

На правах рукописи

Широкий Александр Александрович

**АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА
ТРИАНГУЛЯЦИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2012

Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций
ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
доцент
Клячин Владимир Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Шабалин Павел Леонидович
кандидат физико-математических наук,
доцент
Кесельман Владимир Михайлович

Ведущая организация: Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения РАН

Защита состоится «17» мая 2012 года в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1 / 37, ауд. 337.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 18.

Автореферат разослан «05» апреля 2012 года и размещён на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета: www.ksu.ru.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10
к. ф.-м. н., доцент

Липачёв Е.К.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (проект 11-01-97021-р_поволжье_a) и факультета математики и информационных технологий ВолГУ.

Общая характеристика работы

По своей тематике данная диссертационная работа выполнена на стыке нескольких разделов анализа. Главным вопросом исследования является вопрос об оценках степени аппроксимации производных гладких функций, заданных на поверхности, производными кусочно-линейных функций. Данная тематика тесно связана как с теорией расчётных сеток, так и с вопросами анализа, берущими своё начало от классического примера Карла Шварца (1890). Основным объектом исследования являются триангуляции поверхностей.

Актуальность темы. Исторические сведения. Различные разбиения и, в частности, триангуляции часто используются в задачах численного моделирования для построения расчётных сеток. Во многих случаях расчётные сетки применяются для построения аппроксимации некоторой известной функции. В этом случае встаёт вопрос о точности построенной оценки, а также об устойчивости используемой разностной схемы. Например, в работах С.К. Годунова и Г.П. Прокопова¹, ² нерегулярные сетки используются для аппроксимации первых производных в составе эллиптических дифференциальных уравнений Лапласа, а также формулируются условия, которым должна удовлетворять сетка для обеспечения устойчивости результата численного моделирования. В более поздней работе С.К. Годунова, В.Т. Жукова, О.Б. Феодоритовой³ нерегулярные сетки применяются для расчёта инвариантных подпространств для симметрических гиперболических систем.

Однако первым заметным результатом, характеризующим зависимость качества приближения от способа построения разбиения стоит признать классический пример Карла Шварца⁴ (1890), известный также как “сапог Шварца”. Он представляет собой семейство приближений кругового цилиндра с помощью полиэдральных поверхностей. Предельная площадь этих приближений может быть сделана произвольно большой. Эта конструкция позволила уви-

¹Годунов С.К. О расчетах конформных отображений и построений разностных сеток / С.К. Годунов, Г.П. Прокопов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1967. № 7 (5). С. 1031 – 1059.

²Годунов С.К. О решении дифференциальных уравнений с использованием криволинейных разностных сеток / С.К. Годунов, Г.П. Прокопов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1968. № 8 (1). С. 28 – 46.

³Годунов С.К. Метод расчета инвариантных подпространств для симметрических гиперболических уравнений / С.К. Годунов, В.Т. Жуков., О.Б. Феодоритова // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1968. № 46 (6). С. 1019 – 1031.

⁴Контрпримеры в анализе / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. Волгоград : Платон, 1997. С. 191.

деть несостоятельность определения площади поверхности как точной верхней грани площадей вписанных в неё полиэдральных поверхностей, в противоположность тому, что длина кривой может быть определена как точная верхняя грань длин вписанных в неё ломаных.

На самом деле геометрические параметры нерегулярной сетки оказывают непосредственное влияние на качество аппроксимации, вплоть до наличия/отсутствия сходимости. Геометрические свойства элементов нерегулярных сеток рассматривались, например, в работах таких математиков, как S. Korotov¹, V.A. Garanzha², V.T. Rajan³ — в работе последнего сформулирован ряд результатов, касающихся триангуляции Делоне в n -мерном евклидовом пространстве. В работе авторов H. Pottmann, R. Krasauskas, V. Namann, K. Joy, W. Seibold⁴ исследуются кусочно-аффинные аппроксимации квадратичных функций в \mathbb{R}^n и в том числе рассматривается вопрос об оптимальном приближении (с максимальными линейными участками, но при этом с приемлемой точностью) в \mathbb{R}^2 и отчасти в \mathbb{R}^3 . J.R. Shewchuk⁵ поднимает вопрос о хорошем конечном линейном элементе в \mathbb{R}^2 и в \mathbb{R}^3 с точки зрения аппроксимации градиента функции. В работе Е.А. Пабат и В.А. Клячина⁶ исследуются свойства кусочно-линейных интерполяций поверхностей уровня функций, заданных на нерегулярных сетках. Были найдены достаточные условия на триангуляции ε -сетей, при которых имеет место C^1 -аппроксимация поверхностей уровня C^2 -гладких функций.

При решении ряда практических задач возникает необходимость в построении триангуляций различных поверхностей. В частности, В.М. Миклюковым⁷ исследовалась проблема триангуляции локально липшицевой поверхности. Учитывая “популярность” триангуляции Делоне, естественным, казалось бы, образом возникает желание построить соответствующее обобщение на случай поверхностей. Однако, несмотря на то, что алгоритм построения триангуляций Делоне в евклидовых пространствах произвольной конечной размерно-

¹Korotov S. Some geometric results for tetrahedral finite elements. // Proceedings of the International Conference NUMGRID-2010. — М. : Фолиум, 2010. — С. 41 – 46.

²Garanzha V.A. Discrete Extrinsic Curvatures and Approximation of Surfaces by Polar Polyhedra // Computational Mathematics and Mathematical Physic. 2010. Vol. 50. № 1. — С. 65 – 92.

³Rajan V.T. Optimality of the Delaunay triangulation in \mathbb{R}^d . Discrete Computational Geometry. 1994. Vol. 12. — С. 189 – 202.

⁴Pottmann H., Krasauskas R., Namann B., Joy K., Seibold W. On Piecewise Linear Approximation of Quadratic Functions. // Journal for Geometry and Graphics. 2000. Vol. 4. № 1. С. 31 – 53.

⁵Shewchuk J.R. What is a Good Linear Element? Interpolation, Conditioning, and Quality Measures / J.R. Shewchuk // In Proceedings, 11th International Meshing Roundtable (September 2002). Ithaca, New York, USA : Sandia National Laboratories, 2002. С. 115 – 126.

⁶Клячин В.А. C^1 -аппроксимация поверхностей уровня функций, заданных на нерегулярных сетках / В.А. Клячин, Е.А. Пабат // Сиб. журн. индустр. матем. 2010. № 13 (2). С. 69 – 78.

⁷Миклюков В.М. Введение в негладкий анализ. Изд. 3, перераб. / В.М. Миклюков. Волгоград : изд-во ВолГУ. 2011. С. 77.

сти был предложен ещё в 1934 году самим Б.Н. Делоне¹, известные алгоритмы построения триангуляции поверхности предполагают построение обычной плоской триангуляции с последующим проецированием её на поверхность (см., например, работы А.В. Скворцова и Н.С. Мирзы²). Ясно, что проекция плоской триангуляции Делоне на поверхность в общем случае не будет проявлять никаких замечательных свойств, характерных для триангуляции Делоне. Таким образом, возникает задача построения триангуляции Делоне на поверхности с сохранением свойств, присущих её классическому варианту.

Объектом исследования данной диссертационной работы являются триангуляции поверхностей.

Цель работы — исследование сходимости градиентов кусочно-аффинной аппроксимации к градиентам исследуемых функций для триангуляций плоских, многомерных областей и поверхностей, в том числе в пространствах с неевклидовой метрикой.

Задача исследования состоит в получении априорных оценок модуля разности градиентов для симплексов в евклидовой метрике и метрике поверхностей с последующим построением с их помощью оценок модуля разности градиентов для триангуляций.

Методика исследования основана на построении верхних оценок модуля разности градиентов кусочно-аффинной аппроксимации и исследуемых с её помощью функций класса C^1 , C^2 или $C^{2,\alpha}$ -решений эллиптических уравнений.

Научная новизна исследования. Все результаты, полученные в работе, являются новыми.

Результаты, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. Априорные оценки разности градиентов в треугольнике и тетраэдре для непрерывно дифференцируемых функций в евклидовой метрике и в метрике поверхности, содержащей их вершины.
2. Оценки погрешности аппроксимации градиентов в евклидовой метрике для триангуляции Делоне плоской области и остроугольной триангуляции в пространстве.
3. Оценки погрешности аппроксимации градиентов для остроугольной триангуляции в метрике поверхности.

¹Delaunay B.N. Sur la sphère vide. A la mémoire de Georges Voronoï / B.N. Delaunay // Известия АН СССР. 1934. № 6. С. 793 – 800 / Перевод с фр. А. Ю. Игумнов в сб. Записки семинара “Сверхмедленные процессы”. Вып. 1. Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2008. С. 147 – 153.

²Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и её применение / А.В. Скворцов. Томск : Изд-во Томского ун-та, 2002. С. 96.

4. Теоремы о сходимости градиентов кусочно-аффинной аппроксимации, построенной над триангуляциями ε -сетей в \mathbb{R}^n , к градиентам C^2 -гладкой функции.
5. Обобщение условия пустого шара на случай n -мерных гиперповерхностей в $(n+1)$ -мерном пространстве. Оценка погрешности вычисления градиентов для триангуляций Делоне двумерных поверхностей.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в задачах, связанных с моделированием поверхностей, в частности, в геодезии и картографии, в задачах компьютерной графики (построение полигональных моделей и связанные вопросы), различных пространственных задачах, а также могут быть использованы специалистами при построении расчётных нерегулярных сеток для решения различных вычислительных задач. Материал диссертации может служить основой спецкурсов, написания курсовых, дипломных и других научных работ в высших учебных заведениях, где проводятся исследования по данной тематике.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на международных и российских конференциях: девятой международной школе-конференции “Теория функций, её приложения и смежные вопросы” (Казань, 1 – 7 июля 2009 г.), 15-й Саратовской зимней школе “Современные проблемы теории функций и их приложения” (Саратов, 27 января – 3 февраля 2010 г.), семинаре механико-математического факультета Томского государственного университета под руководством проф. А. В. Скворцова, семинаре-совещании “Сети в анизотропных пространствах” (Волгоград, 21 – 23 апреля 2011 г.), десятой международной школе-конференции “Теория функций, её приложения и смежные вопросы” (Казань, 30 июня – 6 июля 2011 г.), 16-й Саратовской зимней школе “Современные проблемы теории функций и их приложения” (Саратов, 27 января – 3 февраля 2012 г.), а также на конференциях и семинарах Волгоградского государственного университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [10] общим объёмом 2,9 пл. При этом статьи [1], [2] опубликованы в журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов научных исследований.

Структура и объём диссертации. Диссертация изложена на 92 страницах и состоит из введения, трёх глав и списка литературы. Библиография

диссертации содержит 44 наименования, включая работы автора.

Краткое содержание работы

Все утверждения сохраняют принятую в основном тексте нумерацию.

Во **введении** даётся обзор литературы по вопросам, связанным с темой диссертации, а также кратко излагаются основные результаты диссертации.

Глава 1. “Априорные оценки погрешности аппроксимации градиента”

§1.1 носит вводный характер. В нём сформулированы основные понятия и определения, необходимые для изложения результатов.

В §1.2 формулируется основной результат первой главы и следствия из него.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая область в \mathbb{R}^n . Для функций класса $C^1(D)$ через $\bar{\nabla}f(x)$ обозначим вектор градиента в точке $x \in D$, а производную по направлению произвольного вектора ξ — через скалярное произведение векторов $\bar{\nabla}f(x)$ и ξ :

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \langle \bar{\nabla}f(x), \xi \rangle.$$

Если в \mathbb{R}^n имеется набор точек p_0, p_1, \dots, p_k , где $1 \leq k \leq n$, то обозначим через $S(p_0, \dots, p_k)$ k -мерный симплекс с вершинами в этих точках. Будем предполагать, что векторы $p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_k - p_0$ линейно независимы.

По отношению к плоскости симплекса S произвольный вектор $v \in \mathbb{R}^n$ может быть разложен в сумму

$$v = v^T + v^N,$$

где v^T — ортогональная проекция вектора v на плоскость симплекса S , а v^N — ортогональное дополнение проекции v .

Зафиксируем произвольный симплекс $S \subset D$. Для функции $f \in C^1(D)$ построим аффинную функцию $L_f(x)$ вида

$$L_f(x) = \langle a, x \rangle + b, \quad a \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}$$

такую, что

$$f(p_i) = L_f(p_i), \quad \text{при } i = 0, \dots, k \text{ и } a^N = 0.$$

Пусть вектор-функция $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывна. Тогда функцию

$$\omega(F, t) = \sup\{|F(x_1) - F(x_2)| : x_1, x_2 \in D, \text{ и } |x_1 - x_2| < t\}$$

назовём модулем непрерывности функции F .

Величину

$$\delta_f(p_0) = |\bar{\nabla}f(p_0) - \bar{\nabla}L_f(p_0)|$$

назовём погрешностью вычисления $\bar{\nabla} f(p_0)$ посредством функции $L_f(x)$.

Указанную величину для любой непрерывно дифференцируемой можно оценить через интеграл от модуля её непрерывности. Ниже приводятся соответствующие оценки для треугольника и тетраэдра в обычной метрике и в метрике поверхности.

Обозначим

$$I(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \omega(\bar{\nabla} f, t) dt + \omega(\bar{\nabla} f, \tau).$$

Теорема 1.2.1. Пусть $S \subset D$ — некоторый треугольник с заданной в нём аффинной функцией $L_f(x)$, построенной для некоторой непрерывно дифференцируемой в области D функции $f(x)$. Тогда, если φ_S и d_S^+ обозначают значение угла при вершине p_0 и длину максимальной стороны треугольника S соответственно, то справедлива оценка:

$$\left| (\bar{\nabla} f(p_0) - \bar{\nabla} L_f(p_0))^T \right| \leq \frac{3I(d_S^+) - \omega(\bar{\nabla} f, d_S^+)}{\sin \varphi_S}.$$

Теорема 1.2.2. Пусть $k = 2$ и вершины треугольника S лежат на двумерной гладкой поверхности $F \subset D \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что угол между плоскостью этого треугольника и касательной плоскостью к поверхности в точке p_0 равен α , $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Если функция $f \in C^1(D)$, то выполнено:

$$|\nabla f(p_0) - \nabla L_f(p_0)| \leq \frac{3I(d_S^+) - \omega(\bar{\nabla} f, d_S^+)}{\sin \varphi_S} + \sin \alpha \sup_{x \in D} |\bar{\nabla} f(x)|.$$

Здесь ∇ обозначает градиент дифференцируемой функции в метрике поверхности F .

Теорема 1.2.3. Пусть $S \subset D$ — некоторый тетраэдр с заданной в нём аффинной функцией $L_f(x)$, построенной для некоторой непрерывно дифференцируемой в области D функции $f(x)$. Обозначим через θ_S величину угла между вектором $p_2 - p_0$ и двумерной гранью, лежащей напротив вершины p_2 , через φ_S величину угла при вершине p_1 треугольника $p_0 p_1 p_3$ и через d_S^+ длину максимального ребра тетраэдра S . Тогда имеет место оценка:

$$\left| (\bar{\nabla} f(p_0) - \bar{\nabla} L_f(p_0))^T \right| \leq \frac{8I(d_S^+)}{\sin \varphi_S \sin \theta_S}$$

Теорема 1.2.4. Пусть вершины тетраэдра S лежат на трехмерной гладкой поверхности $F \subset D \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что угол между плоскостью тетраэдра и касательной плоскостью к поверхности в точке p_0 равен

α , $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Если функция $f \in C^1(D)$, то выполнено:

$$|\nabla f(p_0) - \nabla L_f(p_0)| \leq \frac{8I(d_S^+)}{\sin \varphi_S \sin \theta_S} + \sin \alpha \sup_{x \in D} |\overline{\nabla} f(x)|.$$

Глава 2. “Аппроксимационные свойства триангуляций”

В данной главе приводятся оценки аппроксимации градиентов для различных типов триангуляций, а также формулируются теоремы о сходимости градиентов кусочно-аффинной аппроксимации к исследуемой с её помощью функции.

Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^n$ задана последовательность конечных наборов точек. Для каждого такого набора рассмотрим его триангуляцию.

Определение 2.0.1. Триангуляцией конечного набора точек назовём набор не имеющих общих внутренних точек симплексов с вершинами из этого набора, образующих покрытие участка пространства, ограниченного выпуклой оболочкой рассматриваемого набора точек.

Определение 2.0.2. Триангуляцию будем называть остроугольной, если для каждого симплекса углы между двумя любыми смежными его гранями острые.

Определение 2.0.3. Триангуляция набора точек называется триангуляцией Делоне, если описанная сфера всякого симплекса триангуляции не содержит внутри себя каких-либо точек из этого набора.

Для всякого симплекса S длину максимальной его стороны обозначим d_S^+ . Для некоторой триангуляции T положим

$$d^+(T) = \max_{S \in T} d_S^+.$$

Будем рассматривать такие наборы точек P_m и их триангуляций T_m , для которых выполнены следующие условия:

$$d^+(T_m) \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ и} \quad (2.1)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} : \forall m > m_0 \text{ и } \forall x \in D \exists a \in P_m : |a - x| < \varepsilon. \quad (2.2)$$

Условие (2.2) означает, что P_m является ε -сетью при всех достаточно больших m .

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$ класса $C^1(D)$ и для каждого m построим кусочно-аффинную функцию $f_m(x)$ такую, что $f_m(a) = f(a)$ для любой точки $a \in P_m$.

Заметим, что при выполнении условий (2.1) и (2.2) последовательность $f_m(x)$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на каждом компактном подмножестве $K \subset D$. Но эти условия не обеспечивают сходимости производных функций $f_m(x)$ к производным функции $f(x)$ даже почти всюду или по норме в пространствах Соболева $W_{loc}^{1,p}(D)$. Это подтверждается хорошо известным примером Шварца.

Далее будем предполагать, что функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ является C^2 -гладкой в области $D \subset \mathbb{R}^n$, причём будем считать, что все вторые производные ограничены в D . Тогда найдётся постоянная $M > 0$ такая, что модуль непрерывности её градиента $\omega(\bar{\nabla}f, t) \leq M \cdot t$.

В §2.1 рассматриваются аппроксимационные свойства триангуляций Делоне плоских областей.

Оценка погрешности аппроксимации градиента для триангуляции Делоне плоской ε -сети может быть получена как следствие теоремы 1.2.1.

Теорема 2.1.1. *Пусть задана триангуляция Делоне T конечного набора точек, являющегося ε -сетью в плоской области $D \subset \mathbb{R}^2$. Пусть точка p является вершиной триангуляции T такой, что для некоторого треугольника из T , имеющего вершиной эту точку, описанный круг полностью лежит в области D . Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$|\bar{\nabla}f(p) - \bar{\nabla}L_f(p)| \leq 14M\varepsilon.$$

Пусть G_m — множество точек, составляющее вершины и рёбра симплексов триангуляции T_m .

Следствие 2.1.1. *Пусть $f(x)$ — C^2 -гладкая в области $D \subset \mathbb{R}^2$ и над последовательностью T_m триангуляций Делоне области D , удовлетворяющих условиям (2.1) и (2.2) построена её кусочно-аффинная аппроксимация $f_m(x)$. Тогда справедливо равенство:*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\nabla}f_m(x) = \bar{\nabla}f(x), \quad x \in D \setminus \bigcup_m G_m. \quad (2.3)$$

В §2.2 рассматриваются аппроксимационные свойства остроугольных триангуляций в пространстве.

В трёхмерном евклидовом пространстве выполнение условия Делоне не гарантирует сходимости градиентов аппроксимации к градиентам исследуемой функции. Однако существует класс триангуляций (остроугольные триангуляции), для которого можно получить конечную оценку разности градиентов как следствие теоремы 1.2.3. Если мы будем рассматривать остроугольные триан-

гуляции ε -сетей с узлами в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^3$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ оценка также устремится к нулю.

Теорема 2.2.1. Пусть задана остроугольная триангуляция T конечного набора точек, являющегося ε -сетью в области $D \subset \mathbb{R}^3$. Пусть точка p является вершиной триангуляции T . Тогда

$$|\bar{\nabla} f(p) - \bar{\nabla} L_f(p)| \leq \frac{48M\varepsilon}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}.$$

Следствие 2.2.2. Пусть $f(x) - C^2$ -гладкая в области $D \subset \mathbb{R}^3$ и над последовательностью T_m остроугольных триангуляций области D , удовлетворяющих условиям (2.1) и (2.2) построена её кусочно-аффинная аппроксимация $f_m(x)$. Тогда справедливо равенство:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\nabla} f_m(x) = \bar{\nabla} f(x), \quad x \in D \setminus \bigcup_m G_m. \quad (2.4)$$

В §2.3 рассматриваются аппроксимационные свойства триангуляций в \mathbb{R}^n .

Пусть D — некоторая область в \mathbb{R}^n . Зафиксируем некоторую маленькую величину $\delta > 0$. Будем говорить, что триангуляция T является **триангуляцией с углами, отделёнными от нуля**, если для всякого невырожденного симплекса $S \in T$ ни один из его двугранных углов не будет меньше δ . Рассмотрим последовательность T_m таких триангуляций области D . Положим также

$$d^-(T_m) = \min_{S \in T_m} d_S^-,$$

где d_S^- — длина самого короткого ребра симплекса S .

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3.1. Предположим, что для области $D \subset \mathbb{R}^n$, последовательности наборов точек P_m и их триангуляций T_m с углами, отделёнными от нуля, выполнены условия (2.1) и (2.2). Тогда для любой функции $f \in C^2(D)$ и любой компактно вложенной подобласти $U \Subset D$ имеет место неравенство

$$\max_{s \in T_m, S \in U} \max_{x \in S} |\bar{\nabla} f(x) - \bar{\nabla} f_m(x)| \leq d^+(T_m) \lambda \left(1 + \frac{n}{\sin^{n+1} \delta} \right).$$

Следствие 2.3.1. Пусть $f(x) - C^2$ -гладкая в области $D \subset \mathbb{R}^n$ и над последовательностью T_m триангуляций с углами, отделёнными от нуля, области D , удовлетворяющих условиям (2.1) и (2.2) построена её кусочно-аффинная аппроксимация $f_m(x)$. Тогда справедливо равенство:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\nabla} f_m(x) = \bar{\nabla} f(x), \quad x \in D \setminus \bigcup_m G_m. \quad (2.9)$$

В §2.4 оценка разности градиентов уточняется для функций, являющихся решениями эллиптических уравнений вида

$$Lu = a^{ij}D_{ij}u + b^iD_iu + cu = f,$$

где $a^{ij} = a^{ij}(x)$, $b^i = b^i$, $c = c(x)$ — функции со значениями из \mathbb{R} , $f \in C^\alpha(\Omega)$, а Ω — любое открытое подмножество в \mathbb{R}^n .

Зафиксируем некоторый n -мерный симплекс $S \subset \mathbb{R}^n$ и свяжем с ним ортонормированный базис $\{e_i^S\}$ как результат процесса ортогонализации Грамма-Шмидта векторов $\{p_i - p_0\}$, $i = 1, \dots, n$. Пусть φ_k обозначает угол между вектором $p_k - p_0$ и плоскостью, натянутой на векторы e_1, \dots, e_{k-1} , $k = 2, \dots, n$; $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, а θ_k обозначает угол между гранью S_k и плоскостью Π_k .

Пусть $u_m(x)$ — кусочно-аффинная аппроксимация u такая, что в узлах триангуляции её значения совпадают со значениями u . Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4.2. *Предположим, что для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, последовательности наборов точек P_m и их триангуляций T_m выполнены условия (2.1) и (2.2). Тогда для любой ограниченной функции $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, являющейся решением эллиптического уравнения $Lu = f$ в Ω с правой частью $f \in C^\alpha(\Omega)$, и любой компактно вложенной подобласти $U \Subset \Omega$ имеет место неравенство*

$$\begin{aligned} & \max_{S \in T_m, S \subset U} \max_{x \in S} |\nabla u(x) - \nabla u_m(x)| \leq \\ & \leq d^+(T_m)\tau \left(1 + \max_{S \in T_m, S \subset U} \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\sin \varphi_i| |\cos \theta_i|} \right), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$\tau = C_1 \left(\sup_{x \in \Omega} |u| + \sup_{x \in \Omega} d_x^2 |f(x)| + \sup_{x, y \in \Omega, x \neq y} d_{x,y}^{2+\alpha} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \right), \quad C_1 = \text{const.}$$

В §2.5 рассматриваются аппроксимационные свойства остроугольных триангуляций трёхмерных поверхностей.

Рассмотрим некоторую n -мерную гиперповерхность F в пространстве \mathbb{R}^{n+1} , заданную графиком C^2 -гладкой функции $x_{n+1} = u(x_1, \dots, x_n)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$. Определим отображение проекции

$$\pi: F \rightarrow D, \quad \pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n).$$

Пусть P — некоторый конечный набор точек в \mathbb{R}^{n+1} , лежащих на поверхности F и таких, что любой симплекс с вершинами из P является невырожденным. Обозначим через $p' = \pi(p)$ проекцию точки p в область D . Будем

рассматривать триангуляцию поверхности F n -мерными симплексами, построенными на множестве P . **Триангуляцией поверхности** назовём такой набор T n -мерных симплексов, что

1. Каждая точка p заданного набора является вершиной одного из симплексов $S \in T$.
2. Каждая вершина любого симплекса $S \in T$ является одной из точек набора P .
3. Внутренность пересечения любых двух симплексов пуста.
4. Проекция системы симплексов $S_j \in T$, $j = 1, \dots, m$ является обычной триангуляцией набора точек P' в \mathbb{R}^n . Здесь $P' = \{p' \mid p' = \pi(p); p \in P\}$.

Будем рассматривать последовательность таких наборов точек P_m , $m = 1, 2, \dots$, расположенных на поверхности F , и соответствующих им триангуляций T_m , удовлетворяющих условиям (2.1) и (2.2). Для каждого m построим кусочно-аффинную функцию $f_m(x)$ такую, что $f_m(a) = f(a)$ для любой точки $a \in P_m$.

Теорема 2.5.1. Пусть D — область, расположенная на некоторой трёхмерной поверхности F . Рассмотрим остроугольную триангуляцию T конечного набора точек P , являющегося ε -сетью в области D . Пусть точка p является вершиной триангуляции T , а α — угол между плоскостью тетраэдра S и касательной плоскостью к поверхности F в точке p . Тогда

$$|\nabla f(p) - \nabla L_f(p)| \leq \frac{48M\varepsilon}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} + \sin \alpha \sup_{x \in D} |\bar{\nabla} f(x)|.$$

Следствие 2.5.1. Для построенной выше последовательности функций $f_m(x)$, $x \in D$ над остроугольными триангуляциями T_m трёхмерной поверхности F , удовлетворяющими условиям (2.1) и (2.2), выполнено равенство:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \nabla f_m(x) = \nabla f(x), \quad x \in D \setminus \bigcup_m G_m. \quad (2.12)$$

Замечание. Для остроугольных триангуляций двумерных поверхностей также можно получить подобную оценку. Однако в двумерном случае возможно построение оценки для более общего класса триангуляций — триангуляций Делоне. Мы вернёмся в этому вопросу в §3.3.

Результаты данной главы были опубликованы в работах [1], [3] — [6].

Глава 3. “Обобщения условия Делоне”

В данной главе формулируются некоторые обобщения условия пустого шара. С точки зрения задачи аппроксимации производных такие обобщения могут оказаться полезными в зависимости от конкретной вычислительной задачи.

В §3.1 рассматривается такой вариант обобщённой триангуляции Делоне, когда условие описанного шара заменяется на аналогичное условие относительно другого выпуклого множества.

Рассмотрим в \mathbb{R}^n семейство выпуклых множеств $F(x, r)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$ и множество точек P , расположенных в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть S — произвольный невырожденный симплекс в \mathbb{R}^n . Определим **описанное множество** (если оно существует) $F(S)$ из семейства $F(x, r)$ как множество, чья граница содержит все вершины симплекса (а значит, $F(S)$ содержит весь симплекс в силу выпуклости $F(x, r)$).

Рассмотрим произвольную триангуляцию множества точек P .

Определение 3.1.1. Будем говорить, что триангуляция равномерна относительно семейства $F(x, r)$, если для любого симплекса S этой триангуляции внутренность множества $F(S)$ не содержит вершин других симплексов.

Определение 3.1.2. Будем говорить, что триангуляция локально равномерна относительно семейства $F(x, r)$, если для любого симплекса S этой триангуляции внутренность множества $F(S)$ не содержит вершин других симплексов, имеющих общую $(n - 1)$ -мерную грань.

Теорема 3.1.1.¹ Для того, чтобы для семейства выпуклых множеств $F(x, r)$ из локальной равномерности следовала глобальная равномерность, достаточно, чтобы указанное семейство обладало свойством: для любого симплекса S существует и единственно описанное множество $F(S)$.

Можно привести пример семейства описанных множеств, отличного от шаров, удовлетворяющего сформулированным выше критериям.

Теорема 3.1.2. Пусть $\Phi(x)$ — строго выпуклая вниз функция, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда семейство выпуклых множеств

$$F(x, r) = \{y : \Phi(y) = \langle \nabla \Phi(x), y - x \rangle + r\}$$

удовлетворяет условию теоремы 3.1.1.

Замечание. Обычная триангуляция Делоне получается в случае $\Phi(x) = |x|^2$.

¹Эта теорема была доказана в следующей работе: Клячин, В.А. Об одном обобщении условия Делоне / В.А. Клячин // Вестник Томского государственного университета, Математика и механика, 2008, № 1 (2). С. 48 – 50.

В §3.2 рассматривается вариант обобщения понятия триангуляции Делоне на случай пространства с метрикой.

Рассмотрим произвольный конечный набор точек P в некоторой области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ с метрикой и обозначим квадрат элемента длины

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j.$$

Здесь $g_{ij} \in C(\Omega)$, и в каждой точке $x \in \Omega$ образуют положительно определённую матрицу.

Определение 3.2.1. Для произвольного симплекса $S = (p_1, \dots, p_k)$ описанным шаром $B(S)$ в метрике назовём такой шар $B(x_0, r)$, где x_0 — центр шара, а r — его радиус, что $p_i \in \partial B(x_0, r)$ и x_0 лежит в плоскости симплекса $S(p_0, \dots, p_k)$.

Далее будем рассматривать только такие метрики, которые определены элементом длины ds и шары в метрике являются выпуклыми множествами. Также предположим, что для каждого симплекса S его описанный шар существует и единственен.

Определение 3.2.2. Если внутри шара в метрике, описанного вокруг любого построенного симплекса триангуляции над P , не попадает ни одна из точек этого множества, то будем говорить, что триангуляция удовлетворяет условию Делоне в метрике и называется триангуляцией Делоне в метрике.

Определение 3.2.3. Будем говорить, что для двух соседних симплексов с вершинами из P выполнено условие пустоты шара, если описанный шар одного симплекса не содержит внутри себя вершин другого симплекса.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2.1. Если для любой пары соседних симплексов триангуляции T выполнено условие пустоты шара, то T — триангуляция Делоне в метрике.

Для триангуляций ε -сетей в метрике можно построить оценку разности градиентов. Будем использовать обозначения, принятые во второй главе. Сформулируем условия, аналогичные (2.1) и (2.2):

$$\text{При } m \rightarrow \infty \quad d^+(T_m) = \max_{S \in T_m} \max_{k,l} d(p_k, p_l) \rightarrow 0, \text{ где } p_k, p_l \in S, k \neq l; \quad (3.1)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} : \forall m > m_0 \text{ и } \forall x \in D \exists a \in P_m : d(a, x) < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Далее будем рассматривать триангуляции в метрике, удовлетворяющие данным условиям. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2.4. Предположим, что для области $D \subset \mathbb{R}^n$ с некоторой метрикой для последовательностей наборов точек P_m и соответствующих им

триангуляций T_m выполнены условия (3.1) и (3.2). Пусть $U \in D$ — некоторая подобласть такая, что для некоторого натурального k_0

$$U \cap \left(\bigcup_{S \in T_m} S \right) \in D \text{ при всех } m > k_0.$$

Тогда при $m > k_0$ выполнено следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \max_{S \in T_m, S \subset U} \max_{x \in S} |\nabla f(x) - \nabla f_m(x)|_g \leq \\ & \leq \lambda d^+(T_m) \left(1 + n \sqrt{M_g \max_{S \in T_m, S \subset U} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j \frac{1}{|\sin \varphi_i| |\cos \theta_i|} \right)^2} \right), \end{aligned}$$

где M_g — максимальное собственное значение матрицы $\|g_{ij}\|$.

Для триангуляций Делоне в метрике также справедливо утверждение, касающееся сходимости градиентов.

Теорема 3.2.5. Для построенной выше последовательности функций $f_m(x)$, $x \in D$ над двумерными триангуляциями Делоне в T_m в метрике, удовлетворяющими условиям (3.1) и (3.2), выполнено равенство:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\nabla} f_m(x) = \bar{\nabla} f(x), \quad x \in D \setminus \bigcup_m G_m. \quad (3.7)$$

В §3.3 строится обобщение условия Делоне на случай n -мерной гиперповерхности в $(n+1)$ -мерном пространстве. Для триангуляций Делоне двумерных поверхностей сформулированы и доказаны теоремы об оценке разности градиентов, а также о сходимости градиентов.

Пусть P — некоторый набор точек в \mathbb{R}^{n+1} , лежащих на гиперповерхности F и таких, что любой симплекс в вершинах из P является невырожденным. Пусть S — некоторый n -мерный симплекс в \mathbb{R}^{n+1} .

Определение 3.3.1. Описанным шаром $B(S)$ для S назовём $(n+1)$ -мерный шар, содержащий на своей границе все вершины симплекса и имеющий наименьшее возможное значение радиуса.

Определение 3.3.2. Будем говорить, что триангуляция поверхности F удовлетворяет условию Делоне, если для любого симплекса триангуляции описанный шар в смысле определения 3.3.1 не содержит внутри себя ни одной вершины триангуляции.

Определение 3.3.3. Будем говорить, что для двух n -мерных симплексов, пересекающихся по общей $(n-1)$ -мерной грани выполнено условие пустоты

шара, если $(n + 1)$ -мерный описанный шар одного симплекса не содержит внутри себя вершин другого симплекса.

С точки зрения построения оптимальных алгоритмов триангуляции поверхностей, а также задачи аппроксимации градиента в метрике поверхности, важным свойством триангуляции Делоне является свойство утверждающее, что выполнение условия Делоне локально непременно влечёт выполнение его глобально. Следующая теорема обобщает это свойство на случай триангуляции гладких гиперповерхностей, заданных графиком функции. Но в отличие от плоского случая необходимо выполнение дополнительного условия.

Условие α). Рассмотрим произвольный n -мерный симплекс S триангуляции и построим пересечение U_S всех полупространств, содержащих S , и которые определяются гиперплоскостями $(n + 1)$ -мерных сфер, являющихся пересечениями описанной сферы симплекса S и его соседнего. Таких полупространств будет не более $n + 1$ для каждого симплекса S . Мы предполагаем, что никакая вершина триангуляции не принадлежит внутренности U_S для всякого S .

Заметим, что в плоском случае, когда вершины триангуляции лежат в одной гиперплоскости, условие α очевидно выполняется.

Теорема 3.3.1. Пусть n -мерная гиперповерхность F задана над выпуклой областью $D \subset \mathbb{R}^n$. Триангуляция гиперповерхности F , для которой любая пара симплексов, пересекающихся по общей $(n - 1)$ -мерной грани, удовлетворяет условию пустоты шара, является триангуляцией Делоне.

Ранее в §2.5 была получена оценка погрешности аппроксимации градиента для остроугольных триангуляций трёхмерных поверхностей. Теперь можно из теоремы 1.2.3 получить соответствующую оценку для триангуляций Делоне двумерных поверхностей. Рассмотрим последовательность наборов точек P_m , $m = 1, 2, \dots$, расположенных на поверхности F , и соответствующих им триангуляций T_m , удовлетворяющих условиям (2.1) и (2.2). Для каждого m построим кусочно-аффинную функцию $f_m(x)$ такую, что $f_m(a) = f(a)$ для любой точки $a \in P_m$.

Теорема 3.3.4. Пусть задана триангуляция Делоне T конечного набора точек, являющегося ε -сетью области D , расположенной на двумерной поверхности $F \in \mathbb{R}^3$. Пусть точка p является вершиной триангуляции T такой, что для некоторого треугольника S из T , имеющего вершиной эту точку, пересечение его описанной окружности с поверхностью F полностью лежит в области D . Пусть α — угол между плоскостью треугольника S и касательной плоскостью к гиперповерхности F в точке p . Тогда справедливо

следующее неравенство:

$$|\nabla f(p) - \nabla L_f(p)| \leq 14M\varepsilon + \sin \alpha \sup_{x \in D} |\overline{\nabla} f(x)|.$$

Следствием этой теоремы будет утверждение о сходимости градиентов кусочно-аффинной функции $f_m(x)$ к градиентам исследуемой с помощью неё функции $f(x)$.

Следствие 3.3.1. *Для построенной выше последовательности функций $f_m(x)$, $x \in D$ над триангуляциями Делоне двумерной поверхности F , удовлетворяющими условиям (2.1) и (2.2), выполнено равенство:*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \nabla f_m(x) = \nabla f(x), \quad x \in D \setminus \bigcup_m G_m. \quad (3.8)$$

В §3.4 рассматриваются триангуляции Делоне с коэффициентом сжатия сфер.

Пусть P — произвольный конечный набор точек некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$.

Зафиксируем число $0 < \eta \leq 1$. Пусть S — произвольный симплекс в \mathbb{R}^n .

Определение 3.4.1. *Шар B_S^η с центром, совпадающим с центром описанного около S шара радиуса R_S и радиусом ηR_S будем называть η -шаром симплекса S . В случае \mathbb{R}^2 будем называть B_S^η η -кругом.*

Определение 3.4.2. *Если внутри η -шара любого построенного симплекса выпуклой триангуляции заданного набора точек не попадает ни одна из этих точек, то будем говорить, что триангуляция удовлетворяет η -условию Делоне и называется η -триангуляцией Делоне.*

Необходимость введения такой триангуляции связана, в частности, с особенностями машинной проверки условия Делоне — точность вычислительных машин ограничена. С этой стороны η -триангуляция Делоне может быть охарактеризована как триангуляция Делоне, построенная с некоторой точностью, отражаемой значением параметра η .

Для триангуляции с коэффициентом сжатия описанной окружности можно построить оценку аппроксимации градиента функции $f(x)$, $x \in D$, C^2 -гладкой в области D . Здесь и далее мы будем использовать обозначения, принятые во второй главе.

Теорема 3.4.1. *Пусть задана η -триангуляция Делоне T конечного набора точек, являющегося ε -сетью в плоской области $D \subset \mathbb{R}^2$. Пусть точка p является вершиной триангуляции T такой, что для некоторого треугольника из T , имеющего вершиной эту точку, его η -круг полностью лежит в*

области D . Тогда

$$|\overline{\nabla} f(p) - \overline{\nabla} L_f(p)| \leq \frac{14}{\eta} M\varepsilon.$$

Следствие 3.4.1. Пусть $f(x)$ — C^2 -гладкая в области $D \subset \mathbb{R}^2$ и над последовательностью T_m η -триангуляций Делоне области D , удовлетворяющих условиям (2.1) и (2.2) построена её кусочно-аффинная аппроксимация $f_m(x)$. Тогда справедливо равенство:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\nabla} f_m(x) = \overline{\nabla} f(x), \quad x \in D \setminus \bigcup_m G_m.$$

Результаты данной главы были опубликованы в работах [2], [4] — [9].

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность за полезные обсуждения и замечания своему научному руководителю, д. ф.-м. н. В.А. Клячину, а также к. ф.-м. н., доценту В.В. Попову, к. ф.-м. н. Н.М. Полубояровой и всем участникам семинара “Сверхмедленные процессы” под руководством д. ф.-м. н., профессора В.М. Миклюкова. Хотелось бы отдельно выразить свою искреннюю признательность декану факультета математики и информационных технологий ВолГУ, д. ф.-м. н., профессору А.Г. Лосеву за внимательное отношение и энергичную поддержку.

Публикации по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включённых в список ВАК:

- [1] Широкий, А.А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей [Текст] / В.А. Клячин, А.А. Широкий // Вестник Самарского государственного университета. Естественно-научная серия. — 2010. № 2010 / 4 (78). — С. 51 – 55. — 0,3 п. л.
- [2] Широкий, А.А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и её аппроксимационные свойства [Текст] / В.А. Клячин, А.А. Широкий // Известия вузов. Математика. — 2010. № 1. — С. 31 – 39. — 0,5 п. л.

Публикации в других изданиях:

- [3] Широкий, А.А. Аппроксимационные свойства остроугольных триангуляций [Текст] / В.А. Клячин, А.А. Широкий // Материалы научной сессии,

- г. Волгоград, 26 – 30 апр. 2010 г. Вып. 6. Математика и информационные технологии. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2010. — С. 40 – 44. — 0,3 п. л.
- [4] Широкий, А.А. Аппроксимационные свойства триангуляции Делоне [Текст] / В.А. Клячин, А.А. Широкий // Записки семинара “Сверхмедленные процессы”. Вып. 5. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2010. — С. 8 – 14. — 0,5 п. л.
- [5] Широкий, А.А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей [Текст] / В.А. Клячин, А.А. Широкий // Материалы 15-й Саратовской зимней школы “Современные проблемы теории функций и их приложения”. — Саратов : Изд-во СГУ, 2010. — С. 89. — 0,1 п. л.
- [6] Широкий, А.А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и её аппроксимационные свойства [Текст] / В.А. Клячин, А.А. Широкий // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика, физика. — 2009. № 12. — С. 39 – 44. — 0,4 п. л.
- [7] Широкий, А.А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и её аппроксимационные свойства [Текст] / В.А. Клячин, А.А. Широкий // Материалы Девятой международной научной школы-конференции “Теория функций, её приложения и смежные вопросы”. — Казань : Казан. мат. об-во, 2009. — С. 155 – 157. — 0,2 п. л.
- [8] Широкий, А.А. Триангуляция Делоне с коэффициентом сжатия сфер [Текст] / В.А. Клячин, А.А. Широкий // XV региональная конференция молодых исследователей Волгоградской области, 9 – 12 нояб. 2010. Вып. 4. Физика и математика. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2011. — С. 71 – 74. — 0,3 п. л.
- [9] Широкий, А.А. Условие почти пустого шара. [Текст] / А.А. Широкий // Материалы Десятой международной научной школы-конференции “Теория функций, её приложения и смежные вопросы”. — Казань : Казан. мат. об-во, 2011. — С. 387 – 389. — 0,2 п. л.
- [10] Широкий, А.А. Применение триангуляции Делоне двумерной поверхности к примеру Шварца [Текст] / А.А. Широкий // Материалы 16-й Саратовской зимней школы “Современные проблемы теории функций и их приложения”. — Саратов : Изд-во СГУ, 2012. — С. 200. — 0,1 п. л.