На правах рукописи

МАКЕЕВ ОЛЕГ ВЛАДИМИРОВИЧ

ПОДГРУППОВАЯ СТРУКТУРА РАЗВЕТВЛЯЮЩИХСЯ СТАЦИОНАРНЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Казань – 2007

Работа выполнена на кафедре "Высшая математика" Ульяновского Государственного Технического Университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Логинов Борис Владимирович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Аминова Ася Васильевна
	доктор физико-математических наук, профессор Филатов Олег Павлович
Ведущая организация:	Российский государственный педагогический университет имени А.И. Герцена

Защита состоится 13 ноября 2007 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета К 212.081.06 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан "8" октября 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук, доцент Е.К. Липачёв

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Становление и развитие теории ветвления решений нелинейных уравнений как раздела качественной теории абстрактных функциональных уравнений восходит к знаменитым работам А.М. Ляпунова и А. Пуанкаре о фигурах равновесия вращающейся жидкой массы, Э. Шмидта в общей теории линейных и нелинейных интегральных уравнений, А.И. Некрасова, Т. Леви–Чивита, Д. Стройка, Н.Е. Кочина по теории волн на свободной поверхности слоев жидкости (первая четверть XX столетия), работам И.Г. Малкина и Л. Чезари (50-е гг. XX в.) по задаче Пуанкаре о периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений. М.М. Вайнберг и М.А. Красносельский (50-е гг.) развивают вариационные и топологические методы в задачах теории ветвления. Наиболее общие теоремы существования бифуркации были доказаны в работах Н.А. Сидорова и В.А. Треногина (1971–1973) на основе применения теории особых точек конечномерных векторных полей непосредственно к уравнению разветвления (УР).

Идея применения групповой симметрии в теории ветвления принадлежит В.И. Юдовичу (1967), исследовавшему вместе с сотрудниками гидродинамические задачи стационарной и динамической бифуркации. Дальнейшим развитием симметрийной теории ветвления явился метод группового расслоения для построения редуцированного УР (Б.В. Логинов, В.А. Треногин 1971). В настоящее время теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой симметрии оформилась в отдельное направление с лавинообразным потоком работ. Это работы Ростовской школы (В.И. Юдович, И.В. Моршнева, Л.Г. Куракин), Ташкентской, ныне Ульяновской школы (Б.В. Логинов, Н.Н. Юлдашев, И.В. Коноплева), Новосибирской (П.И. Плотников, Н.И. Макаренко), Воронежской школы (Ю.И. Сапронов), вычислительного центра АН СССР Пущино (Ю.А. Кузнецов, Э.Э. Шноль), за рубежом D. Sattinger (США), A. Vanderbauwhede (Бельгия), M. Golubitsky, I. Stewart, D. Schaeffer (США, Великобритания) и др.

Теорема о наследовании групповой симметрии соответствующим уравнением разветвления (Б.В. Логинов, В.А. Треногин, 1975) обосновала возможности применения методов группового анализа дифференциальных уравнений по С.

Ли – Л.В. Овсянникову для построения общего вида УР по допускаемой группе симметрии, оказавшихся наиболее полезными в прикладных задачах о нарушении симметрии (Б.В. Логинов, 1985).

В симметрийной теории ветвления возникает задача о построении решений, инвариантных относительно подгрупп группы симметрии допускаемой уравнением разветвления. Для ОДУ с дискретной группой симметрии общая схема построения решений с симметрией подгрупп была впервые предложена в работе С.А. Владимирова (1975). Ее развитие применительно к задачам теории ветвления и, в частности, к задачам о нарушении симметрии было дано Б.В. Логиновым с сотрудниками (1979, 1981, 1985) и применено к поиску решений, инвариантных относительно нормальных делителей дискретной группы симметрии в приложениях к задачам о кристаллизации (1982), капиллярно-гравитационных поверхностных волнах (Б.В. Логинов, С.А. Гришина 1985, 2001) и нелинейно возмущенному уравнению Гельмгольца (И.В. Коноплева, 2003).

В задачах о нарушении симметрии симметрия тривиального решения относительно R^s сменяется симметрией относительно кристаллографической группы, являющейся полупрямым произведением s-параметрической группы сдвигов и дискретной группы симметрии решетки, определяющей рождающиеся пространственно-временные структуры. Именно для этих задач синергетики актуально построение уравнения разветвления по допускаемой группе и определение подгрупповой структуры разветвляющихся решений.

Цели работы – построение общего вида уравнения разветвления с симметрией кристаллографических групп в стационарном и динамическом (бифуркация Андронова-Хопфа) ветвлении, определение подгрупповой структуры разветвляющихся решений и их приложения.

Методы исследования. При выводе результатов диссертации использовались методы нелинейного анализа и нелинейных уравнений в условиях групповой симметрии, методы группового анализа дифференциальных уравнений и теория представлений групп.

Научная новизна.

а) Для симметрий старших кристаллических классов симморфных пространственных кристаллографических групп в задачах стационарного и динамического ветвления дифференциальных уравнений в банаховых пространствах построен общий вид уравнения разветвления Ляпунова-Шмидта.

б) Для каждого из 14 типов решеток и 7 старших кристаллических классов построена структура подгрупп и дуальная к ней (по включению) структура систем разветвления решений, инвариантных относительно подгрупп.

в) Исследованы нелинейные задачи теории ветвления с симметрией плоских кристаллографических групп.

г) Решена задача поиска системы подпространств, инвариантных относительно нелинейного оператора, определяемого системой разветвления при бифуркации Андронова-Хопфа.

д) Дано приложение полученных результатов к нелинейным интегральным уравнениям типа Гаммерштейна и их системам в задачах о кристаллизации в статистической теории кристалла с простыми и сложными решетками.

е) Выполнен поиск точек бифуркации в нелинейных дифференциальных уравнениях задач аэроупругости о дивергенции и флаттере удлиненной пластины.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные результаты применимы для классов прикладных задач стационарного и динамического ветвления с определенной групповой симметрией независимо от их физического содержания.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на международных и всероссийских конференциях: Всероссийская конференция, приуроченная к 85-летию академика Л.В. Овсянникова "Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и исследование". СО РАН, Новосибирск, 10–14.05.2004; Международная конференция "Симметрия и самоорганизация в природе, науке и технике "Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика" – КЛИН-2004, Ульяновск, 12–20.05.2004; STAMM–2004, International Symposium on Trends in Applications of Mathematics to Mechanics, Darmstadt, Germany, 22–28.08.2004; CAIM-13, Conference on Applied and Industrial Mathematics, Pitesti, Romania 14–16.10.2005; Пятая молодежная научная школа-конференция "Лобачевские чтения – 2006", Казань 28.11–02.12.2006; Международная "Конференция по логике, информатике, науковедению – КЛИН-2007", Ульяновск 17–18.05.2007; International Conference MOGRAN-11 Lie group analysis in education and research, Karlskrona, Sweeden, 27.05–02.06.2007; Восьмая международная Казанская летняя научная школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", Казань, 27.06–04.07.2007.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 24 работы, из них 17 статей и 7 тезисов, в том числе 4 работы в изданиях из списка ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и двух приложений, общий ее объем 196 страниц, в списке литературы 148 наименований.

Краткое содержание работы

Введение содержит основные определения и факты, связанные с задачами стационарного ветвления и бифуркацией Андронова-Хопфа (динамическое ветвление), элементы группового анализа дифференциальных уравнений с применениями к задачам теории ветвления и необходимые сведения о кристаллографических группах.

В первой главе методами группового анализа строится общий вид УР с симметрией старших классов моноклинной, ромбической, тетрагональной, ромбоэдрической, гексагональной и кубической кристаллических систем. В §1 дано описание алгоритма построения УР по допускаемой группе симметрии, основанного на теоремах наследования симметрии исходного нелинейного уравнения соответствующим УР. Алгоритм пригоден как в стационарном, так и в динамическом ветвлении. В задачах бифуркации стационарных и периодических решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с симметриями относительно старших кристаллических классов симморфных пространственных кристаллографических групп описано подпространство нулей линеаризованного оператора. К основным векторам обратной решетки применяются все преобразования сопряженного представления точечной группы. Для каждого из 14 типов решеток строится обратная решетка и определяется прямое и сопряженное представление точечной группы в прямой и обратной решетках. Затем в каждом отдельном из 14 случаев строится общий вид уравнения разветвления стационарной бифуркации и бифуркации рождения цикла. Указанная программа выполнена для простой решетки и решетки с центрированными основаниями (§2) моноклинной сингонии (кристаллической системы), для простой решетки, решетки с центрированными основаниями, гранецентрированной и объемноцентрированной решетки ромбической сингонии (§3), для простой и объемноцентрированной решеток тетрагональной сингонии (§4), простой решетки ромбоэдрической сингонии (§5), простой решетки гексагональной сингонии (§6), простой, гранецентрированной и объемноцентрированной решеток кубической сингонии (§7) при стационарном ветвлении и бифуркации рождения цикла.

Во второй главе для дискретной группы симметрии, допускаемой УР, строится структура подгрупп с перечислением классов подобных подгрупп, находятся соответствующие инвариантные решения. Рассматриваются бифуркационные задачи о нарушении симметрии, когда при переходе параметра через критическое значение рождаются решения с симметрией кристаллографических групп. Предлагается построение УР решений, инвариантных относительно подгрупп этих кристаллографических групп. Общий вид систем разветвления решений, инвариантных относительно подгрупп, полностью определяется допускаемой УР группой симметрии и подгруппой, относительно которой соответствующие решения инвариантны, и не зависит от конкретной физической сущности рассматриваемой задачи.

Исходной является дискретная точечная группа K и структура всех ее подгрупп $L(K)$. Если $H_0 = K \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_{æ} = \{H_k\}_1^{æ}$ – некоторая цепь подгрупп длины æ, то в подпространстве нулей N существует базис $R_{æ}$, в котором представление $\mathcal{A}_g$ группы K в подпространстве нулей N для каждой подгруппы H_k распадается на неприводимые. Множество всех УР H–инвариантных решений образует структуру L', двойственную по включению к структуре подгрупп $L(K)$: УР решений, инвариантных относительно более узкой подгруппы, содержит УР решений, инвариантных относительно более широкой. Для двух цепей подобных подгрупп $A = \{H_k\}_1^{æ}$ и $g^{-1}Ag = \{g^{-1}H_k g\}_1^{æ}$

связь между элементами H_k–инвариантных подпространств и соответственно УР H_k–инвариантных решений осуществляется элементом g.

В §1 описан алгоритм построения структуры подгрупп наследуемой УР точечной группы симметрии. Исходными данными для построения структуры подгрупп конечной группы является ее таблица Кэли. Для групп, элементы которых представляются подстановками, создан алгоритм перемножения этих подстановок, на основе которого для точечных подгрупп кристаллографических групп по заданным порождающим элементам строятся все остальные и находится таблица умножения (таблица Кэли). Таким образом, для конечной группы, изоморфной некоторой группе подстановок, необходимо задать только сами элементы группы - таблица умножения будет создана автоматически.

Предложенный алгоритм начинает построение структуры подгрупп снизу вверх начиная с тривиальной подгруппы $\{e\}$, причем реализована возможность проверки найденных подгрупп на свойство нормальных делителей. Опишем шаг алгоритма.

1. Пусть найдена некоторая подгруппа $H_k = \{e, g_{r_1}, \ldots, g_{r_k}\}$. Добавляем к этому подмножеству элементов некоторый элемент g группы, не входящий в множество I_k (на начальном этапе $I_k = H_k$).

2. Образуем множество, состоящее из всевозможных произведений элементов из $H_{k+1} = H_k \cup g$. В результате образования произведений получим некоторое множество $H_{k+s} = \{e, g_{r_1}, \ldots, g_{r_k}, g, g_{r_{k+1}}, \ldots, g_{r_{k+s}}\}$. Порядок полученного подмножества является либо делителем порядка группы, либо ему равен.

3. В случае равенства, множество H_{k+s} совпадает с исследуемой группой. Переходим к пункту 1, добавляя к множеству I_k элемент g.

4. В противном случае мы получим подгруппу. К множеству I_k добавляем элементы подгруппы H_{k+s}. Повторяем все операции, начиная с п. 1 для найденной подгруппы H_{k+s}.

Таким образом, предложенный алгоритм содержит в себе рекурсию, последовательно осуществляя которую, компьютерная программа строит структуру подгрупп. Благодаря предложенному алгоритму удалось построить структуру подгрупп старших кристаллических классов всех семи кристаллических систем. Например, для группы симметрии куба O_h имеется 96 подгрупп (за исключением несобственных), среди которых 6 нормальных делителей.

В §2 строится структура подгрупп для симметрии плоских решеток: прямоугольной, квадратной и гексагональной. При использовании техники построения проекторов на инвариантные подпространства строится структура систем разветвления для решений, инвариантных относительно подгрупп при стационарной бифуркации. Для динамического ветвления строится полная минимальная система подпространств, инвариантных относительно нелинейного оператора, порожденного левой частью УР. В некоторых из этих инвариантных подпространств построена асимптотика разветвляющихся решений.

Результаты §2 применяются в §3 к нелинейно возмущенному уравнению Гельмгольца. Строится асимптотика разветвляющихся периодических решений с симметрией группы квадрата D_4 и шестиугольника D_6 для уравнений

$$\Delta u + \lambda^2 \sinh u = 0,$$
$$\Delta u + \lambda^2 \sin u = 0$$

В результате выписана асимптотика решений, инвариантных относительно подгрупп D_4 и D_6, т.е. полностью исследована подгрупповая структура решений для обоих уравнений.

§4 посвящен исследованию подгрупповой структуры систем разветвления и решений с симметрией старших кристаллических классов низших сингоний (моноклинной и ромбической). Используется техника неприводимых инвариантных подпространств, теория характеров представлений групп, техника построения проекторов на инвариантные подпространства. Для моноклинной сингонии рассмотрено 2 типа решеток: простая и решетка с центрированными основаниями; для ромбической сингонии – все 4 типа решеток. Полученные результаты могут быть применены как в стационарном, так и в динамическом ветвлении. Однако, чтобы не увеличивать объем работы, в диссертации рассмотрено только стационарное ветвление для старшего кристаллического класса C_{2h} и решетки простого типа моноклинной сингонии. В §5 те же результаты получены для средних сингоний: тетрагональной (2 типа решеток), ромбоэдрической (1 тип) и гексагональной (1 тип). Наконец §6 содержит результаты подгрупповой структуры решений и систем разветвления для трех типов решеток с симметрией старшего кристаллического класса O_h кубической сингонии.

В главе 3 рассмотрены приложения к задачам о кристаллизации жидкого фазового состояния в статистической теории кристалла, описываемым нелинейными интегральными уравнениями типа Гаммерштейна

$$w(q) + \mu_0 \int K(|q-q'|)w(q')dq' = -\varepsilon \int K(|q-q'|)e^{w(q')}dq' - \\ - \mu_0 \int K(|q-q'|)\left[e^{w(q')} - w(q') - 1\right]$$

в функциональных пространствах периодических функций $C^1(\Pi_0)$ или $C^2(\Pi_0)$, Π_0 – ячейка простой кубической решетки.

Кристаллизация с простой кубической решеткой рассматривалась в работах Б.В. Логинова, Н.Н. Юлдашева и Х.Р. Рахматовой в 80-х гг. прошлого столетия также с помощью методов группового анализа дифференциальных уравнений. Однако, в этих работах для случаев высокого вырождения ($n = 12$, две возможных реализации $n = 24$ и $n = 48$) система инвариантов, которую предлагалось использовать для построения УР, не была выбрана минимально возможной или не были определены все связи между инвариантами, а символ факторизации по связям $[\cdots]^{out}$ во всех этих случаях не был раскрыт. Ввиду крайней громоздкости систем разветвления полная система инвариантов, дополнительные инварианты, связи между ними выписаны для всех указанных случаев высокого вырождения, а факторизация разложения УР по связям между использованными инвариантами, т.е. построение общего вида УР, выполнено только для размерности вырождения равной 12 (стр. 148–150).

Бифуркационные задачи Андронова-Хопфа с симметрией простой кубической решетки возникают в кинетических уравнениях первого приближения для пространственно однородного распределения частиц (Боголюбов, 1946). Соответственно в §2 рассматриваются задачи построения периодических решений дифференциального уравнения в банаховом пространстве вида $\frac{dx}{dt} = Bx - R(x,\varepsilon)$ в правой части которого стоит интегральный оператор типа Гаммерштейна в пространстве функций $C^1(\Pi_0)$ или $C^2(\Pi_0)$. Рассмотрены случаи 8 и 12 кратного вырождения по пространственным переменным, соответственно подпространства нулей имеют размерность 16 и 24. Выписана полная система инвариантных подпространств относительно нелинейного оператора, порожденного левой частью системы разветвления для 16-мерного подпространства нулей. Построение асимптотики разветвляющихся решений в найденных подпространствах может быть осуществлено по рассмотренной в §2.2.2 схеме.

Последний параграф третьей главы посвящен задачам кристаллизации со сложными решетками, описываемым системами нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна вида

$$B_s w_s \equiv w_s(q) + \mu_0 \sum_{j=1}^{M} \int K_{sj}(|q-q'|) w_j(q') dq' =$$
$$- \varepsilon \sum_{j=1}^{M} \int K_{sj}(|q-q'|) e^{w_j(q')} dq' - \mu_0 \sum_{j=1}^{M} \int K_{sj}(|q-q'|) [e^{w_j(q')} -$$
$$w_j(q') - 1] dq' \equiv R_s(w, \varepsilon)$$

$s = \overline{1, M}$, M – число подрешеток. Поскольку сложная решетка предполагается состоящей из M одинаковых подрешеток, при расцеплении цепочек Н.Н. Боголюбова вводится общая постоянная нормировки λ. Дана геометрическая интерпретация решетки сложного типа. В узлах сложной кристаллической решетки находятся одинаковые частицы обладающие цветной симметрией точечной группы K. Группа трансляций T размножает такие частицы в пространственно-периодические системы являющиеся подрешетками рассматриваемого кристалла. Преобразования несимморфной кристаллографической группы переводят каждую такую подрешетку в другую подрешетку, сдвинутую на некоторую трансляцию $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_i \in (0; 1)$ (см. таблицы несимморфных кристаллографических групп, приведенные в приложении к монографии Любарский Г.Я. Теория групп и ее применения в физике. М. ГИТТЛ. 1958. 356 с.), причем каждая частица в новой решетке "повернута" соответствующим преобразованием точечной группы K.

Изложена общая теория кристаллизации с решетками указанного типа в рамках теории ветвления решений нелинейных уравнений с векторным подпространством нулей и групповой симметрией относительно несимморфных кристаллографических групп. Общий случай сложной решетки иллюстрируется примером кристаллизации с трансляционной решеткой, состоящей из четырех подрешеток простого типа Γ_m моноклинной сингонии с несимморфной группой симметрии C_{2h}^5, в которой присутствуют с точностью до подобия винтовой поворот и плоскость скользящего отражения. Дан вывод четырехмерного УР, выписана асимптотика разветвляющихся решений.

Отметим, что общий случай сложной решетки с M подрешетками различного типа потребует введения M произвольных постоянных нормировки, соответствующие результаты ветвления с симметриями несимморфных кристаллографических групп составят предмет нашей будущей работы.

В **Приложение А** выделена компьютерная реализация поиска точек бифуркации нелинейных операторов и общей схемы вычисления коэффициентов УР с применением к задачам аэроупругости с двумя бифуркационными параметрами.

В §1 исследуется задача об изгибе тонкой гибкой пластины-полосы в сверхзвуковом потоке газа сжимаемой или растягиваемой вдоль оси внешними краевыми усилиями. Рассмотрены четыре типа граничных условий:

A. оба края шарнирно закреплены, $w(0) = 0$, $w''(0) = 0$; $w(1) = 0$, $w''(1) = 0$;

B. левый край свободен, правый жестко закреплен, $w''(0) = 0$, $w'''(0) = 0$; $w(1) = 0$, $w'(1) = 0$;

C. оба края жестко закреплены, $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$; $w(1) = 0$, $w'(1) = 0$;

D. левый край свободно защемлен, правый край жестко закреплен, $w'(0) = 0$, $w'''(0) = 0$; $w(1) = 0$, $w'(1) = 0$.

В безразмерных переменных задача описывается следующим уравнением

$$\chi^2 \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}}\right) - T\frac{d^2w}{dx^2} = kK\left(\frac{dw}{dx}, M, \kappa\right) + \theta w'' \int_0^1 \left[\left(1+w'^2\right)^{1/2} - 1\right] dx,$$

где $K(w'_x, M, \kappa) = [1 - (1 + \frac{\kappa-1}{2}Mw'_x)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}]$ для одностороннего обтекания и $K(w'_x, M, \kappa) = [(1 - \frac{\kappa-1}{2}Mw'_x)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} - (1 + \frac{\kappa-1}{2}Mw'_x)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}]$ для двустороннего обтекания пластины сверхзвуковым потоком газа вдоль оси Ox. Здесь $w = w(x)$ – прогиб пластины-полосы, $0 < x < 1$; $x = \frac{x_1}{d}$, $0 \le x_1 \le d$, $-\infty < y_1 < \infty$ – прямоугольные координаты; $\chi^2 = \frac{h^2}{12(1-\mu^2)d^2}$, $T = \frac{qd}{Eh}$; $k = \frac{p_0 d}{Eh}$; и d – ширина пластины-полосы, h – ее толщина; E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона; $q < 0$ ($q > 0$) – сжимающее (растягивающее) усилие; M – число Маха, p_0 – давление и κ – показатель политропы.

Поиск точек бифуркации удается выполнить выражая соответствующие критические значения параметров через корни характеристического многочлена линейного обыкновенного дифференциального уравнения. Выписана асимптотика разветвляющихся решений для указанных четырех случаев закрепления краев.

В §2 рассматривается динамическая задача аэроупругости – флаттер тонкой гибкой удлиненной пластины в сверхзвуковом потоке газа в рамках теории бифуркации рождения цикла (бифуркации Андронова-Хопфа). Она описывается следующей краевой задачей для определения периодических по времени решений дифференциального уравнения

$$\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\varepsilon\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{D}{h}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{W''}{(1+W'^2)^{3/2}}\right)=\frac{1}{h}p_0\mathcal{K}(W',M,\kappa)+ \\ +\frac{Eh}{a(1-\nu^2)}\left(\int_0^a\left[(1+W'^2)^{1/2}-1\right]dx\right)W''$$

$$I.\quad W(0,t)=0,\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(0,t)=0,\quad W(a,t)=0,\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(a,t)=0,$$
$$II.\quad W(0,t)=0,\ \frac{\partial W}{\partial x}(0,t)=0,\quad W(a,t)=0,\ \frac{\partial W}{\partial x}(a,t)=0,$$

где W – отклонение пластины, a – ее длина, h – ширина, $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – жесткость, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, γ – жесткость материала пластины, M – число Маха, p_0 – давление и κ – показатель политропы, ε – коэффициент линейного демпфирования, g – ускорение свободного падения.

Доказано существование двумерного подпространства нулей при отсутствии жордановых цепочек, т.е. получены необходимые условия возникновения флаттера. Использован тот же прием выражения критических значений параметров через корни характеристического многочлена.

Приложение B содержит таблицы умножения (Кэли) в старших кристаллических классах моноклинной, ромбической, тетрагональной и гексагональной сингоний.

Основные результаты диссертации

1. Для симметрий относительно старших кристаллических классов симморфных пространственных кристаллографических групп в нелинейных уравнениях задач теории ветвления описано подпространство нулей линеаризованного в точке ветвления оператора. Для каждого из 14 типов кристаллических решеток построена обратная решетка и определены представления точечных групп

(старших кристаллических классов) в прямой и обратной решетках. С помощью предложенной компьютерной программы построен общий вид уравнения разветвления Ляпунова-Шмидта стационарной и динамической бифуркации для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.

2. Предложен алгоритм построения структуры подгрупп конечных дискретных групп, с помощью которого для каждого из 14 типов решеток и 7 старших кристаллических классов построена структура подгрупп и дуальная к ней (по включению) структура систем разветвления решений, инвариантных относительно подгрупп.

3. Исследована симметрия плоских кристаллографических групп в нелинейных задачах теории ветвления. В качестве приложений рассмотрено нелинейно возмущенное уравнение Гельмгольца с симметрией квадратной и гексагональной решеток, построена асимптотика малых решений.

4. Предложен алгоритм поиска системы подпространств, инвариантных относительно нелинейного оператора, определяемого левой частью системы разветвления бифуркации Андронова-Хопфа. Выполнено исследование бифуркации рождения предельного цикла в указанных подпространствах для УР допускающих плоские (квадратная и гексагональная решетка) кристаллографические группы.

5. Исследованы стационарная и динамическая бифуркации в нелинейных уравнениях с интегральными операторами типа Гаммерштейна задач о фазовых переходах в статистической теории кристалла с простыми решетками, допускающих симметрию симморфных кристаллографических групп.

6. Рассмотрены системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна задач кристаллизации со сложными решетками, разработана методика решения стационарных задач теории ветвления, допускающц несимморфные группы. В качестве примера рассмотрено построение уравнения разветвления и асимптотики разветвляющихся решений задачи о кристаллизации жидкого фазового состояния в статистической теории кристалла, допускающей симметрию несимморфной группы C_{2h}^5 моноклинной сингонии.

7. На примерах задач аэроупругости о дивергенции и флаттере удлиненной пластины при двух бифуркационных параметрах, описываемых ОДУ, осуществлен поиск точек бифуркации. Коэффициенты УР определены на основе

компьютерной программы их вычисления. В задаче о дивергенции вычислены изгибные формы пластины при различных случаях закрепления краев. Определены необходимые условия возникновения флаттера.

Список публикаций по теме диссертации

1. Логинов, Б.В. Уравнения разветвления с симметриями диэдральных групп / Б.В. Логинов, О.В. Макеев // Вестник Самарского государственного технического университета: "Дифференциальные уравнения и их приложения". – Самара, 2003. – №2(22). – С. 166–180. – (серия "Математическая").

2. Макеев, О.В. ЭВМ-реализация построения общего вида уравнения разветвления стационарной бифуркации по допускаемой группе симметрии / О.В. Макеев // Механика и процессы управления: Сборник научных трудов. – Ульяновск, Ульяновский гос. Техн. Ун-т., 2004. – С. 57-65.

3. Makeev, O.V. Computer realization of the branching equation construction for Andronov-Hopf bifurcation on allowed group symmetry / O.V. Makeev // Symmetry and self-organization in nature sciences and techniques: Works of International Conference "Continual algebraic logic, calculus and neuralinformatics in science and techniques", CLIN-2004, 18-20.05.2004. – Ulyanovsk, 2004. – P. 64–67.

4. Логинов, Б.В. Решения, инвариантные относительно подгрупп дискретной группы симметрии задач теории ветвления / Б.В. Логинов, О.В. Макеев // Всероссийская конференция приуроченная к 85-летию академика Л.В. Овсянникова. "Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и исследование". СО РАН. – Новосибирск, 10–14 мая 2004. – С. 87.

5. Loginov, B.V. Bifurcational solutions invariant relatively subgroups of the basic nonlinear equation symmetry and their applications / B.V. Loginov, O.V. Makeev // ECCOMAS-2004: European Congress of Comput. Methods in Appl. Sci. Engng. Juvaskula, 24-28.07.04. Book of Abstracts. – P. 30.

6. Makeev, O. Computer realization of the branching equation construction on allowed group symmetry / O. Makeev, B. Loginov // Trends in applications of mathematics to mechanics. Proceedings of the international symposium, STAMM-04, Seeheim, Darmstadt, Germany, August 22-28, 2004: Wang Y., Hutter K. - eds. – Aachen-Verlag: Shaker. Berichte aus der Mathematik, 2005. – P. 277–288.

7. Loginov, B.V. Computer realization of BEq construction for Andronov-Hopf bifurcation on allowed group symmetry / B.V. Loginov, O.V. Makeev // Труды Межд. конф. "Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики". – Ташкент, АН Руз, ТашГУ, Узбекистан 16-19.11.2004

8. Makeev, O.V. An Review of Computer Realization of the Branching Equation Construction on Allowed Group Symmetry and Subgroup Invariant Solutions / O.V. Makeev // Proc. CAIM-13, 14-16.10.2005. – Romania, Pitesti University, 2005. – P. 17–29.

9. Divergence of elongated plate compressed or extended by external edges stresses in supersonic gas flow / B.V. Loginov, O.V. Makeev, A.V. Tsyganov, O.V. Kozhevnikova // Межвуз. сборник научных трудов "Функциональный анализ". – Ульяновск.: Ульяновский гос. Пед. Ун-т., 2005 – вып. 39. – С. 8–20.

10. Макеев, О.В. Бифуркация Андронова-Хопфа с симметрией квадратной и гексагональной решеток / О.В. Макеев // Труды Средневолжского математического общества. – 2005. – 7(1). – С. 215–223.

11. Loginov, B.V. Solutions with subgroup symmetry for singular equations in bifurcation theory / B.V. Loginov, O.V. Makeev // Lobachevsky J. Math. – 2005. – 20. – P. 91–101. – (http://ljm.ksu.ru/vol20/28.html).

12.Макеев, О.В. Структура подгрупп групповой симметрии класса D_3 ромбоэдрической сингонии / О.В. Макеев // Вестник УлГТУ. – 2006. – 3(24). – С. 20–23.

13. Макеев, О.В. Уравнения разветвления с симметрией симморфных кристаллографических групп / О.В. Макеев // Труды Средневолжского математического общества. – 2006. – 8(2). – С. 138–151.

14. Логинов, Б.В. Симметрия симморфных кристаллографических групп в задачах теории ветвления / Б.В. Логинов, О.В. Макеев // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского: Т. 34: Казанское математическое общество. "Лобачевские чтения - 2006" / Материалы Пятой молодежной научной школы-конференции. – Казань.: Издательство Казанского математического общества, 2006. – С. 158–159.

15. Loginov, B.V. Subgroup structure of bifurcating solutions under crystallographic symmetries / B.V. Loginov, O.V. Makeev // AMADE-2006: "Ана-

литические методы анализа и дифференциальных уравнений". – 12-20.09.2006. – С. 11.

16. Дивергенция удлиненной пластины при двух бифуркационных параметрах / Б.В. Логинов, О.В. Макеев, А.В. Цыганов, О.В. Кожевникова // Вестник Самарского государственного технического университета: "Дифференциальные уравнения и их приложения". – Самара, 2006. – №4(45). – С. 71–81. – (серия "Математическая").

17. Логинов, Б.В. Уравнения разветвления с симметрией симморфных кристаллографических групп ромбической сингонии / Б.В. Логинов, О.В. Макеев // Вестник Самарского государственного технического университета: "Дифференциальные уравнения и их приложения". – Самара, 2007. – №6. – С. 25–36. – (серия "Математическая").

18. Логинов, Б.В. Уравнения разветвления с симметрией кристаллографических групп / Б.В. Логинов, О.В. Макеев // Доклады Академии Наук. – 2007. – Т. 412, №3. – С. 62–66. – (Математика).

19. Макеев, О.В. Комплекс программ построения и исследования общего вида уравнения разветвления по допускаемой группе симметрии / О.В. Макеев // Труды Средневолжского математического общества. – 2007. – 9(1). – С. 194–200.

20. Loginov, B.V. Lyapounov-Schmidt method in the problem about strip-plate flutter in supersonic gas flow / B.V. Loginov, O.V. Makeev // Труды Средневолжского математического общества. – 2007. – Т. 9, №1. – С. 177–182.

21. Макеев, О.В. О построении структуры подгрупп точечной симметрии кристаллографических групп / О.В. Макеев // Математические методы в науке, технике, естествознании и экономике: синтез, анализ, диагностика: Труды международной "Конференции по логике, информатике, науковедению – КЛИН - 2007" (г. Ульяновск 17-18 мая 2007). – Ульяновск.: УлГТУ, 2007. – Т. 4. – С. 172–174.

22. Loginov, B.V. Subgroup structure of bifurcating solutions under crystallographic symmetries / B.V. Loginov, O.V. Makeev, Yu.B. Rousak // International Conference MOGRAN-11 "Lie group analysis in education and research": Book of abstracts. – Karlskrona, Sweeden, 27.05–02.06.2007. – P. 27.

23. Loginov, B.V. On conditions of flutter onset for elongated plate in supersonic

gas flow / B.V. Loginov, O.V. Makeev // Международный конгресс "Нелинейный динамический анализ - 2007": Тезисы докладов. – Сп.-б, 4-8 июня 2007. – С. 120.

24. Макеев, О.В. Задача о кристаллизации в статистической теории кристалла с симметрией кристаллического класса C_{2h} моноклинной сингонии / О.В. Макеев // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского: Т. 35: Казанское математическое общество. "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" / Материалы Восьмой международной Казанской летней научной школы-конференции. – Казань.: Издательство Казанского математического общества, 2007. – С. 167-168.