На правах рукописи

Гордеева Ирина Александровна

МНОГООБРАЗИЯ РИМАНА-КАРТАНА

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

КАЗАНЬ — 2012

Работа выполнена в ФГБОУВПО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Степанов Сергей Евгеньевич**.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Аминова Ася Васильевна**;

доктор физико-математических наук, профессор **Смоленцев Николай Константинович**.

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Московский педагогический государственный университет»

Защита диссертации состоится "20" декабря 2012 г. в 14 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д.212.081.10 в ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета.

Автореферат разослан "____" ноября 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук Липачев Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Метрически-аффинным пространством называется тройка $(M, g, \overline{\nabla})$, где M – дифференцируемое многообразие размерности $n \geq 2$ с метрикой g некоторой сигнатуры и линейной связностью $\overline{\nabla}$ с ненулевым кручением S, которая, вообще говоря, не зависит от g. Начало теории таких пространств было положено в 20-х годах прошлого века Э. Картаном[1], который предложил вместо связности Леви-Чивита ∇ в общей теории относительности (ОТО) рассматривать несимметричную линейную связность $\overline{\nabla}$, обладающую свойством метричности $\overline{\nabla} g = 0$. В результате пространство-время получало в дополнение к кривизне еще и ненулевое кручение S. Кроме того, им была выдвинута идея пространства абсолютного параллелизма. Позднее Э. Картан указал[2], что эта идея была переоткрыта А. Эйнштейном в 1928 г., положившим ее в основу единой теории поля, в которой тензор электромагнитного поля совпадает с тензором кручения пространства абсолютного параллелизма[3]. Данная теория получила в дальнейшем название Einstein-Cartan Theory of Gravity (ECT)[4]. В начале 60-х годов Т. Киббл[5] и Д. Шама[6] установили связь между кручением S связности $\overline{\nabla}$ и спин тензором материи s. Затем были найдены и другие физические приложения ECT[7,8].

Впоследствии теория Эйнштейна-Картана была обобщена[9] за счет введения требования неметричности $Q := -\overline{\nabla} g \neq 0$ для линейной связности $\overline{\nabla}$. Новая теория получила название Metric-Affine Gauge Theory of Gravity или сокращенно MAG[4]. Число работ, опубликованных в рам-

---

[1] Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativé généralisée / E. Cartan // Ann. Éc. Norm. – 1923–1925. – V. 40. – P. 325-412, V. 41. – P. 1–25,V. 42. P. 17–88.

[2] Cartan E. Notice historique sur la notion de parall'elisme absolu / E. Cartan // MA.Bd. – 1930. – V. 3. – P. 1121–1129.

[3] Акивис М.А. Эли Картан / М.А. Акивис, Б.А. Розенфельд – М: МЦНМО, 2007.

[4] Trautman A. The Einstein-Cartan theory / A. Trautman // Encyclopedia of Mathematical Physics / Edited by Francoise J.-P., Naber G.L., Tsou S.T. – 2006. – V. 2. – P. 189–195.

[5] Kibble T.W.B. Lorenz invariance and the gravitational field / T.W.B. Kibble // J. Math. Phys. – 1961. – Vol. 2. – P. 212–221.

[6] Sciama D.W. On the analogy between charge and spin in general relativity / D.W. Sciama // Recent developments in General Relativity. – 1962. – P. 415–439.

[7] Penrose R. Spinors and torsion in General Relativity / R. Penrose // Fond. Of Phys. – 1983. – V. 13. – P. 325–339.

[8] Ruggiero M.L. Einstein-Cartan theory as a theory of defects in space-time / M.L. Ruggiero, A. Tartaglia //Amer. J. Phys. – 2003. – V. 71. – P. 1303–1313.

[9] Hehl F.W. On a New Metric-Affine Theory of Gravitation / F.W. Hehl, P. Heyde // Physics Letters B. – 1976. – V. 63. – № 4. – P. 446–448.

ках ECT и MAG, исчисляется уже сотнями, причем опубликованные результаты имеют в большей степени прикладной физический характер.

В геометрии из всех видов метрчески-аффинных пространств $(M, g, \overline{\nabla})$ последовательно в течение длительного времени изучались только четверть-симметрические метрические пространства и их частный вид полусимметрические метрические пространства[10,11].

Геометрия "в целом" метрически-аффинных пространств застыла на результатах К. Яно, С. Бохнера и С. Гольдберга[12,13,14] середины прошлого века. В принятой современной физикой терминологии[4] их работы относятся к Riemann-Cartan Theory (RCT). Геометрия Римана-Картана – это геометрия метрически-аффинного пространства $(M, g, \overline{\nabla})$, с (псевдо)римановой метрикой g и линейной связностью $\overline{\nabla}$ с ненулевым кручением S такой, что $Q = 0$.

Цель диссертационной работы состоит в изучении геометрии пространств Римана-Картана.

Научная новизна исследования. Все основные результаты, представленные в настоящей работе и выносимые на защиту, являются новыми.

Методы исследования. Изучение многообразий Римана-Картана проведено классическими методами дифференциальной геометрии, почерпнутыми нами из монографий[14,15,16,17]. Классификация многообразий Римана-Картана проведена с использованием теории представлений групп, изложенной в классической монографии Г. Вейля[18], а также с помощью некоторых модификаций этой теории, содержащихся в

---

[10] Yano K. On semi-symmetric metric connection / K. Yano // Rev. Roum. Math. Pure Appl. – 1970. – V. 15. – P. 1579–1586.

[11] Yasar E. Totally umbilical lightlike hypersurfaces in semi-Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection / E. Yasar, A.C. Cöken, A. Yücesan // Int. J. Pure Appl. Math. – 2005. – V. 23. – № 3. – P. 379–391.

[12] Bochner S. Tensor-fields in non-symmetric connections / Bochner S., Yano K. //The Annals of Mathematics, 2nd Ser. – 1952. – V. 56. – № 3. – P. 504–519.

[13] Goldberg S.I. On pseudo-harmonic and pseudo-Killing vector in metric manifolds with torsion / S.I. Goldberg // The Annals of Mathematics, 2nd Ser. – 1956. – V. 64. – № 2. – P. 364–373.

[14] Яно К. Кривизна и числа Бетти / К. Яно, С. Бохнер. – М: ИЛ, 1957.

[15] Бессе А. Многообразия Эйнштейна: В 2-х т. / А. Бессе. – М.: Мир, 1990.

[16] Бессе А. Четырехмерная риманова геометрия: Семинар Артура Бессе 1978/1979 / А. Бессе. – М.: Мир, 1985.

[17] Кобаяси. Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. /Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1981.

[18] Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления / Г. Вейль. – М.: ИЛ, 1947.

статьях сборника[16]. Глобальный аспект геометрической теории многообразий Римана-Картана изучен с помощью "техники Бохнера"[15,19,20] – аналитического метода, основанного на применении интегральных формул Вайценбека.

Основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты.

1) Проведена алгебраическая классификация многообразий Римана-Картана и установлена связь с классификацией почти эрмитовых многообразий Грея-Херреллы.

2) Даны определения скалярной и полной скалярной кривизн многообразия Римана-Картана и установлена их связь со скалярной и полной скалярной кривизнами риманова многообразия.

3) Найдены условия препятствия существованию некоторых из выделенных классов многообразия Римана-Картана.

4) Изучена локальная и глобальная геометрии псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей на многообразиях Римана-Картана.

5) Изучена геометрия симметрических тензорных полей на многообразии Римана-Картана двух выделенных нами классов.

Достоверность полученных в диссертации результатов обусловлена тем, что:

- применяются проверенные, точные и строго обоснованные методы исследования;

- многие результаты диссертации являются обобщением полученных ранее результатов и совпадают с этими результатами в частных случаях;

- все основные результаты диссертации доказаны и опубликованы.

Теоретическое и прикладное значение исследования. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы для дальнейших исследований метрически-аффинных пространств и пространств Римана-Картана. Часть результатов может быть использована в теоретической физике при изучении свойств гравитации с кручением.

Апробация работы. Основные результаты докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 10 – 15 июля 2006 г.);

[19]Petersen P. Riemannian geometry / P. Petersen. – New York: Springer. – 1997.

[20]Wu H. The Bochner technique in differential geometry. / H. Wu // Mathematical Reports. – 1988. – V. 3. – Part 2.

- пятая молодежная научная школа-конференция "Лобачевские чтения - 2006"(Казань, 1 - 6 ноября 2006 г.);

- шестая молодежная научная школа-конференция "Лобачевские чтения - 2007"(Казань, 16 - 19 декабря 2007 г.);

- международный геометрический семинар им. Г.Ф. Лаптева (Пенза, 2007 г.);

- XIX международная летняя школа-семинар по современным проблемам теоретической и математической физики "Волга-2007"(Казань, 22 июня - 3 июля 2007 г.);

- международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 27 июня – 2 июля 2008 г.);

- международная конференция "Геометрия в Одессе – 2008"(Одесса, 19 мая – 24 мая 2008 г.);

- международная конференция "Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation"(Казань, 1 – 6 ноября 2010).

Публикации и вклад автора в разработку исследованных проблем. Основные результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в 17 работах, общим объемом 8,5 печатных листов, в том числе 4 из них в журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов научных исследований. В работах, написанных в соавторстве с научным руководителем, С.Е. Степанову принадлежат постановка задачи и историческая часть введения. И.А. Гордеевой принадлежит доказательство основных и вспомогательных утверждений.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка цитируемой литературы. Нумерация параграфов производится двумя символами, а нумерация результатов производится тремя символами. Например, теорема 1.2.3 означает теорему 3 из второго параграфа главы 1.

Библиографический список содержит список из 109 наименований, включающих работы автора. Полный объем диссертации составляет 112 страниц машинописного текста.

Краткое описание содержания работы по главам. Во введении обосновывается актуальность темы исследования, формулируется цель исследования и приводятся основные результаты диссертации, дается общая характеристика и краткое содержание работы.

В **первой главе** диссертации вводятся базовые понятия и основные обозначения. Рассматривается n-мерное C^∞-многообразие M с линейной связностью $\overline{\nabla}$ с кручением $S \neq 0$. **В первом параграфе** приводятся определения линейной связности $\overline{\nabla}$ как отображения $X \to \overline{\nabla}_X$, сопоставляющего каждому векторному полю $X \in C^\infty TM$ оператор

$\overline{\nabla}_X$ в пространстве $C^\infty TM$ векторных полей, тензорного расслоения $T^{(p,q)}M \to M$ типа (p,q) над M, и, в частности, $S^pM := S^p(T^*M)$ и $\Lambda^pM := \Lambda^p(T^*M)$ – расслоения ковариантных симметрических и кососимметрических тензоров над M, где S^p и Λ^p – известные операторы симметризации и альтернации.

Во **втором параграфе** дается определение и рассматриваются частные виды аффинно-метрических пространств. Многообразие M с аффинной связностью $\overline{\nabla}$ с ненулевым кручением S называется *метрическим пространством*, если на M задано поле симметрического невырожденного тензора $g \in S^2M$. Метрическое пространство называется *многообразием (пространством) Римана-Картана*, если $\overline{\nabla}g = 0$. Если многообразие M – компактное и ориентированное, то для векторного поля $X \in C^\infty TM$ справедлива известная теорема Грина[15] $\int_M \operatorname{div} X dv = 0$. Для метрической связности $\overline{\nabla}$ в диссертации приводится аналог этой теоремы вида $\int_M (\mathrm{trace}\,\overline{\nabla}X - 2(\mathrm{trace}\,S)X)dv = 0$, где S – тензор кручения связности $\overline{\nabla}$.

В **третьем параграфе** приведены необходимые факты из теории представлений групп. В частности, рассматривается тензорное расслоение $T^{(p,0)}M$ над C^∞-многообразием M размерности n со стандартным слоем $T^{(p,0)}E$, где $E = T_xM$ для произвольной точки $x \in M$, как пространство представления ортогональной группы $O(n, \mathbf{R})$. Тензорное расслоение $T^{(p,0)}M$ является поточечно приводимым относительно действий группы $O(n, \mathbf{R})$ и содержит вследствие этого $O(n, \mathbf{R})$-инвариантные подрасслоения. Для определения максимального числа неприводимых относительно действия $O(n, \mathbf{R})$ подпространств пространства $T^{(p,0)}E$ приводится теорема Вейля об инвариантах[16,18] и дополняющие ее утверждения[16].

В качестве приложения данной теории приводятся неприводимые действия ортогональной группы в слоях тензорных расслоений $T^*M \otimes \Lambda^2M$ и $\Lambda^2M \otimes T^*M$. Уточняется формулировка и приводится более тщательное доказательство теоремы Ж.-П. Бургиньена[16].

Теорема 1.3.1. *Тензорные расслоения $T^*M \otimes \Lambda^pM \to M$ и $\Lambda^pM \otimes T^*M \to M$ над римановым многообразием (M,g) допускают поточечно неприводимые относительно действия ортогональной группы $O(n, \mathbf{R})$ изоморфные разложения вида*

$$T^*M \otimes \Lambda^pM = \Lambda^{p+1}M \oplus (C^\infty M \cdot g \wedge \Lambda^{p-1}M) \oplus (\ker trace_g \cap \ker \Lambda^{p+1});$$

$$\Lambda^pM \otimes T^*M = \Lambda^{p+1}M \oplus (\Lambda^{p-1}M \wedge (C^\infty M)g) \oplus (\ker trace_g \cap \ker \Lambda^{p+1}).$$

Во **второй главе** приводятся два способа классификации многообразий Римана-Картана. В **первом параграфе** на многообразии

Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ определяется тензор деформации $T = \overline{\nabla} - \nabla$, где ∇ – связность Леви-Чивита. На основании Теоремы 1.3.1. приводятся два способа классификации многообразий Римана-Картана с использованием поточечно $O(n, \mathbf{R})$-неприводимых разложений тензорных расслоений $\Lambda^2 M \otimes T^* M$ и $T^* M \otimes \Lambda^2 M$, гладкими сечениями которых являются тензор кручения S и деформации T соответственно. При этом следующими равенствами определяются ортогональные проекции S на компоненты первого из этих разложений:

$$^{(1)}S^{\mathrm{b}}(X, Y, Z) = 3^{-1}(S^{\mathrm{b}}(X, Y, Z) + S^{\mathrm{b}}(Y, Z, X) + S^{\mathrm{b}}(Z, X, Y));$$

$$^{(2)}S^{\mathrm{b}}(X, Y, Z) = g(Y, Z)\theta(X) - g(X, Z)\theta(Y);$$

$$^{(3)}S^{\mathrm{b}}(X, Y, Z) = S^{\mathrm{b}}(X, Y, Z) -^{(1)} S(X, Y, Z) -^{(2)} S(X, Y, Z),$$

где $S^{\mathrm{b}}(X, Y, Z) := g(S(X, Y), Z)$ и $\theta := (n-1)^{-1} trace\, S$.

Будем говорить, что многообразие Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$, равно как и его присоединенная связность $\overline{\nabla}$, принадлежат классу $\wp_\alpha$ или $\wp_\alpha \oplus \wp_\beta$ для $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ и $\alpha < \beta$, если в каждой точке $x \in M$ тензор S^{b} является сечением соответствующего тензорного расслоения $\wp_\alpha(M)$ или $\wp_\alpha(M) \oplus \wp_\beta(M)$, которые отвечают компонентам неприводимого разложения.

Ортогональные проекции T на компоненты второго разложения определяются аналогичным образом. В диссертации доказывается эквивалентность двух классификаций.

Во **втором параграфе** приводятся примеры многообразий Римана-Картана различных классов. Первым примером является однородное риманово многообразие[21], то есть связное риманово многообразие (M, g), на котором задается тензорное поле T как гладкое сечение тензорного расслоения $TM \otimes \Lambda^2 M$. В отличие от общей теории метрически-аффинных пространств, на $(M, g, \overline{\nabla})$ накладываются дополнительные условия в виде $\overline{\nabla} R = 0$ и $\overline{\nabla} T = 0$, которые, согласно теореме Амброуза-Зингера[22], вместе с условием $\overline{\nabla} g = 0$ дают критерий однородности риманова многообразия (M, g).

Вторым примером многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ является почти эрмитовое многообразие (M, g, J), то есть риманово $2m$-мерное многообразие (M, g) с почти комплексной структурой $J^2 = -\mathrm{Id}_M$, которая является гладким сечением тензорного расслоения $TM \otimes T^* M$, совместимой с метрикой g, т.е. $g(J, J) = g$, если в качестве

[21] Tricerri F. Homogeneous structures on Riemannian manifolds / F. Tricerri, L. Vanhecke // London Math. Soc.: Lecture Note Series. – 1983. – V. 83.

[22] Ambrose W. On homogeneous Riemannian manifolds / W. Ambrose, I.M. Singer // Duke Math. J. – 1958. – V. 25. – P. 647–669.

связности $\overline{\nabla}$ взять связность $\overline{\nabla} = \nabla + \nabla J$. В диссертации доказывается частичное совпадение классов многообразий Римана-Картана с классами почти эрмитовых многообразий классификации Грея-Хервеллы[23].

Третьим примером многообразия Римана-Картана служит $(S^2, g, \overline{\nabla})$, где S^2 – сфера без полюсов радиуса R евклидова пространства E^3, связность $\overline{\nabla}$ определяется непосредственно и определяет геометрию *абсолютного параллелизма*, то есть $(S^2, g, \overline{\nabla})$ являют пример пространства с метрической несимметрической связностью нулевой кривизны и ненулевого кручения. Многомерные обобщения $(S^2, g, \overline{\nabla})$ носят название пространств Вайценбека[24].

В **третьем параграфе** дается определение скалярной кривизны многообразия Римана-Картана $\overline{s}(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} g(\overline{R}(e_i, e_j)e_j, e_i)$ по аналогии со скалярной кривизной риманова многообразия $s(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} g(R(e_i, e_j)e_j, e_i)$ для произвольного ортонормированного базиса $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ касательного пространства T_xM. Доказана

Лемма 2.3.1. *Скалярные кривизны $\overline{s}$ и s многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ и риманова многообразия (M, g) связаны равенством*

$\overline{s} = s - \|{}^{(1)}S\|^2 - 2(n-2)\|{}^{(2)}S\|^2 + 2\|{}^{(3)}S\|^2 - 4div(trace\ S^{\flat})$

с неприводимыми компонентами ${}^{(1)}S$, ${}^{(2)}S$ и ${}^{(3)}S$ тензора кручения S.

Известно[15], что полной скалярной кривизной компактного риманова многообразия (M, g) называется число $s(M) = \int_M s\, dv$, тогда по аналогии в диссертации определяется полная скалярная кривизна компактного многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ как число $\overline{s}(M) = \int_M \overline{s}\, dv$. Из Леммы 2.3.1. и теоремы Грина следует, что справедлива

Теорема 2.3.1. *Полные скалярные кривизны $s(M)$ и $\overline{s}(M)$ компактных ориентированных многообразий Римана (M, g) и Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ связаны равенством*

$$\overline{s}(M) = s(M) - \int_M (\|{}^{(1)}S\|^2 + 2(n-2)\|{}^{(2)}S\|^2 - 2\|{}^{(3)}S\|^2)dv.$$

В **четвертом параграфе** описываются основные инвариантные характеристики классов многообразий Римана-Картана. Так, например, об условиях принадлежности многообразия Римана-Картана к классу $\wp_1 \oplus \wp_2$ свидетельствует следующая

---

[23]Gray A. The sixteen class of almost Hermitean manifolds / A. Gray, L. Hervella // Ann. Math. Pura Appl. – 1980. – V. 123. – P. 35–58.

[24]Pestov I.B. Kahler fermions on the Weitzenbok space-time/ I.B. Pestov - 1999. - arXiv:hep-th/9911247v1 30 Nov 1999.

Лемма 2.4.2. *Связность $\overline{\nabla}$ принадлежит классу $\wp_1 \oplus \wp_2$ тогда и только тогда, когда ее тензор кручения удовлетворяет алгебраическому уравнению вида*

$$S(X, Y, Z) + S(X, Z, Y) = g(X, Z)B(Y) + g(X, Y)B(Z) + g(Y, Z)A(X)$$

для некоторых гладких 1-форм A и B и произвольных гладких векторных полей X, Y и Z на M.
Для многообразий этого класса на основании Теоремы 2.3.1. доказана

Теорема 2.4.6. *Полные скалярные кривизны $s(M)$ и $\overline{s}(M)$ компактных ориентированных многообразий Римана (M, g) и Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\wp_1 \oplus \wp_2$ связаны неравенством $\overline{s}(M) \leq s(M)$. Для* $\dim M \geq 3$ *равенство возможно, когда связность $\overline{\nabla}$ совпадает со связностью Леви-Чивита ∇ метрики g, а для случая* $\dim M = 2$, *когда связность $\overline{\nabla}$ будет полусимметрической.*

Для многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ со связностью Вайценбека $\overline{s} = 0$, поэтому справедливо

Следствие 2.4.6. *Не существует связностей Вайценбека $\overline{\nabla}$ класса $\wp_1 \oplus \wp_2$ на римановом многообразии с $s(M) \leq 0$.*

С учетом определения скалярных кривизн s и $\overline{s}$ и положительной определенности метрики g верно

Следствие 2.4.7. *На компактном ориентированном римановом многообразии (M, g) с неположительно (соответственно отрицательно) определенной скалярной кривизной s не существует несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$ класса $\wp_1 \oplus \wp_2$ с положительно (соответственно неотрицательно) определенной квадратичной формой $\overline{Ric}(X, X)$ для тензора Риччи $\overline{Ric}$ связности $\overline{\nabla}$ и любого гладкого векторного поля X.*

Наряду с описанным выше классом $\wp_1 \oplus \wp_2$, также подробно в диссертации описана геометрия многообразий Римана-Картана классов $\wp_1, \wp_2$ и $\wp_3$.

В **третьей главе** изучаются псевдокиллинговы и псевдогармонические векторные поля, определение которых принадлежит С. Бохнеру и К. Яно, а также определяемые в диссертации псевдокиллинговы и псевдокодацциевы симметрические тензорные поля на многообразиях Римана-Картана некоторых выделенных нами классов.

В **первом параграфе** по аналогии с киллинговым векторным полем приводится

Определение[13,14]**.** *Псевдокиллинговым векторным полем на многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ называется такое ξ, которое удовлетворяет уравнению*

$$g(\overline{\nabla}_X \xi, Y) + g(X, \overline{\nabla}_Y \xi) = 0.$$

Данное дифференциальное уравнение, определяющее псевдокиллингово векторное поле, на многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\wp_1 \oplus \wp_2$ на основании Леммы 2.4.2. может быть представлено в форме

$$L_\xi g(X,Y) = 2(2g(X,Y)\theta(\xi) - g(X,\xi)\theta(Y) - g(\xi,Y)\theta(X),$$

где L_ξ – производная Ли относительно ξ, $\theta(X) = (n-1)^{-1} trace\ S$ для произвольного гладкого векторного поля X на M. И отсюда $(L_\xi g)(X,Y) = 4g(X,Y)\theta(\xi)$ для произвольных гладких векторных полей X и Y, принадлежащих гиперраспределению $\xi^\perp$ ортогональному векторному полю ξ. Доказана

Теорема 3.1.1. *Псевдокиллинговое (неизотропное) векторное поле на многообразии Римана-Картана* $(M, g, \overline{\nabla})$ *класса* $\wp_1 \oplus \wp_2$ *является инфинитезимальным* $(n-1)$*-конформным преобразованием*[25,26].

Вторая фундаментальная форма $Q^\perp$ гиперраспределения $\xi^\perp$ имеет в данном случае вид $Q^\perp = 4g \otimes \xi$. Поэтому справедлива

Теорема 3.1.2. *На многообразии Римана-Картана* $(M, g, \overline{\nabla})$ *класса* $\wp_1 \oplus \wp_2$ *гиперраспределение* $\xi^\perp$*, ортогональное (неизотропному) псевдокиллинговому векторному полю* ξ*, является омбилическим.*

На компактном ориентированном многообразии (M, g) с глобально определенным омбилическим гиперраспределением, верна следующая интегральная формула[27]

$$\int_M (Ric(\zeta,\zeta) - \|F^\perp\|^2 - (n-1)(n-2)\|H^\perp\|^2)\, dv = 0,$$

где ζ - единичное ортогональное этому гиперраспределению векторное поле, $F^\perp$ – тензор интегрируемости гиперраспределения[28] и $H^\perp$ – вектор средней кривизны этого гиперраспределения. На основании этой формулы в диссертации доказывается следующая "теорема исчезновения".

Теорема 3.1.5. *Пусть* $(M, g, \overline{\nabla})$ *– компактное ориентированное* n*-мерное* $(n \geq 3)$ *многообразие Римана-Картана с положительно опре-*

---

[25] Tanno S. Partially conformal transformations with respect to $(m-1)$-dimensional distributions of m-dimensional Riemannian manifolds / S. Tanno // Tôhoku Math. J. – 1965. – V. 17. – № 17. – P. 358–409.

[26] Дубинкин А.В. К вопросу об инфинитезимальных обобщенно-конформных преобразованиях / А.В. Дубинкин, А.П. Широков // Труды геометрического семинара (КГУ, Казань). – 1983. – Т. 15. – С. 26–34.

[27] Stepanov S.E. An integral formula for a Riemannian almost-product manifold / S.E. Stepanov // Tensor, N.S. – 1994. – V. 55. – № 3. – P. 209–213.

[28] Reinhart B.L. Differential geometry of foliations / B.L. Reinhart. – - Berlin-New York: Springer-Verlag, 1983.

деленным метрическим тензором g принадлежит классу $\wp_1 \oplus \wp_2$. Если при этом тензор Риччи Ric связности Леви-Чивита ∇ метрики g отрицательно определен, то на $(M, g, \overline{\nabla})$ не существует ненулевых псевдокиллинговых векторных полей.

Аналогичные результаты получены в диссертации для класса многообразий Римана-Картана $\wp_2$.

Во **втором параграфе** на многообразии Римана-Картана по аналогии с гармоническим векторным полем на римановом многообразии приводится

Определение[13,14]**.** *Псевдогармоническим векторным полем на многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ называется такое ξ, которое подчиняется системе дифференциальных уравнений*

$$g(\overline{\nabla}_X \xi, Y) - g(X, \overline{\nabla}_Y \xi) = 0, \quad trace_g(\overline{\nabla}\xi) = 0.$$

В диссертации доказываются "теоремы исчезновения" для псевдогармонических векторных полей на многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ отдельных выделенных нами классов. Так, например, справедлива

Теорема 3.2.3. *Пусть $(M, g, \overline{\nabla})$ – компактное многообразие Римана-Картана класса $\wp_1 \oplus \wp_2$. Тогда каждое псевдогармоническое векторное поле ξ на $(M, g, \overline{\nabla})$ имеет равную нулю ковариантную производную относительно несимметричной метрической связности $\overline{\nabla}$, если $\overline{Ric}(\xi, \xi) \geq 0$ для тензора Риччи $\overline{Ric}$ этой связности. Если же квадратичная форма $\overline{Ric}(X, X)$ является положительно определенной, то на многообразии не существует ненулевых псевдогармонических векторных полей.*

Обобщением данной теоремы на случай некомпактного многообразия Римана-Картана служит следующая

Теорема 3.2.4. *Пусть $(M, g, \overline{\nabla})$ – многообразие Римана-Картана класса $\wp_1 \oplus \wp_2$. Если функция длины $f = 2^{-1}g(\xi, \xi)$ псевдогармонического векторного поля ξ имеет локальный максимум в некоторой точке многообразия, где квадратичная форма $\overline{Ric}(X, X)$ положительно определена, то поле ξ обращается в нуль в этой точке и некоторой ее окрестности.*

В **третьем параграфе** вводятся понятия дифференциального оператора симметрического дифференцирования $\overline{\delta}^* : C^\infty S^p M \to C^\infty S^{p+1} M$ в локальной системе координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ на M равенством $\overline{\delta}^* = sym \circ \overline{\nabla}$. По аналогии с симметрическими p-тензорами Киллинга, которые активно изучаются в ОТО[29], в диссер-

[29] Крамер Д. Точные решения уравнений Эйнштейна / Д. Крамер, Х. Штефанн, М. Мак-Каллум, Э. Херльт. – М.: Энергоиздат, 1982.

тации определяется *псевдокиллингово симметрическое тензорное поле* $\varphi \in C^\infty SM$ на многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ равенством $\overline{\delta}^*\varphi = 0$. В диссертации изучены некоторые свойства псевдокиллинговых симметрических тензорных полей и доказана "теорема исчезновения" для псевдокиллинговых симметрических тензорных полей на многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$.

Теорема 3.3.2. *Пусть $(M, g, \overline{\nabla})$ – компактное многообразие Римана-Картана класса $\wp_1 \oplus \wp_3$. Если для псевдокиллингова p-тензора φ неравенство $\Phi_p(\varphi) \leq 0$ имеет место всюду на $(M, g, \overline{\nabla})$, то p-тензор будет ковариантно постоянным. Не существует псевдокиллингова p-тензора φ, для которого $\Phi_p(\varphi) < 0$ всюду на $(M, g, \overline{\nabla})$.*

Здесь $\Phi_p(\varphi)$ – это квадратичная форма на S^pM, чьи коэффициенты – тензоры кривизны, кручения и Риччи связности $\overline{\nabla}$.

Симметрическое тензорное поле $\varphi \in C^\infty S^pM$ назовем *псевдокодацциевым*[30], если φ – сечение расслоения $\ker(sym(T^*M \otimes S^pM))$. В этом случае

$$(\overline{\nabla}_{X_0}\varphi)(X_1, X_2, \ldots, X_p) = (\overline{\nabla}_{X_1}\varphi)(X_{i_0}, X_2, \ldots, X_p)$$

для любых $X_0, \ldots, X_p \in C^\infty TM$. Аналогично представляются условия на псевдокодацциево тензорное поле в виде

$$\overline{\delta}^*\varphi = (p+1)\overline{\nabla}\varphi.$$

Теорема 3.3.3. *Пусть $(M, g, \overline{\nabla})$ – компактное многообразие Римана-Картана с тензором кручения S связности $\overline{\nabla}$ класса $\wp_1 \oplus \wp_3$. Если для псевдокодацциева p-тензора $\varphi \in C^\infty S_0^pM$ неравенство $\Phi_p(\varphi) \geq 0$ имеет место всюду на $(M, g, \overline{\nabla})$, то тензор будет ковариантно постоянным. Не существует псевдокодацциева p-тензора $\varphi \in C^\infty S_0^pM$, для которого $\Phi_p(\varphi) > 0$ всюду на $(M, g, \overline{\nabla})$.*

Аналогичные результаты получены в диссертации и для других выделенных нами классов многообразий Римана-Картана.

В заключение автор выражает глубокую и искреннюю благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук профессору Сергею Евгеньевичу Степанову за постановку задачи, руководство и постоянное внимание к работе.

[30]Смольникова М.В. О глобальной геометрии гармонических симметрических билинейных дифференциальных форм / М.В. Смольникова // Тр. МИАН. – 2002. – Т. 236. – С. 328–331.

Публикации по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК РФ

1. Гордеева И.А. Псевдокиллинговы и псевдогармонические векторные поля на многообразии Римана-Картана / И.А. Гордеева, С.Е. Степанов // Математические заметки. – 2010. – Т. 87. – № 2. – С. 267-–279. (диссертанта – 0,5 п.л.)

2. Гордеева И.А. Три класса многообразий Вайценбека / И.А. Гордеева, С.Е. Степанов // Изв. вузов. Матем. – 2012. – № 1. – С. 92–95. (диссертанта – 0,3 п.л.)

3. Гордеева И.А. Геометрия многообразий Римана-Картана / И.А. Гордеева, С.Е. Степанов // Вестник КемГУ. – 2011. – Т. 47. – № 3/1. – С. 168–181. (диссертанта – 0,6 п.л.)

4. Гордеева И.А. О некоторых классах пространств Вайценбека / И.А. Гордеева // Изв. Пенз. гос. ун-та им. В.Г. Белинского, Физ.-мат. и техн. науки. – 2011. – № 26. – с. 70–75. (0,4 п.л.)

Публикации в других изданиях

5. Гордеева И.А. Теоремы исчезновения некоторых классов многообразий Римана-Картана / И.А. Гордеева // Фундамент. и прикл. матем. – 2011. – Т. 16. – № 2. – С. 7–12. (0,4 п.л.)

6. Гордеева И.А. Многообразия Римана-Картана / И.А. Гордеева, В.И. Паньженский, С.Е. Степанов // Итоги науки и техники (совр. мат-ка и ее прил-я).– 2009. – Т. 123. – С. 110–141. (диссертанта – 1 п.л.)

7. Gordeeva I.A. On existence of pseudo-Killing and pseudo-harmonic vector fields on Riemannian-Cartan manifolds. / I.A. Gordeeva, S.E.Stepanov // Zb. Pr. Inst. Mat. NaN Ukr. – 2009. – V. 6. – №. 2. – P. 207–222. (диссертанта – 0,75 п.л.)

8. Гордеева И.А. О классификации несимметрических метрических связностей / И.А. Гордеева // Сборник трудов Международного геометрического семинара им. Г.Ф. Лаптева. – 2007. – С. 30–37. (0,4 п.л.)

9. Гордеева И.А. Две теоремы исчезновения для симметрических тензоров на многообразии Римана-Картана / И.А. Гордеева, А.А. Рылов // Диф. геом. мног. фиг.: Межвуз. темат. сб. науч. тр. – 2008. – Вып. 39. - – С. 27–31. (диссертанта – 0,3 п.л.)

10. Гордеева И.А. Нули псевдокиллингова векторного поля / И.А. Гордеева, С.Е. Степанов // Диф. геом. мног. фиг.: Межвуз. темат. сб. науч. тр. – 2009. – Вып. 40. – С. 47–53. (диссертанта – 0,2 п.л.)

11. Гордеева И.А. Шесть классов несимметрических метрических связностей / И.А. Гордеева // Дифференциальная геометрия много-

образий фигур: Межвуз. темат. сб. научн. тр. – 2007. – Вып. 38. – С. 33–38. (0,3 п.л.)

12. Gordeeva I.A. Conditions for an Obstruction to Existence of Two Classes of Riemann-Cartan Manifolds / I.A. Gordeeva // Международная конференция "Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation"(Казань, 1–6 ноября 2010 г.). Тезисы докладов. — Казань: Казан. ун-т, 2010. — С. 138–139. (0,1 п.л.)

13. Гордеева И.А. Теорема исчезновения для псевдогармонических векторных полей на многообразии Римана-Картана / И.А. Гордеева, С.Е. Степанов // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 27 июня – 2 июля 2008 г.). Тезисы докладов. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2008. - С. 71–73. (диссертанта – 0,2 п.л.)

14. Гордеева И.А. Псевдокиллинговые векторные поля на многообразиях Римана-Картана / И.А. Гордеева // Международная конференция "Геометрия в Одессе – 2008", (Одесса, 19–24 мая 2008 г.). Тезисы докладов. – Одесса: Фонд "Наука", 2008. – С. 73–75. (0,2 п.л.)

15. Гордеева И.А. Классификация несимметрических метрических связностей / И.А. Гордеева // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 10–15 июля 2006 г.,). Тезисы докладов. – Владимир, ВлГУ, 2006. - стр. 72–73 (0,1 п.л.).

16. Гордеева И.А. Несимметрические метрические связности и их классификация / И.А. Гордеева // Пятая молодежная научная школа-конференция "Лобачевские чтения - 2006"(Казань, 28 ноября – 2 декабря 2006 г.). Тезисы докладов. – Казань: Издательство Казанского математического общества, 2006. – С. 62–64. (0,1 п.л.)

17. Гордеева И.А. Некоторые свойства различных классов пространств Римана-Картана / И.А. Гордеева // Шестая молодежная научная школа-конференция "Лобачевские чтения - 2007"(Казань, 16–19 декабря 2007 г.). Тезисы докладов. – Казань: Издательство Казанского математического общества, 2007. – С. 60–61. (0,1 п.л.)

Подписано в печать 17.11.12.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 0,93. Тираж 100 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.