На правах рукописи

Кечина Ольга Михайловна

Нелокальные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений в прямоугольных областях

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2010

Работа выполнена на кафедре математического анализа
Поволжской государственной социально-гуманитарной академии

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Пулькина Людмила Степановна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Мухлисов Фоат Габдуллович

доктор физико-математических наук,
профессор
Репин Олег Александрович

Ведущая организация: Южно-Уральский государственный
университет

Защита состоится 11 марта 2010 г. в 17 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора М.Т. Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан "..." февраля 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук,
доцент Липачев Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Современные проблемы естествознания приводят к необходимости постановки и исследования качественно новых задач, ярким примером которых является класс нелокальных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Исследование таких задач вызвано как теоретическим интересом, так и практической необходимостью. Это связано с тем, что математическими моделями различных физических, химических, биологических, экологических процессов часто являются задачи, в которых вместо классических краевых условий задаётся определённая связь значений искомой функции (или её производных) на границе области и в её внутренних точках. Например, ещё в 1896 г. В.А. Стекловым было показано, что математическое моделирование процессов охлаждения тел конечных размеров приводит к задаче нахождения решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющего нелокальным условиям, представляющим собой линейную комбинацию значений искомого решения и его производных в различных точках границы.

Большой вклад в развитие теории нелокальных задач для дифференциальных уравнений различных классов внесли работы А.А. Дезина, В.А. Ильина, Е.И. Моисеева, А.К. Гущина, В.И. Жегалова, А.Л. Скубачевского, А.М. Нахушева, Н.И. Ионкина, Л.С. Пулькиной, О.А. Репина и других авторов.

Среди нелокальных задач можно выделить класс задач с интегральными условиями. Появление интегральных условий связано с тем, что при изучении некоторых физических процессов границы областей их протекания могут оказаться недоступными для непосредственных измерений, но известно среднее значение искомых величин. Условия такого вида могут появиться при математическом моделировании явлений, связанных с физикой плазмы, распространением тепла, процессом влагопереноса в капиллярно-пористых средах, вопросами демографии и математической биологии. Нелокальные интегральные условия можно считать обобщением дискретных нелокальных условий или условий локального сдвига.

Первыми публикациями, посвященными исследованию задач с интегральными условиями для уравнений с частными производными, можно считать работу Дж. Кэннона "The solution of the heat equation subject to the specification of energy", опубликованную в 1963 году, и работу Л.И. Камынина "Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями", опубликованную в 1964 году.

Исследования задач с интегральными условиями для параболических уравнений были продолжены в работах Л.А. Муравья и А.В. Филиновского, Н.И. Юрчука, Н.И. Ионкина, А. Бузиани и других авторов. Значительные результаты, относящиеся к нелокальным задачам с интегральными условиями для эллиптических уравнений, получены А.К. Гущиным, В.П. Михайловым, А.Л. Скубачевским. Задачи с интегральными условиями для уравнений гиперболического типа начали исследовать позже, и вопрос об их постановке и разрешимости в настоящее время менее изучен. Среди них можно выделить два класса задач: задача Гурса в интегральной постановке, в которой нелокальные условия заданы в виде интегралов вдоль характеристик, и смешанные задачи, граничные или начальные условия в которых заменены интегралами от искомого решения.

Исследования показали, что присутствие нелокальных условий вызывает ряд специфических трудностей, которые не позволяют использовать для исследования разрешимости нелокальных задач стандартные методы. Поэтому вопрос разработки методов исследования нелокальных задач является весьма актуальным.

Если нелокальное условие содержит только интегральный оператор, то такие условия принято называть интегральными условиями первого рода. Если же нелокальное условие помимо интегрального оператора содержит значение искомого решения или его производных на границе области исследования, то условия такого вида будем называть интегральными условиями второго рода.

В процессе изучения нелокальных задач выявлена их тесная связь с нагруженными уравнениями. В ряде работ А.М. Нахушева и его учеников рассмотрены примеры сведения задач с нелокальными условиями к нагруженным дифференциальным и интегродифференциальным уравнениям, которые описывают многие физические процессы. Также нелокальные задачи с интегральными условиями связаны с обратными задачами, которые возникают в различных областях человеческой деятельности. Обратные задачи с интегральным условием переопределения для параболических уравнений были исследованы в работах В.Л. Камынина, А.И. Прилепко, Д.С. Ткаченко, Н.И. Иванчова, А.И. Кожанова.

Таким образом, актуальность темы представленной диссертационной работы обусловлена как теоретической, так и практической значимостью рассматриваемых задач.

Цель работы. Основной целью диссертационной работы является постановка и исследование качественно новых нелокальных задач с интегральными условиями для гиперболических уравнений второго порядка в прямоугольных областях, а также разработка эффективных методов доказательства разрешимости различных видов нелокальных краевых задач.

Методы исследования. В работе используется аппарат теории дифференциальных уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений, методы функционального анализа, аппарат интегральных уравнений, методы априорных оценок.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Доказано существование единственного классического решения интегральной задачи Гурса для гиперболического уравнения в характеристическом прямоугольнике.

2. Доказано существование единственного классического решения интегральной задачи Гурса для гиперболического уравнения в характеристическом прямоугольнике в случае, когда интегральные условия заданы в части области.

3. Предложен эффективный метод, с помощью которого доказана однозначная разрешимость смешанной задачи с нелокальными интегральными условиями второго рода для уравнения колебаний струны при условии, что стороны области связаны соотношением $T \leq l$.

4. Доказана однозначная разрешимость смешанной задачи с нелокальными интегральными условиями первого рода

$$\int\limits_0^l K_i(x,t)u(x,t)dx = s_i(t), \quad (i = 1, 2)$$

для уравнения колебаний струны при условии, что стороны области связаны соотношением $T \leq l$.

5. Разработан метод, применяя который удалось снять ограничения на область и доказать однозначную разрешимость

смешанной задачи с нелокальными интегральными условиями первого рода

$$\int_0^l K_i(x)u(x,t)dx = s_i(t), \quad (i = 1, 2)$$

для уравнения колебаний струны.

6. Доказана однозначная разрешимость смешанной задачи с интегральным условием, заданным в части области.

Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшей разработки общей теории краевых задач с нелокальными интегральными условиями.

Апробация работы. Результаты, приведенные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на научных семинарах и конференциях:

- СамДиф–2007: конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения". 29 января — 2 февраля 2007 г. Самарский государственный университет, г. Самара.
- "Математическое моделирование и краевые задачи". Четвёртая Всероссийская научная конференция с международным участием. 29 — 31 мая 2007 г. Самарский государственный технический университет, г. Самара.
- "Интегративный характер современного математического образования". Всероссийская научно-практическая конференция. 24 — 27 сентября 2007 г. Самарский государственный педагогический университет, г. Самара.
- "Лобачевские чтения – 2007". Шестая молодёжная научная школа–конференция. 16 — 19 декабря 2007 г., Казанский государственный университет, г. Казань.
- "Герценовские чтения – 2008". Научная конференция. 14 — 19 апреля 2008 г., Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, г. Санкт-Петербург.
- "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы". Международная научная конференция. 24 — 28 июня 2008 г., г. Стерлитамак.
- "Лобачевские чтения – 2008". Седьмая молодёжная научная школа–конференция. 1 — 3 декабря 2008 г., Казанский государственный университет, г. Казань.

- "Герценовские чтения – 2009". Научная конференция. 13 — 18 апреля 2009 г., Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, г. Санкт-Петербург.
- СамДиф–2009: конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения". 29 июня — 2 июля 2009 г., Самарский государственный университет, г. Самара.
- "Интегративный характер современного математического образования". Вторая всероссийская научно-практическая конференция. 26 — 28 октября 2009 г. Поволжская государственная социально-гуманитарная академия, г. Самара.
- "Лобачевские чтения – 2009". Восьмая молодёжная научная школа–конференция. 1 — 6 ноября 2009 г., Казанский государственный университет, г. Казань.
- Научный семинар кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета (научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор В.И. Жегалов), 21 октября 2009 г., г. Казань.

Публикации. Автором опубликовано тринадцать работ по теме диссертации, в том числе две работы из перечня ВАК ([8], [13]), которые отражают её основные результаты. Список публикаций приведён в конце автореферата. Работы [6] и [8] выполнены в соавторстве с научным руководителем Л.С. Пулькиной, и полученные в них результаты принадлежат авторам в равной мере.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы из 95 наименований, включая работы автора. Объём диссертации составляет 101 страницу машинописного текста.

Основное содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, проводится обзор результатов исследований по её тематике, определена степень разработанности проблемы, приведено краткое содержание работы.

Первая глава посвящена исследованию задачи Гурса в интегральной постановке для одного гиперболического уравнения.

В первом параграфе исследуется задача для уравнения

$$Lu \equiv u_{xy} + (A(x,y)u)_x + (B(x,y)u)_y + C(x,y)u = f(x,y) \qquad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y):\ 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$ с условиями

$$\int\limits_0^a K(x, y)u(x, y)dx = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq b, \tag{2}$$

$$\int\limits_0^b K(x, y)u(x, y)dy = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq a. \tag{3}$$

Заметим, что в случае $K(x, y) \equiv 1$ разрешимость задачи (1)–(2)–(3) ранее была доказана при выполнении условий:

$$A_y(x, y) \geq 0, \quad B_x(x, y) \geq 0, \quad C_{xy}(x, y) \geq 0,$$

$$A_y(x, y)B_x(x, y) - C^2(x, y) \geq 0.$$

Основной целью исследования этой задачи в данной работе было ослабить условия на коэффициенты, обеспечивающие единственность решения задачи. Это удалось сделать с помощью введения в интегральные условия функции $K(x, y)$.

Под классическим решением уравнения (1) будем понимать функцию $u(x, y) \in C^1(\bar{D}), u_{xy} \in C(D)$.

Основным результатом первого параграфа является утверждение:

Теорема 3. Пусть выполняются условия

$$A(x, y), B(x, y), C(x, y) \in C^1(\bar{D}), C_{xy} \in C(\bar{D}), f(x, y) \in C(\bar{D}),$$

$$\varphi(x) \in C[0, a] \cap C^2(0, a), \psi(y) \in C[0, b] \cap C^2(0, b),$$

$$\int\limits_0^a \varphi(x)dx = \int\limits_0^b \psi(y)dy,$$

$$K(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^4(D), K(x, y) \neq 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(A(x, y) - \frac{K_y(x, y)}{K(x, y)}\right) \geq 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(B(x, y) - \frac{K_x(x, y)}{K(x, y)}\right) \geq 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{K_{xy}(x, y) - A(x, y)K_x(x, y) - B(x, y)K_y(x, y)}{K(x, y)} + C(x, y)\right) \geq 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(A(x, y) - \frac{K_y(x, y)}{K(x, y)}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(B(x, y) - \frac{K_x(x, y)}{K(x, y)}\right) -$$

$$-\left(\frac{K_{xy}(x,y)-A(x,y)K_x(x,y)-B(x,y)K_y(x,y)}{K(x,y)}+C(x,y)\right)^2\geq 0.$$

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1)–(2)–(3).

Доказательство разрешимости задачи проведено по следующей схеме:

1. Показано, что поставленная задача эквивалентна задаче относительно новой неизвестной функции $v(x,y)$, связанной с $u(x,y)$ соотношением

$$v(x,y)=K(x,y)u(x,y),$$

удовлетворяющей уравнению

$$v_{xy}+(\bar{A}(x,y)v)_x+(\bar{B}(x,y)v)_y+\bar{C}(x,y)v=\bar{f}(x,y), \tag{4}$$

и условиям

$$\int\limits_0^a v(x,y)dx=\psi(y),\quad 0\leq y\leq b, \tag{5}$$

$$\int\limits_0^b v(x,y)dy=\varphi(x),\quad 0\leq x\leq a. \tag{6}$$

2. Показано, что задача относительно функции $v(x,y)$ однозначно разрешима в нужном классе функций.

3. Доказана теорема 3.

При доказательстве существования решения задача (4)–(5)–(6) эквивалентным образом сводится к нагруженному интегральному уравнению относительно $v(x,y)$, которое в свою очередь сводится к уравнению Вольтерра второго рода. Доказанная единственность решения задачи при этом играет существенную роль. Ядро и правая часть полученного уравнения Вольтерра непрерывны в рассматриваемой области, что позволяет сделать вывод о существовании его решения, и, как следствие, о существовании решения исходной задачи.

Во втором параграфе изучается разрешимость нелокальной задачи для уравнения (1) в области D с нелокальными условиями, заданными внутри характеристического прямоугольника: найти функцию $u(x,y)\in C^1(\bar{D})$, $u_{xy}\in C(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям

$$\int_0^\alpha u(x,y)dx = \psi(y), \quad 0 < \alpha < a, \quad 0 \le y \le b, \tag{7}$$

$$\int_0^\beta u(x,y)dy = \varphi(x), \quad 0 < \beta < b, \quad 0 \le x \le a. \tag{8}$$

Доказана теорема:

Теорема 4. Пусть выполняются условия

$$A(x,y), B(x,y), C(x,y) \in C^1(\bar{D}), \quad C_{xy} \in C(\bar{D}), \quad f(x,y) \in C(\bar{D}),$$

$$\varphi(x) \in C[0,a] \cap C^2(0,a), \quad \psi(y) \in C[0,b] \cap C^2(0,b),$$

$$A_y(x,y) \ge 0, \quad B_x(x,y) \ge 0, \quad C_{xy}(x,y) \ge 0,$$

$$A_y(x,y)B_x(x,y) - C^2(x,y) \ge 0,$$

$$A(x,\beta) \ge 0, \quad B(\alpha,y) \ge 0, \quad C_x(x,\beta) \ge 0, \quad C_y(\alpha,y) \ge 0.$$

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1), (7), (8).

Для доказательства разрешимости задачи расссматриваются вспомогательные задачи в областях D_i, $i = 0,1,2,3$, где

$$D_0 = \{(x,y) : 0 < x < \alpha, 0 < y < \beta\},$$

$$D_1 = \{(x,y) : \alpha < x < a, 0 < y < \beta\},$$

$$D_2 = \{(x,y) : 0 < x < \alpha, \beta < y < b\},$$

$$D_3 = \{(x,y) : \alpha < x < a, \beta < y < b\},$$

$$J_1 = \{(x,y) : x = \alpha, 0 < y < b\},$$

$$J_2 = \{(x,y) : y = \beta, 0 < x < a\},$$

и затем они "склеиваются" по отрезкам прямых $x = \alpha$, $y = \beta$.

Доказана принадлежность решения классу: $u(x,y) \in C^1(\bar{D})$, $u_{xy} \in C(D)$.

Во второй главе исследуется разрешимость смешанных задач для уравнения колебаний струны с интегральными условиями. В зависимости от вида нелокальных условий применяются различные модификации метода вспомогательных задач.

В первом параграфе второй главы рассматривается вопрос об однозначной разрешимости задачи для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{9}$$

в прямоугольной области $\Omega = \{(x,t):\ 0 < x < l, 0 < t < T\}$ с начальными данными

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \tag{10}$$

и нелокальными условиями

$$u(0,t) - \int\limits_0^l K_1(x,t)u(x,t)dx = s_1(t), \tag{11}$$

$$u(l,t) - \int\limits_0^l K_2(x,t)u(x,t)dx = s_2(t). \tag{12}$$

Под классическим решением этой задачи будем понимать функцию $u(x,t) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую в Ω уравнению (9) и условиям (10) — (12).

Условия типа (11) и (12) принято называть интегральными условиями второго рода.

Основным результатом этого параграфа является теорема:

Теорема 5. Если $K_i(x,t) \in C^2(\bar{\Omega})$, $s_i(t) \in C^2[0,T]$,$(i = 1,2)$, то существует единственное решение задачи (9)–(12) в Ω при $T \le l$.

Для доказательства разрешимости задачи применён метод вспомогательных задач: к решению вспомогательной задачи применяются нелокальные условия, что приводит к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Из разрешимости этой системы следует разрешимость поставленной задачи в силу доказанной в работе эквивалентности.

Во втором параграфе рассмотрена нелокальная задача с интегральными условиями первого рода, то есть содержащими только интегральный оператор:

$$\int\limits_0^l K_i(x,t)u(x,t)dx = s_i(t) \quad (i = 1,2). \tag{13}$$

Под классическим решением задачи будем также понимать функцию $u(x,t) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую в Ω уравнению (9) и условиям (10), (13).

Доказана теорема существования единственного решения задачи:

Теорема 6. Если $K_i(x,t) \in C^2(\bar{\Omega})$, $s_i(t) \in C^2[0,T]$, $(\ i\ =\ 1,\ 2\ )$, $T \leq l$, $K_1(0,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_2(0,t) \neq 0$, то существует единственное классическое решение задачи (9), (10), (13).

При доказательстве существования единственного решения нелокальной задачи с интегральными условиями первого рода, применеяя к решению вспомогательной задачи интегральные условия, получаем систему интегральных уравнений Вольтерра первого рода, которую в даннном случае оказалось возможным свести к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Из разрешимости последней следует разрешимость поставленной задачи.

В третьем параграфе второй главы в прямоугольной области $\Omega = \{(x,t) :\ 0 < x < l, 0 < t < T\}$ исследуется задача для уравнения (9) с начальными данными Коши (10) и с интегральными условиями

$$\int\limits_0^l K_i(x)u(x,t)dx = s_i(t), \quad (i = 1,2), \tag{14}$$

и снимается ограничение на область. Доказано следующее утверждение:

Теорема 7. Если $K_i(x) \in C^2[0,l]$, $s_i(t) \in C^2[0,T]$, $(i = 1,2)$, $K_1'(x)K_2(x) - K_2'(x)K_1(x) > 0$, $K_1(l)K_2(0) - K_2(l)K_1(0) \neq 0$, то существует единственное классическое решение задачи (9), (10), (14).

При доказательстве однозначной разрешимости задачи интегральные условия (14) сводятся к условиям другого вида. Решив вспомогательную задачу, в результате применения нелокальных условий получаем систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Из альтернативы Фредгольма следует, что решение системы интегральных уравнений существует, следовательно, существует и решение поставленной нелокальной задачи.

Существенным в постановке задачи четвёртого параграфа второй главы является задание интегрального условия только в части области.

Задача. Найти решение уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t) \tag{15}$$

в прямоугольной области $\Omega = \{(x,t) :\ 0 < x < l, 0 < t < T\}$ с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{16}$$

граничным условием

$$u_x(l,t)=0 \tag{17}$$

и интегральным условием

$$\int\limits_0^\alpha u(x,t)dx = E(t),\ 0<\alpha<l, \quad 0\le t\le T. \tag{18}$$

Под классическим решением задачи (15)— (18) будем понимать функцию $u(x,t)\in C^1(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (15) и условиям (16) — (18).

Основным результатом этого параграфа является теорема:

Теорема 8. Пусть:

$$f(x,t)\in C^1(\bar\Omega),\quad \varphi(x)\in C^2[0,l],\quad \psi(x)\in C^1[0,l],$$

$$E(t)\in C^2(0,T),\quad \varphi'(0)=\psi'(0)=0,\quad \varphi'(l)=\psi'(l)=0.$$

Тогда существует единственное классическое решение задачи (15)–(18).

Доказательство теоремы проведено по следующей схеме:

1. Получено решение вспомогательной задачи с граничным условием $u_x(0,t)=\mu(t)$.

2. К полученному решению вспомогательной задачи применено интегральное условие, что привело к интегральному уравнению относительно функции $\mu(t)$.

3. Доказана разрешимость интегрального уравнения, что означает существование единственной функции $\mu(t)$, обеспечивающей выполнение интегрального условия.

В заключение выражаю искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Пулькиной Людмиле Степановне за предложенную тему, помощь, ценные замечания и поддержку при выполнениии данной работы.

Публикации автора по теме диссертации

1. Кечина, О. М. Об одной нелокальной задаче для телеграфного уравнения./ О.М. Кечина // СамДиф-2007: конференция Дифференциальные уравнения и их приложения, г. Самара, 29 января – 2 февраля 2007 г. Тезисы докладов. – Самара: Издательство "Универс групп", 2007. - 156 с. С. 66 – 67.

2. Кечина, О. М. Об одной нелокальной задаче с интегральными условиями для телеграфного уравнения/ О.М. Кечина // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды четвёртой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. - Самара: СамГТУ, 2007. - 202 с.: ил. С. 107 – 109.

3. Кечина, О. М. Задача с интегральными условиями для телеграфного уравнения/ О.М. Кечина // Интегративный характер современного математического образования: материалы Всероссийской научно-практической конференции (Самара, 24 - 27 сентября 2007 г.): в 2 частях: часть 1. - Самара: Самарский государственный педагогический университет, 2007. - 170 с. С. 48 – 52.

4. Кечина, О. М. Об одной нелокальной задаче для уравнения колебаний струны/ О.М. Кечина // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 36/ Казанское математическое общество. Лобачевские чтения - 2007 // Материалы шестой молодёжной научной школы-конференции. - Казань: Издательство Казанского математического общества, Издательство Казанского государственного университета, 2007. - 266 с. С. 99 – 101.

5. Кечина, О. М. Об одной нелокальной задаче с интегральными условиями/ О.М. Кечина // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения - 2008. Материалы научной конференции, 14 - 19 апреля 2008. - СПб., 2008. - 180 с. С. 59 – 62.

6. Кечина, О. М. О разрешимости одной нелокальной задачи для гиперболического уравнения/ О.М. Кечина, Л.С. Пулькина // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: Труды международной научной конференции (24 - 28 июня 2008 г., г. Стерлитамак) - Уфа: Гилем, 2008. - Т. 1. - 242 с. С. 120 – 122, 2008.

7. Кечина, О. М. Об одном нагруженном интегральном уравнении./ О.М. Кечина // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 37 // Материалы шестой молодёжной научной школы-конференции. - Казань:

Издательство Казанского математического общества, Издательство Казанского государственного университета, 2008. - 202 с. С. 78 – 80.

8. Пулькина, Л. С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения в характеристическом прямоугольнике/ Л.С. Пулькина, О.М. Кечина // Вестник Самарского государственного университета. – 2009. – № 2 (68). – С. 80 – 88.

9. Кечина, О. М. Смешанная задача с интегральными условиями для волнового уравнения/ О.М. Кечина // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения - 2009. Материалы научной конференции, 13 - 18 апреля 2009. - СПб., 2009. - 204 с. С. 62 – 66.

10. Кечина, О. М. Об одной смешанной задаче с нелокальным условием, заданным в части области/ О.М. Кечина // СамДиф-2009: конференция Дифференциальные уравнения и их приложения, г. Самара, 29 июня – 2 июля 2009 г. Тезисы докладов. – Самара: Издательство "Универс групп", 2009. С. 33.

11. Кечина, О. М. Смешанная задача для уравнения колебаний струны с интегральным условием, заданным в части области/ О.М. Кечина // Интегративный характер современного математического образования: материалы Второй всероссийской научно-практической конференции (Самара, 26 - 28 октября 2009 г.) - Самара: ПГСГА, 2009. С. 27 – 32.

12. Кечина, О. М. Смешанная задача с интегральными условиями первого рода./ О.М. Кечина // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 39 // Материалы Восьмой молодёжной научной школы-конференции "Лобачевские чтения –2009". - Казань: Казанское математическое общество, 2009. С. 263 – 265.

13. Кечина, О. М. Нелокальная задача для гиперболического уравнения с условиями, заданными внутри характеристического прямоугольника/ О.М. Кечина // Вестник Самарского государственного университета. – 2009. – № 6 (72). – С. 50 – 56.