и $\widetilde{g}_k$ – коэффициенты ряда Фурье функций f_k и g_k по системе $\{\sqrt{2}\sin\lambda_k x\}$, $I_{\frac{1}{2q}}(z)$ и $K_{\frac{1}{2q}}(z)$ – модифицированные функции

Бесселя соответственно первого и третьего рода, $J_{\frac{1}{2q}}(z)$ – функция Бесселя первого рода.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. *Если существует решение задачи (14) – (17), то оно единственно тогда и только тогда, когда при всех* $k \in N$

$$\delta_k(\alpha,\beta) = J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right) K_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\beta^q\right) + \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right) I_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\beta^q\right) \neq 0. \qquad (28)$$

Если при некоторых α, β и $k = l$ нарушено условие (28), т. е. $\delta_l(\alpha,\beta) = 0$, то однородная задача (14) – (17) (где $f(x) = g(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_l(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\delta_l(\alpha,y)}{J_{\frac{1}{2q}}(p_l\alpha^q)}\sqrt{y}X_l(x), & y > 0, \\ \dfrac{\delta_l(-y,\beta)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_l\beta^q)}\sqrt{-y}X_l(x), & y < 0, \end{cases}$$

где $X_l(x) = C_1\cos\lambda_l kx + C_2\sin\lambda_l x + C_3$, C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

При доказательстве единственности решения задачи (14) – (17) используется только полнота системы функций (23) в пространстве $L_2[0,1]$. Отметим, что ранее такой метод применялся в работах В.А. Ильина при доказательстве единственности решения первой начально-граничной задачи для уравнений гиперболического типа в цилиндрической области.

Лемма 5. *Если выполнено одно из следующих условий: 1)* $\alpha_q = \alpha^q/q$ *– любое натуральное число; 2)* $\alpha_q = n/m$ *– любое дробное число, где* n *и* m *– взаимно–простые натуральные числа и* $m \neq 4$*, то существует постоянная* $C_0 > 0$ *такая, что при любом фиксированном* $\beta > 0$ *и больших* k *справедлива оценка*

$$|\sqrt{k}\gamma_k(\alpha,\beta)| \geq C_0 > 0, \qquad (29)$$

где $\gamma_k(\alpha,\beta) = \delta_k(\alpha,\beta)/I_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\beta^q\right)$.

Теорема 4. *Если функции* $f(x)$, $g(x) \in C^2[0,1]$ *и на этом сегменте имеют кусочно-непрерывную производную третьего порядка ,* $f(0) = f(1)$, $f'(0) = f'(1)$, $f''(0) = f''(1)$, $g(0) = g(1)$, $g'(0) = g'(1)$, $g''(0) = g''(1)$*, выполнены условия (28), (29), то существует единственное решение задачи (14) – (17), и оно представимо в виде суммы ряда (24), где* $u_0(y)$, $u_k(y)$, $v_k(y)$ *определены соответственно формулами (25) – (27).*

Решение нелокальной задачи (14) – (16), (18) построено в виде суммы ряда (24), где

$$u_0(y) = a_0(y-\beta) + f_0,\ a_0 - \text{произвольная постоянная}\ , \qquad (30)$$

$$u_k(y)=\begin{cases}\dfrac{f_k\sqrt{y}}{\sqrt{\beta}I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)}I_{\frac{1}{2q}}(p_ky^q), & y>0,\\ -\dfrac{f_k\sqrt{-y}}{\sqrt{\beta}I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)}J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q), & y<0,\end{cases} \tag{31}$$

$$v_k(y)=\begin{cases}\dfrac{\widetilde{f}_k\sqrt{y}}{\sqrt{\beta}I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)}I_{\frac{1}{2q}}(p_ky^q), & y>0,\\ -\dfrac{\widetilde{f}_k\sqrt{-y}}{\sqrt{\beta}I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)}J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q), & y<0.\end{cases} \tag{32}$$

Теорема 5. *Если существует решение задачи 2.3.1, то оно единственно с точностью до слагаемого линейной функции по переменной* y.

Теорема 6. *Если* $f(x)\in C^2[0,1]$ *и на этом сегменте имеет кусочно – непрерывную производную третьего порядка, выполнены условия* $f(0)=f(1)$, $f^{'}(0)=f^{'}(1)$, $f^{''}(0)=f^{''}(1)$, *то существует решение задачи (14) – (16), (18), которое определяется рядом (24) с точностью до слагаемого линейной функции по переменной* y. *Коэффициенты этого ряда находятся по формулам (30) – (32).*

В задаче 2.3.2 решение также определяется в виде суммы ряда (24), в котором

$$u_0(y)=\varphi_0 y+b_0,\ b_0 - \text{произвольная постоянная}, \tag{33}$$

$$u_k(y)=\begin{cases}\dfrac{f_k\sqrt{y}}{p_kq\beta^{q-\frac{1}{2}}I_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\beta^q)}I_{\frac{1}{2q}}(p_ky^q), & y>0,\\ -\dfrac{f_k\sqrt{-y}}{p_kq\beta^{q-\frac{1}{2}}I_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\beta^q)}J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q), & y<0,\end{cases} \tag{34}$$

$$v_k(y)=\begin{cases}\dfrac{\widetilde{f}_k\sqrt{y}}{p_kq\beta^{q-\frac{1}{2}}I_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\beta^q)}I_{\frac{1}{2q}}(p_ky^q), & y>0,\\ -\dfrac{\widetilde{f}_k\sqrt{-y}}{p_kq\beta^{q-\frac{1}{2}}I_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\beta^q)}J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q), & y<0.\end{cases} \tag{35}$$

Теорема 7. *Если существует решение задачи (14) – (16)* и (19), *то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.*

Теорема 8. *Если функция* $\varphi(x)\in C^2[0,1]$, $\varphi(0)=\varphi(1)$, $\varphi^{'}(0)=\varphi^{'}(1)$, *то существует решение задачи (14) – (16) и (19), которое определяется рядом (24) с точностью до постоянного слагаемого. Коэффициенты ряда (24) находятся по формулам (33) – (35).*

В случае задач 2.4.1 и 2.4.2 установлены необходимые и достаточные условия единственности решения с точностью до слагаемого линейной функции. Решения этих задач построены в виде суммы ряда (24), у которого коэффициенты определяются по формулам

$$u_k(y) = \begin{cases} \dfrac{f_k\sqrt{y}\ I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q)}{\sqrt{\beta} I_{\frac{1}{2q}}(p_k \beta^q)}, & y > 0, \\ \dfrac{g_k\sqrt{(-y)}\ J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)}{J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\sqrt{\alpha}} & y < 0\ , \end{cases} \tag{36}$$

$$v_k(y) = \begin{cases} \dfrac{\widetilde{f}_k\sqrt{y}\ I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q)}{\sqrt{\beta} I_{\frac{1}{2q}}(p_k \beta^q)}, & y > 0, \\ \dfrac{\widetilde{g}_k\sqrt{(-y)}\ J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)}{J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\sqrt{\alpha}} & y < 0\ , \end{cases} \tag{37}$$

$$u_0(y) = \begin{cases} \dfrac{f_0 - b_0}{\beta} y + b_0, & y > 0, \\ \dfrac{b_0 - g_0}{\alpha} y + b_0, & y < 0\ , \end{cases} \tag{38}$$

где b_0 – произвольная постоянная.

Установлена справедливость следующих утверждений.

Теорема 9. *Если существуют решения задач (15) – (17), (20), (21) и (15) – (17), (20), (22), то они единственны с точностью до слагаемого линейной функции по переменной y только тогда, когда при всех $k \in N$*

$$\mu_k(\alpha) = J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) \neq 0 \tag{39}$$

Лемма 6. *Существуют положительные числа α и $m \in [1, 2)$, и постоянная $C_0 > 0$ такие, что при больших k справедлива оценка*

$$|\sqrt{k}\mu_k(\alpha)| \geq C_0 > 0. \tag{40}$$

Теорема 10. *Пусть $f(x) \in C^3[0,1]$, $g(x) \in C^3[0,1]$, $f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1)$, $g^{(i)}(0) = g^{(i)}(1)$, $i = \overline{0,2}$ и выполнены условия (39), (40). Тогда задачи (15) – (17), (20), (21) и (15) – (17), (20), (22) разрешимы и решения определяются рядом (24) с точностью до слагаемого линейной функции по переменной y, где коэффициенты $u_k(y)$, $v_k(y)$, $u_0(y)$ этого ряда находятся соответственно по формулам (36) – (38).*

Таким образом, на защиту выносятся следующие результаты:

1) Принципы экстремума для уравнений гиперболического и смешанного эллиптико – гиперболического типов.

2) Теоремы единственности и существования решения краевых задач с нелокальным интегральным условием сопряжения для уравнений смешанного типа с характеристической линией изменения типа в классической области.

3) Классы корректности краевых задач с условиями периодичности для уравнения смешанного типа второго рода (13) в прямоугольной области. В каждом из этих классов в зависимости от параметра m установлены теоремы единственности и решения задач построено в виде суммы ряда по собственным функциям одномерной спектральной задачи с соответствующим обоснованием сходимости рядов в указанных классах решений данного уравнения.

Автор выражает глубокую благодарность научным руководителям: д. ф.– м. н., проф. $\boxed{\text{Виктору Филипповичу Волкодавову}}$; проф., д. ф.– м. н. Камилю Басировичу Сабитову за постановку задач, ценные советы, постоянное внимание к работе и помощь при выполнении данной работы.

Публикации по теме диссертации

1. *Егорова, И. П.* Единственность краевой задачи для уравнения смешанного типа со специальным условием сопряжения / И.П. Егорова, Н.А. Куликова // Тезисы докладов международной конференции "Дифференц. уравнения, теория функций и приложения" , посвященной 100 – летию со дня рождения академика И.Н. Векуа (Новосибирск, 28 мая – 2 июня 2007 г.). Новосибирск. НГУ. – 2007. – С. 144 – 145.

2. *Егорова, И. П.* Краевая задача для уравнения смешанного типа с условием сопряжения, содержащим производные и интегралы дробного порядка / И.П. Егорова, Н.А. Куликова // Математическое моделирование и краевые задачи : Труды IV Всерос. научн. конф. с междунар. участием. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. СамГТУ. – Самара, 2007. – С. 82 – 83.

3. *Егорова, И. П.* Задача Дарбу для уравнения Эйлера-Дарбу с равными отрицательными параметрами / И.П. Егорова // Труды международной конференции "Дифферен. уравнения и смежные проблемы" , посвященной юбилеям академиков В.А. Ильина и Е.И. Моисеева (24–28 июня 2008 г., г. Стерлитамак). – Уфа : Гилем, 2008. – Т. II. – С. 94 – 99.

4. *Егорова, И. П.* Задача типа Трикоми с нелокальным условием сопряжения для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением / И.П. Егорова // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2008. – №2(61). – С. 69–76.

5. *Егорова, И. П.* Задача с нелокальным условием сопряжения для уравнения смешанного типа второго рода / И.П. Егорова // Материалы

международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений",посвященной 70–летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего (30 марта – 02 апреля 2009 г.). Москва: МГУ, 2009. – С.142.

6. *Егорова, И. П.* Построение решения нелокальной задачи для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области / И.П. Егорова // Материалы международного Российско-Абхазского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики" и VII Школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". – Нальчик – Эльбрус, 2009. – С. 276 – 277.

7. *Егорова, И. П.* Задача с нелокальным интегральным условием сопряжения для уравнения смешанного типа второго рода / И.П. Егорова // Труды Стерлитамакского филиала Академии наук Республики Башкортостан. Серия "Физико – математические и технические науки".– Уфа: Гилем. – 2009.– Выпуск 6. – С. 29 – 38.

8. *Егорова, И. П.* Нелокальная задача для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области / И.П. Егорова // Тезисы докладов международной школы-конференции "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании", посвященной 100 – летию БашГУ. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2009. – С.14.

9. *Егорова, И. П.* Нелокальная задача для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области / И.П. Егорова // Труды докладов международной школы-конференции "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании", посвященной 100 – летию БашГУ. – Уфа: РИЦ БашГУ. Математика. Т.I. – 2009. – С.146 – 154.

10. *Егорова, И. П.* Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением / И.П. Егорова // Материалы II-ой всероссийской научно – практической конференции "Интегративный характер современного математического образования", посвященной памяти заслуженного деятеля науки РФ, профессора В.Ф. Волкодавова (26 – 28 октября 2009 года). – Самара: ПГСГА, 2009. – С. 10 – 16.

11. *Егорова, И. П.* Задача с условиями периодичности для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением / И.П. Егорова // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2009. – №8(74). – С. 15 – 27.

Подписано в печать 04.05.2010.
Тираж 100 экз. Заказ №   .
Бумага ксероксная. Печать оперативная.
Объем – 1.0 усл. п. л. Формат $60 \times 84/16$.

Отпечатано в типографии
ООО «Инсома – пресс»
ул. Сов. Армии, 217; тел.: 926 – 07 – 51

.