

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*На правах рукописи*

СТРИГУН Мария Владимировна

**НЕКЛАССИЧЕСКИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
С НЕЛОКАЛЬНЫМИ И НЕЛИНЕЙНЫМИ  
ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы  
и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Казань  
2012

Работа выполнена на кафедре уравнений математической физики механико-математического факультета Самарского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор ПУЛЬКИНА Людмила Степановна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор РЕПИН Олег Александрович

кандидат физико-математических наук,  
доцент УТКИНА Елена Анатольевна

Ведущая организация: Ульяновский государственный  
технический университет

Защита диссертации состоится "22" марта 2012 года в 16 часов 30 минут на заседании совета Д 212.081.10 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, Казань, ул. Профессора Нужи́на, 1/37, ауд. 337.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлёвская, 18.

Автореферат разослан " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2012 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Липачёв Е. К.

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Современный уровень развития естествознания приводит к необходимости обобщения классических задач математической физики, а также к постановке качественно новых, неклассических задач. Изучение некоторых физических процессов сталкивается с трудностями, обусловленными невозможностью производить непосредственные измерения на границе области протекания процесса. Такая ситуация может возникнуть при изучении процессов, происходящих в турбулентной плазме, некоторых диффузионных процессов, влагопереноса в капиллярно-пористой среде. В этих случаях математическое моделирование приводит к задачам с нелокальными условиями.

Одним из фундаментальных аспектов исследования различного рода явлений в сложных системах является необходимость отказа от упрощений и ограничений, приводящих к линейной модели. В том случае, когда акцент в исследованиях делается на поведение системы на границе со средой, математическое моделирование решаемой проблемы приводит к задаче с неклассическими, в том числе с нелинейными, граничными условиями. Например, при изучении колебаний струны, когда закрепление её концов не подчиняется закону Гука, возникает нелинейное граничное условие<sup>1</sup>

$$u_x(l, t) = F[u(l, t)]. \quad (1)$$

В других случаях закрепления концов струны могут возникнуть нестационарные граничные условия, содержащие не только след самого решения и его производной по нормали, но и производные по времени вплоть до второго порядка.

Новые задачи с неклассическими граничными условиями оказались интересными и с чисто теоретической точки зрения. Дело в том, что многие классические методы доказательства разрешимости начально-краевых задач не применимы для изучения задач с нелокальными или нелинейными условиями. В связи с этим разработка методов исследования задач с неклассическими условиями является актуальной как с теоретической, так и с практической точки зрения.

---

<sup>1</sup>Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

Нелокальными называют задачи, в которых граничные условия представляют собой соотношения, связывающие значения искомого решения и его производных в граничных и внутренних точках области, в которой ищется решение. К этому классу задач относятся задачи со смещением, изучению которых посвящены работы В. А. Стеклова, Ф. И. Франкля, А. В. Бицадзе, В. И. Жегалова, А. М. Нахушева, А. Н. Зарубина, О. А. Репина, Е. А. Уткиной и их учеников.

Обобщением задач со смещением являются задачи с нелокальными интегральными условиями. Одними из первых работ, посвящённых изучению задач с интегральными условиями для уравнений с частными производными, были статьи Дж. Кэннона<sup>2</sup> и Л. И. Камынина<sup>3</sup>, опубликованные в 1963 и 1964 годах соответственно. В них рассмотрены задачи с интегральными условиями для параболического уравнения. Эти работы можно считать началом систематического исследования задач с интегральными условиями.

Исследования задач с интегральными условиями для параболических уравнений были продолжены в работах Н. И. Ионкина, Н. И. Юрчука, Л. А. Муравья и А. В. Филиновского, А. Бузиани, А. И. Кожанова и других авторов.

Вопросы разрешимости задач с нелокальными, в том числе интегральными, условиями для эллиптических уравнений рассмотрены в работах А. К. Гущина и В. П. Михайлова, А. Л. Скубачевского.

Задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений стали изучаться позже, их систематическое исследование началось в 90-х годах XX века. Первыми работами, по-видимому, являются статьи Л. С. Пулькиной, Д. Г. Гордезиани и Г. А. Авалишвили. В дальнейшем появились интересные работы А. Бузиани, А. И. Кожанова, В. Б. Дмитриева.

Результаты проведённых исследований показали, что выбор метода доказательства разрешимости нелокальных задач с интегральными условиями в большой степени обусловлен видом этих условий. Если нелокальное условие имеет вид

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{S_T} + Ku = 0,$$

---

<sup>2</sup>Cannon J. R. The solution of heat equation subject to the specification of energy. // Quarterly of Applied Math., v. 21, №2, 1963, p. 155–160.

<sup>3</sup>Камынин Л. И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями. // Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 4, №6, 1964, с. 1006–1024.

то есть представляет собой соотношение между интегральным оператором и значением производной искомого решения на границе области, то удаётся применить метод компактности, базирующейся на априорных оценках в выбранном функциональном пространстве. (Здесь  $K$  — интегральный оператор,  $S_T$  — боковая поверхность цилиндра, а  $\nu$  — вектор нормали в текущей точке  $S_T$ .) Если же нелокальное условие имеет вид

$$u|_{S_T} + Ku = 0, \quad (2)$$

здесь содержит след на границы самого искомого решения, то этот метод оказывается неэффективным. Для обоснования разрешимости задач с условием (2) можно применить метод вспомогательных задач; такой метод применяла в своих работах Л. С. Пулькина. Там же она отмечала его недостатки: они заключаются в том, что этим методом разрешимость задач в разумном функциональном пространстве нельзя доказать для уравнений с переменными коэффициентами главной части.

В предлагаемой диссертационной работе разработаны другие методы доказательств разрешимости задач с нелокальными интегральными условиями (2) и обоснована их эффективность, что продемонстрировано при доказательстве разрешимости двух задач с интегральными условиями (2) для гиперболического уравнения с переменными коэффициентами на плоскости.

Другой класс неклассических задач образуют задачи с нелинейными граничными условиями. Классические граничные условия линейны. Они возникают в результате ограничений, принятых при построении математической модели. Например, в классических постановках задач о колебании струны под струной понимается гибкая упругая нить, величина натяжения которой может быть вычислена по закону Гука. Нелинейное граничное условие (2) описывает продольные колебания пружины при упругом закреплении концов, не подчиняющемся закону Гука. Задачи с нелинейными граничными условиями для параболических и эллиптических уравнений изучались в работах В. А. Кондратьева, Н. А. Ларькина, Э. Тронко, И. В. Филимоновой, С. Жерби и Б. Саида-Хуари. Краевые задачи с нелинейными граничными условиями для гиперболических уравнений практически не изучены.

В главе 1 книги Ж.-Л. Лионса<sup>4</sup> рассмотрены задачи с граничными усло-

---

<sup>4</sup>Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с.

виями с нелинейностями вида  $|u(l, t)|^p u(l, t)$ , а так же с нелинейными условиями, содержащими производные как по пространственной переменной, так и по переменной времени для эллиптического уравнения в цилиндрической области. Вопрос о разрешимости этих задач сведен к исследованию разрешимости задач на многообразии с помощью введённого оператора и полученных априорных оценок.

Задачи с неклассическими граничными условиями, содержащими нелинейности видов  $|u(l, t)|^p u(l, t)$ ,  $|u_t(l, t)|^p u_t(l, t)$  и  $A(t)u_{tt}(l, t) + |u_t(l, t)|^p u_t(l, t)$ , для уравнения колебания струны и задачи с нелинейными граничными условиями для эллиптического уравнения, о которых сказано выше, мотивировали исследования разрешимости задач с нелинейными граничными условиями для гиперболического уравнения. Этому вопросу посвящена вторая глава диссертации.

Таким образом, вопросы, рассматриваемые в предлагаемой диссертационной работе, находятся в контексте современной теории уравнений с частными производными.

**Цель работы.** Целью работы является разработка методов исследования начально-краевых задач для гиперболического уравнения с нелокальными и нелинейными граничными условиями, а также доказательство однозначной разрешимости пяти неклассических задач.

**Методы исследования.** Многие классические методы доказательства разрешимости начально-краевых задач не применимы для нелокальных задач, поскольку нелокальные условия приводят к неполноте и неортогональности системы собственных функций задачи. В диссертации разработаны новые методы, позволяющие исследовать разрешимость нелокальных задач, основанные на методе априорных оценок, теории интегральных уравнений Вольтерра и методе Галёркина.

При доказательстве однозначной разрешимости нелинейных задач используются метод априорных оценок, метод Галёркина, а также методы функционального анализа.

**Основные результаты.** В работе получены следующие результаты.

- Доказана однозначная разрешимость двух начально-краевых задач для одномерного гиперболического уравнения с интегральными граничными условиями.

- Разработаны методы исследования задач с интегральными граничными условиями, содержащими значение искомой функции на границе области.
- Доказана однозначная разрешимость двух начально-краевых задач для одномерного гиперболического уравнения с нелинейными граничными условиями.

**Личный вклад автора.** В диссертации изложены результаты, полученные автором лично.

**Научная новизна.** Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы для дальнейшей разработки методов исследования задач с неклассическими граничными условиями, в том числе нелокальными и нелинейными, для уравнений с частными производными.

**Апробация работы.** Основные результаты исследований по теме диссертации докладывались на

- научных семинарах кафедры уравнений математической физики механико-математического факультета Самарского государственного университета (руководитель — д. ф.-м. н., профессор Л. С. Пулькина);
- на Шестой молодежной научной школе-конференции "Лобачевские чтения — 2007" (Казань);
- на Воронежской зимней математической школе С. Г. Крейна — 2008;
- на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2010 г.);
- на XVIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов" (Москва, 2011 г.);
- на Всероссийской конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения" (Самара, 2011 г.).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]—[7]. В работе [2], написанной в соавторстве, научному руководителю принадлежат постановки задач и идея доказательства, а соискателю — доказательство обеих теорем. Работы [1]—[3] опубликованы в журналах, входящих в перечень изданий, рекомендованных ВАК РФ.

**Структура и объём работы.** Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 66 наименования. Каждая глава состоит из двух параграфов. Объём диссертации — 90 страниц.

## Содержание диссертации

Во **введении** излагается история вопроса, обосновывается актуальность диссертационного исследования, формулируются цели и задачи работы, даётся обзор основных результатов и описывается структура диссертации.

**Глава 1** посвящена изучению нелокальных задач. В ней рассмотрены две задачи с нелокальными интегральными краевыми условиями. В **параграфе 1** поставлена **задача 1**: найти в области

$$Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$$

решение уравнения

$$u_{tt} - (a(x, t)u_x)_x + c(x, t)u = f(x, t)$$

с начальными данными

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(0, t) = 0$$

и нелокальному условию

$$u(l, t) = \int_0^t \int_0^l K(l, y, t, \tau) u(y, \tau) dy d\tau,$$

где  $a(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $f(x, t)$  — функции, заданные в области  $\overline{Q}_T$ ,  $a(x, t) > 0$  для любой  $(x, t) \in \overline{Q}_T$ ,  $K(x, y, t, \tau)$  задана в  $\overline{Q}_T \times \overline{Q}_T$ , а  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  — на отрезке  $[0, l]$ .

Получены условия разрешимости этой задачи, которые сформулированы в следующей теореме.

**Теорема 1.** Если функции  $a(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $K(x, y, t, \tau)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  удовлетворяют условиям  $a(x, t) \in C^1(\overline{Q_T})$ ,  $c(x, t) \in C(\overline{Q_T})$ ,  $f(x, t) \in L_2(Q_T)$ ,  $K(x, y, t, \tau) \in C^2([0, l] \times [0, l] \times [0, T] \times [0, T])$ ,  $\varphi(x) \in W_2^1(0, l)$ ,  $\psi(x) \in L_2(0, l)$  и, кроме того, выполняются условия согласования

$$\varphi(l) = 0,$$

$$\psi(l) = \int_0^l K(l, y, 0, 0)\varphi(y)dy,$$

то существует единственное решение  $u(x, y) \in W_2^1(Q_T)$  задачи 1.

Теорема 1 доказывается путём сведения задачи 1 к задаче для нагруженного уравнения с нулевыми граничными условиями. А именно, доказана эквивалентность задачи 1 и следующей задачи 1\*:

$$\begin{aligned} & v_{tt} - (av_x)_x + cv + \int_0^t \int_0^x R_{tt}(x, y, t, \tau, 1)v(y, \tau)dyd\tau - \\ & - \left( a \int_0^t \int_0^x R_x(x, y, t, \tau, 1)v(y, \tau)dyd\tau \right)_x + \\ & + c \int_0^t \int_0^x R(x, y, t, \tau, 1)v(y, \tau)dyd\tau + \int_0^x K_t(x, y, t, t)v(y, t)dy + \\ & + \int_0^x R_t(x, y, t, \tau, 1) \Big|_{\tau=t} v(y, t)dy + \int_0^x K(x, y, t, t)v_t(y, t)dy - \\ & - \left( a \int_0^t K(x, x, t, \tau)v(x, \tau)d\tau \right)_x = f(x, t), \end{aligned}$$

где  $R(x, y, t, \tau, 1)$  — резольвента ядра  $K(x, y, t, \tau)$ ,

$$v(x, 0) = \varphi(x),$$

$$v_t(x, 0) = \psi(x) - \int_0^x K(x, y, 0, 0)\varphi(y)dy = \sigma(x),$$

$$v(0, t) = 0,$$

$$v(l, t) = 0.$$

Доказана однозначная разрешимость задачи 1\*, из которой, в силу эквивалентности задач 1 и 1\*, следует утверждение теоремы 1.

В параграфе 2 исследуется задача 2: найти в области  $Q_T$  решение гиперболического уравнения

$$u_{tt} - (au_x)_x + cu = f(x, t),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

граничному условию

$$u(0, t) = 0$$

и интегральному условию

$$u(l, t) = \int_0^l K(x)u(x, t)dx,$$

где функции  $a(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $f(x, t)$  заданы в области  $\overline{Q}_T$ ,  $a(x, t) > 0$  для любой  $(x, t) \in \overline{Q}_T$ , функции  $K(x)$ ,  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  заданы на отрезке  $[0, l]$ .

Получен следующий результат.

**Теорема 2.** Если функции  $a(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $K(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  удовлетворяют условиям  $a(x, t) \in C^1(\overline{Q}_T)$ ,  $c(x, t) \in C(\overline{Q}_T)$ ,  $f(x, t) \in L_2(Q_T)$ ,  $K(x) \in C^2[0, l]$ ,  $K(0) = 0$ ,  $|K(x)| < \frac{1}{l}$  при любом  $x \in [0, l]$ ,  $\varphi(x) \in W_2^1(0, l)$ ,  $\psi(x) \in L_2(0, l)$  и, кроме того, выполняются условия согласования

$$\varphi(l) = \int_0^l K(x)\varphi(x)dx,$$

$$\psi(l) = \int_0^l K(x)\psi(x)dx,$$

то существует единственное решение  $u(x, y) \in W_2^1(Q_T)$  задачи 2.

Задача 2 сведена к эквивалентной ей задаче 2\* с нулевыми граничными условиями, формулирующей следующим образом: найти решение уравнения

$$\begin{aligned}
& v_{tt} - (av_x)_x + cv + \int_0^x K''(y)a(y,t)u(y,t)dy + \\
& + \int_0^x K'(y)a_y(y,t)u(y,t)dy - \int_0^x c(y,t)K(y)u(y,t)dy + \\
& + c(x,t) \int_0^x K(y)u(y,t)dy - 2a(x,t)K'(x)u(x,t) - \\
& - a_x(x,t)K(x)u(x,t) = f(x,t) - \int_0^x K(y)f(y,t)dy,
\end{aligned}$$

где  $u(x,t)$  и  $v(x,t)$  связаны соотношением

$$v(x,t) = u(x,t) - \int_0^x K(y)u(y,t)dy,$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned}
v(x,0) &= \varphi(x) - \int_0^x K(y)\varphi(y)dy = \tilde{\varphi}(x), \\
v_t(x,0) &= \psi(x) - \int_0^x K(y)\psi(y)dy = \tilde{\psi}(x)
\end{aligned}$$

и граничными условиями

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0.$$

Установлена однозначная разрешимость задачи 2\*, что обеспечивает однозначную разрешимость задачи 2.

В **главе 2** диссертационной работы доказана однозначная разрешимость двух задач с нелинейными граничными условиями. В **параграфе 3** рассматривается **задача 3**: найти решение уравнения

$$u_{tt} - (au_x)_x + cu = f(x,t)$$

в области  $Q_T$  с начальными данными

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x),$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u_x(0, t) = 0,$$

$$a(l, t)u_x(l, t) + |u(l, t)|^p u(l, t) = 0,$$

где  $a(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $f(x, t)$  — функции, заданные в области  $\overline{Q}_T$ ,  $a(x, t) > 0$  для любого  $(x, t) \in \overline{Q}_T$ ,  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  заданы на отрезке  $[0, l]$ .

Доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть выполняются следующие условия:  $f(x, t) \in L_2(Q_T)$ ,  $c(x, t) \in C(\overline{Q}_T)$ ,  $a(x, t) \in C^1(\overline{Q}_T)$ ,  $\varphi(x) \in W_2^1(0, l) \cap L_{p+2}(0, l)$ ,  $\psi(x) \in L_2(0, l)$ ,  $\varphi'(0) = 0$  и  $a(l, 0)\varphi' + |\varphi(l)|^p \varphi(l) = 0$ , тогда для любого  $p > 0$  существует единственное решение задачи 3.

В параграфе 4 поставлена задача 4: найти в области  $Q_T$  решение гиперболического уравнения

$$Lu = f(x, t),$$

где

$$Lu \equiv u_{tt} - (a(x, t)u_x)_x + c(x, t)u,$$

с начальными данными

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u_t(x, 0) = 0,$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u_x(0, t) = 0,$$

$$a(l, t)u_x(l, t) + A(t)u_{tt}(l, t) + |u_t(l, t)|^p u_t(l, t) = 0,$$

где  $a(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $f(x, t)$  — функции, заданные в области  $\overline{Q}_T$ ,  $a(x, t) > 0$  для любой  $(x, t) \in \overline{Q}_T$ .

Отметим, что нулевые начальные условия не ограничивают общности.

Доказаны следующие теоремы разрешимости.

**Теорема 4.** Если  $A(t) = 0$ ,  $f(x, t) \in W_2^1(Q_T)$ ,  $c(x, t) \in C(\overline{Q_T})$ ,  $c_t(x, t) \in C(\overline{Q_T})$ ,  $a(x, t) \in C^1(\overline{Q_T})$ ,  $a_t(x, t) \in C^1(\overline{Q_T})$ , то для любого  $p > 0$  существует единственное решение задачи 4.

**Теорема 5.** Если  $f(x, t) \in W_2^1(Q_T)$ ,  $c(x, t) \in C(\overline{Q_T})$ ,  $c_t(x, t) \in C(\overline{Q_T})$ ,  $a(x, t) \in C^1(\overline{Q_T})$ ,  $a_t(x, t) \in C^1(\overline{Q_T})$ ,  $A(t) \in C^1[0, T]$ ,  $A(t) \geq A_0 > 0$ , то для любого  $p > 0$  существует единственное решение задачи 4.

Специфика нелинейных задач для гиперболического уравнения с рассматриваемыми нелинейными условиями заключается в сложности перехода к пределу при доказательстве их разрешимости путём построения последовательности приближённых решений и получения априорных оценок. Обычных априорных оценок решения в пространстве  $W_2^1(Q_T)$  в этом случае недостаточно. При доказательстве теоремы 3, помимо априорной оценки в пространстве  $W_2^1(Q_T)$ , была получена оценка следа искомой функции в пространстве  $L_{p+2}(0, T)$ . Для доказательства теоремы 4 нужно было сделать оценку следов производных  $u_t(l, t)$  в  $L_{p+2}(0, T)$  и  $u_{tt}^m$  в  $L_2(0, T)$ , а при доказательстве теоремы 5, кроме того, была получена оценка  $u_{tt}(x, t)$  в  $L_2(Q_T)$ .

## Публикации автора по теме диссертации

### Статьи в журналах, рекомендованных ВАК РФ:

- [1] Стригун М. В.: Об одной нелокальной задаче с интегральным граничным условием для гиперболического уравнения. [Текст]/ М. В. Стригун // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия, №8(74), 2009, с. 78—87.
- [2] Стригун М. В.: Две начально-краевые задачи с нелинейными граничными условиями для одномерного гиперболического уравнения. [Текст]/ Л. С. Пулькина, М. В. Стригун // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия, №2(83), 2011, с. 46—55.
- [3] Стригун М. В.: Начально-краевая задача для одномерного гиперболического уравнения с интегральным граничным условием. [Текст]/ М. В. Стригун // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия, №8(89), 2011, с. 95—101.

### Другие публикации:

- [4] Стригун М. В.: Об одной нелокальной задаче для гиперболического уравнения с граничным условием, содержащим интегральный оператор. [Текст]/ М. В. Стригун // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского, т. 36, 2007, с. 209—211.
- [5] Стригун М. В.: Нелокальная задача с интегральным граничным условием для гиперболического уравнения [Текст]/ М. В. Стригун // Всероссийская научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения". СамДифф — 2009. Тезисы докладов. Самара, 2009, с. 59.
- [6] Стригун М. В.: Об одной нелокальной задаче с интегральным граничным условием для гиперболического уравнения. [Текст]/ М. В. Стригун // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль, 2010, с. 178—179.
- [7] Стригун М. В.: Задача с интегральным граничным условием для гиперболического уравнения. [Электронный ресурс]/ М. В. Стригун // Материалы международного молодёжного научного форума "Ломоносов—2011". Москва, МАКС Пресс. ISBN — 978-5-317-03634-8, 2011.

Подписано в печать 08.02.2012.

Формат 60 × 84/16. Бумага офсетная. Печать оперативная.

Объем 0,875 усл. п.л. Тираж 100 экз. Заказ №65.

Отпечатано в типографии ООО "Инсома-пресс".

443080, г. Самара, ул. Санфировой, 110 А; тел.:222-92-40.