

На правах рукописи

СЫРОМЯСОВ Алексей Олегович

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ
ПЕРИОДИЧЕСКУЮ СТРУКТУРУ ЧАСТИЦ

Специальность 01.02.05 — Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук



Казань – 2007

Работа выполнена на кафедре математики и теоретической механики
Мордовского государственного университета имени Н.П. Огарева

Научный руководитель – доктор физико-математических наук,
профессор Сергей Иванович Мартынов

Официальные оппоненты – доктор физико-математических наук
Петр Константинович Волков

– доктор физико-математических наук,
профессор Александр Беницианович Мазо

Ведущая организация – Институт механики и машиностроения
Казанского научного центра РАН

Защита состоится 8 ноября 2007 года в час. мин. на заседании
диссертационного совета Д212.081.11 при Казанском государственном уни-
верситете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Казанского
государственного университета.

Автореферат разослан октября 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент



А.А. Саченков

Общая характеристика работы

Гидродинамическое взаимодействие дисперсных частиц влияет на макроскопические свойства суспензии и может качественно изменять профиль скорости. Диссертация посвящена исследованию гидродинамического взаимодействия частиц, образующих бесконечную периодическую решетку, в потоке вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса.

Актуальность темы исследования. При определенных условиях частицы в суспензии образуют периодические структуры (коллоидные кристаллы). Физические свойства коллоидных кристаллов могут сильно отличаться от свойств неструктурированных дисперсных систем. Адекватное описание гидродинамического взаимодействия частиц в периодических средах необходимо при разработке высокотехнологичных материалов с заранее заданными характеристиками. Кроме того, твердые сферы, образующие неподвижную решетку, служат моделью пористой среды при фильтрации жидкости через нее и при распространении звуковых волн.

К данному моменту известно много подходов к моделированию гидродинамических взаимодействий в периодических суспензиях: метод точечных сил, решеточного уравнения Больцмана, стоксовой динамики, метод осреднения периодических структур, подход, соединяющий Фурье-анализ с представлением решения в виде суммы сферических гармоник. Как правило, их применение ограничивается кубическими решетками сфер или квадратными решетками бесконечных цилиндров. При этом однородные и линейные потоки описываются с разных точек зрения. Методы стоксовой динамики и решеточного уравнения Больцмана позволяют рассматривать решетки произвольной симметрии, но при этом бесконечная решетка заменяется структурой конечных размеров, и вычислительные затраты резко возрастают с ростом числа частиц. Кроме того, в методе стоксовой динамики гидродинамические взаимодействия представляются суммой парных, что может привести к значительным погрешностям. Поэтому актуальной является разработка метода, позволяющего при небольших вычислительных затратах описать течение вязкой жидкости через бесконечную периодическую структуру частиц произвольной симметрии и взаимодействие частиц в такой структуре.

Объектом исследования является вязкая жидкость, содержащая одинаковые твердые сферические частицы. Эти частицы образуют периодическую структуру, простирающуюся бесконечно во всех направлениях. Относительно жидкости и частиц принимаются следующие предположения:

- Размеры частиц велики по сравнению с размерами молекул жидкости. Это позволяет описывать жидкость в рамках механики сплошной среды и считать, что на поверхности частиц выполнено условие прилипания.
- Жидкость несжимаема, ее плотность и вязкость постоянны.

- Размеры частиц достаточно велики, так что их броуновским движением можно пренебречь.
- Число Рейнольдса много меньше единицы. Это позволяет для описания дисперсной системы использовать линейные уравнения Стокса.
- На жидкость и на частицы не действуют внешние по отношению к дисперсной системе силы и моменты. В частности, частицы имеют нейтральную плавучесть.

Цель и задачи исследования. Цель работы – разработка и реализация на компьютере метода расчета гидродинамического взаимодействия бесконечного числа одинаковых твердых сферических частиц, образующих периодическую структуру, при пренебрежимо малых числах Рейнольдса.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- Разработан новый аналитический метод решения задачи о гидродинамическом взаимодействии бесконечного числа частиц, находящихся в узлах бесконечной периодической решетки. Общее решение уравнений Стокса представлено в виде разложения по мультиполям, периодическим относительно данной решетки и инвариантным относительно ее группы симметрии. Неизвестными в решении являются тензорные коэффициенты разложения, вид которых определяется симметрией решетки частиц и граничных условий, и зависящие от одного скалярного параметра. Метод может быть применен для изучения решеток произвольной симметрии.
- Предложенным методом решены задачи:
 - о фильтрации жидкости через кубическую и гексагональную решетку частиц;
 - о гидродинамическом взаимодействии частиц в узлах кубической и гексагональной решеток в сдвиговом потоке и потоке расширения;
 - о гидродинамическом взаимодействии частиц в узлах кубической решетки, находящихся под действием внешнего момента;
 - о деформации кубической решетки сфер в сдвиговом потоке при постоянном градиенте скорости или среднем напряжении.
- На основе полученных решений найдены тензоры проницаемости и эффективной вязкости суспензий с кубической и гексагональной решеткой сфер.
- Получен критерий, позволяющий определить, в каких случаях произвольная периодическая решетка, деформируемая сдвиговым потоком,

восстанавливает свой первоначальный вид. Найдена средняя по времени сдвиговая вязкость суспензии с кубической решеткой сфер, форма которой восстанавливается.

- Показано, что при постоянном среднем напряжении в суспензии с кубической решеткой время, необходимое для восстановления первоначальной конфигурации частиц, увеличивается с ростом их концентрации.
- Разработан программный комплекс, включающий:
 - программу, генерирующую и решающую системы линейных алгебраических уравнений, к которым сводятся краевые задачи;
 - программу, вычисляющую решеточные суммы, что позволяет найти мгновенные характеристики решетки в потоке;
 - программу, моделирующую деформацию решетки сфер при сдвиге с заданным градиентом скорости или средним напряжением.

Достоверность полученных результатов вытекает из того, что они получены из общих уравнений и законов механики жидкости с помощью строгих математических доказательств и выводов. Решения задач, найденные предлагаемым методом, для известных частных случаев совпадают с результатами, полученными другими методами.

Область применения и практическая ценность результатов. Полученные в диссертации результаты позволяют более глубоко понять механизм гидродинамического взаимодействия бесконечного числа частиц и могут быть применены на практике. В частности, предлагаемая модель может быть использована для детального исследования свойств коллоидных кристаллов при производстве различных материалов и покрытий, а также для описания течения жидкости через фильтры.

Основные положения, выносимые на защиту:

- Разработан и реализован на компьютере метод расчета возмущений, вызванных присутствием в вязкой жидкости бесконечной периодической решетки частиц. Возмущения зависят от группы симметрии решетки и граничных условий.
- Найдены тензоры проницаемости и эффективной вязкости суспензии с гексагональной решеткой сфер.
- Определена средняя сдвиговая вязкость суспензии с деформирующейся кубической решеткой сфер.
- Обнаружено, что при постоянном среднем напряжении решетка в сдвиговом потоке испытывает периодические сжатия/растяжения, а средняя скорость течения снижается при увеличении концентрации взвеси.

Апробация результатов. Основные результаты диссертационного исследования обсуждались на молодежной научной школе-конференции “Лобачевские чтения” (г. Казань, 2003 г.), на конференциях Средневолжского Математического общества (г. Саранск, 2003, 2005, 2006 гг.), конференции “Роль науки и инноваций в развитии хозяйственного комплекса региона” (г. Саранск, 2003 г.), на Международной летней школе по гидродинамике больших скоростей (г. Чебоксары, 2004 г.), на Всероссийском конгрессе по теоретической и прикладной механике (г. Нижний Новгород, 2006 г.) и научном семинаре НИИ математики и механики при Казанском государственном университете (г. Казань, 2006 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 12 работ, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Общий объем работы составляет 164 листа машинописного текста. Диссертация содержит 32 рисунка, 1 таблицу и список литературы из 126 наименований.

Содержание работы

Во *Введении* показана актуальность изучаемой проблемы, сформулированы цель и задачи исследования, проведен краткий обзор работ, посвященных движению вязкой жидкости через периодическую структуру частиц при малых числах Рейнольдса, кратко изложено содержание диссертации.

В *Главе 1* приведена общая постановка задачи о движении жидкости с периодической структурой твердых сферических частиц. Решение уравнений Стокса представлено в виде разложения по мультиполям, периодическим относительно решетки частиц. Неизвестными являются тензорные коэффициенты разложения. Указаны группы симметрии периодических мультиполей и тензорных коэффициентов.

В *разделе 1.1* дана постановка задачи. Пусть твердые сферические частицы радиуса a , взвешенные в жидкости вязкости η , образуют решетку Бравэ с основными периодами трансляции $\vec{\tau}_s$, $s = 1, 2, 3$. Центр произвольной частицы имеет радиус-вектор $\vec{r}^n = n_s \vec{\tau}_s$, $n_s \in \mathbb{Z}$. Начало правой ортонормированной неподвижной системы координат с базисом $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ совмещено с центром одной из сфер. Положение точки относительно начала координат задается вектором $\vec{x} = x_i \vec{e}_i$, а относительно n -й сферы – вектором $\vec{x}^n = \vec{x} - \vec{r}^n$.

Движение жидкости описывается в приближении Стокса:

$$\eta \Delta \vec{u} = \nabla p, \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (1)$$

Здесь \vec{u} , p – скорость и давление в каждой точке жидкости.

На поверхности частиц должно быть выполнено условие прилипания:

$$\begin{aligned} u_i(\vec{x}) &= U_i^P(\vec{r}^n) + \Gamma_{ij}(\vec{r}^n) x_j^n, \quad \vec{x}^n \in \partial\Omega \\ \Gamma_{ji}(\vec{r}^n) &= -\Gamma_{ij}(\vec{r}^n), \end{aligned} \quad (2)$$

где U_i^P – непрерывная функция, такая, что $U_i^P(\vec{r}^n)$ есть поступательная скорость твердой сферы с центром \vec{r}^n ; $\Gamma_{ij}(\vec{r}^n)$ – вращательная скорость частицы; $\partial\Omega$ – поверхность сферы радиуса a с центром в начале координат.

На частицы действуют только гидродинамические силы и моменты:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_i^{\text{hyd}}(\vec{r}^n) &= \oint_{\partial\Omega} \sigma_{ij}(\vec{x}^n) m_j dS, \\ \mathcal{T}_i^{\text{hyd}}(\vec{r}^n) &= e_{ijk} \oint_{\partial\Omega} x_j^n \sigma_{kl}(\vec{x}^n) m_l dS\end{aligned}$$

Здесь \vec{m} – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $\vec{\sigma}$ – тензор напряжений, e_{ijk} – символ Леви-Чивиты.

Качественная особенность изучаемой проблемы – отсутствие условий на бесконечности. Поэтому предполагается, что на основной поток, определяемый движением сфер, накладываются периодические возмущения, обусловленные наличием частиц:

$$u_i = U_i^P + v_i, \quad p = P + p', \quad (3)$$

$$v_i(\vec{x} + \vec{r}^n) = v_i(\vec{x}), \quad p(\vec{x} + \vec{r}^n) = p(\vec{x}) \quad \forall \vec{r}^n \quad (4)$$

Доказано, что свойство периодичности деформирующейся структуры частиц не теряется с течением времени, только если \vec{U}^P линейна по координатам:

$$U_i^P = C_{ij}x_j, \quad C_{kk} = 0 \quad (5)$$

Если выполняется (4), то P также есть линейная функция координат:

$$P = P_0 + A_j x_j, \quad (6)$$

Величины C_{ij} , A_j , P_0 могут зависеть от времени t как от параметра.

Подстановка (3)–(6) в (1)–(2) приводит к уравнениям, которым должны удовлетворять периодические возмущения v_i и p' :

$$\eta \Delta v_i = A_i + \frac{\partial p'}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (7)$$

$$v_i + E_{ij}x_j^n = \omega_{ij}x_j^n, \quad \vec{x}^n \in \partial\Omega \quad (8)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} + C_{ji}), \quad \omega_{ij} = \Gamma_{ij} - \frac{1}{2}(C_{ij} - C_{ji}) \quad (9)$$

Здесь \vec{E} и $\vec{\omega}$ суть тензоры скоростей деформации и относительной угловой скорости. Из (4) вытекает, что $\vec{\omega}$ одинакова для всех частиц. Поскольку уравнения (7), (8) линейны, их решение может быть представлено в виде суммы решений трех задач I, II и III.

В задаче I $E_{ij} = 0$, $\omega_{ij} = 0$. Ее решение описывает фильтрацию жидкости через неподвижную решетку под действием градиента давления.

Задача II – это задача о замороженных твердых сферах в деформационном потоке вязкой жидкости: $A_i = 0, \omega_{ij} = 0$.

В задаче III $A_i = 0, E_{ij} = 0$. Это задача о вращении частиц, которые не движутся поступательно относительно жидкости.

В разделе 1.2 общее решение задач I, II и III представлено в виде:

$$\begin{aligned}
p' &= H_j(L_j^\infty - \gamma_{jk}x_k) + F_{jk}L_{jk}^\infty + G_{jkl}L_{jkl}^\infty + D_{jklm}L_{jklm}^\infty + T_{jklms}L_{jklms}^\infty + \dots \\
\eta v_i &= \eta U_i - \frac{1}{2}H_i\left(L_0^\infty - \frac{1}{2}\gamma_{jk}x_jx_k\right) - \frac{1}{2}H_j(K_{ij}^\infty - \alpha_{ijkl}x_kx_l) + \\
&+ B_{ij}(L_j^\infty - \gamma_{jk}x_k) + \frac{3}{2}F_{jk}(M_{ijk}^\infty - \beta_{ijkl}x_l) - \frac{4}{7}G_{ijk}L_{jk}^\infty - \\
&- \frac{1}{14}G_{jkl}\{L_{ijkl}|\vec{x}|^2 + \sum_{n \neq 0} [L_{ijkl}(\vec{x}^n)|\vec{x}^n|^2 - L_{ijkl}(-\vec{r}^n)|-\vec{r}^n|^2]\} - \\
&- \frac{5}{9}D_{ijkl}L_{jkl}^\infty - \frac{1}{18}D_{jklm} \sum_n L_{ijklm}(\vec{x}^n)|\vec{x}^n|^2 - \\
&- \frac{6}{11}T_{ijklm}L_{jklm}^\infty - \frac{1}{22}T_{jklms} \sum_n L_{ijklms}(\vec{x}^n)|\vec{x}^n|^2 - \dots
\end{aligned} \tag{10}$$

$$U_i = \text{const}$$

Мультиполи $L_{j\dots k}, M_{ijk}, K_{ij}$ определяются формулами

$$L_0(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}, L_{j\dots k}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \dots \frac{\partial}{\partial x_k} L_0(\vec{x}), M_{ijk}(\vec{x}) = \frac{x_i x_j x_k}{|\vec{x}|^5}, K_{ij}(\vec{x}) = \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^3}$$

Функции $L_{j\dots k}^\infty$ строятся так. Если число индексов не меньше трех, то

$$L_{j\dots k}^\infty(\vec{x}) = \sum_n L_{j\dots k}(\vec{x}^n) = L_{j\dots k}(\vec{x}) + L'_{j\dots k}(\vec{x}), L'_{j\dots k}(\vec{x}) = \sum_{n \neq 0} L_{j\dots k}(\vec{x}^n) \tag{11}$$

Если число индексов менее трех, то эта формула модифицируется:

$$\begin{aligned}
L_{ij}^\infty(\vec{x}) &= L_{ij}(\vec{x}) + L'_{ij}(\vec{x}), L'_{ij}(\vec{x}) = \int_{\vec{0}}^{\vec{x}} L'_{ijk}(\vec{x}) dx_k, \\
L_i^\infty(\vec{x}) &= L_i(\vec{x}) + L'_i(\vec{x}), L'_i(\vec{x}) = \int_{\vec{0}}^{\vec{x}} L'_{ij}(\vec{x}) dx_j, \\
L_0^\infty(\vec{x}) &= L_0(\vec{x}) + L'_0(\vec{x}), L'_0(\vec{x}) = \int_{\vec{0}}^{\vec{x}} L'_i(\vec{x}) dx_i
\end{aligned} \tag{12}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
M_{ijk}^\infty &= M_{ijk} + M'_{ijk}, M'_{ijk}(\vec{x}) = \int_{\vec{0}}^{\vec{x}} \int_{\vec{0}}^{\vec{x}} \sum_{n \neq 0} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_m} M_{ijk}(\vec{x}^n) dx_l dx_m \\
K_{ij}^\infty &= K_{ij} + K'_{ij}, K'_{ij}(\vec{x}) = \int_{\vec{0}}^{\vec{x}} \int_{\vec{0}}^{\vec{x}} \int_{\vec{0}}^{\vec{x}} \sum_{n \neq 0} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_m} K_{ij}(\vec{x}^n) dx_k dx_l dx_m
\end{aligned} \tag{13}$$

Тензоры $\vec{\gamma}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}$ вычисляются по формулам

$$\gamma_{ij} = 2L_i^\infty \left(\frac{\vec{\tau}_s}{2} \right) \tau_j^s, \quad \beta_{ijkl} = 2M_{ijk}^\infty \left(\frac{\vec{\tau}_s}{2} \right) \tau_l^s, \quad \alpha_{ijkl} = -\frac{1}{2}(\delta_{ik}\gamma_{jl} + \delta_{jk}\gamma_{il} + 3\beta_{ijkl}) \quad (14)$$

Здесь τ_j^s – компоненты векторов взаимного к $\langle \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_3 \rangle$ набора.

Тензорные коэффициенты H_i, B_{ij}, \dots , а также U_i не зависят от \vec{x} . Подстановка (10) в (7) приводит к дополнительным условиям

$$-\frac{4\pi}{|B|}H_i = A_i, \quad F_{kk} = 0, \quad |B| = \vec{\tau}_1 \cdot (\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3) \quad (15)$$

В разделе 1.3 найдено выражение для гидродинамических сил и моментов, действующих на частицу:

$$\mathcal{F}_i^{\text{hyd}} = 4\pi H_i, \quad \mathcal{T}_i^{\text{hyd}} = 4\pi e_{ijk} B_{kj}$$

Чтобы найти неизвестные тензорные коэффициенты, необходимо разложить функции L' , M' и K' в ряд Тейлора и подставить выражения (10)–(15) в граничные условия задач I, II или III. После приведения подобных слагаемых по компонентам \vec{x} получается система линейных алгебраических уравнений. Из нее H_i, B_{ij}, \dots могут быть найдены в виде разложения по степеням малого параметра $\varepsilon = a/r$, $r = \min(|\vec{\tau}_1|, |\vec{\tau}_2|, |\vec{\tau}_3|)$.

В разделе 1.4 показано, что решение задачи упрощается, если учесть симметрию периодических мультиполей и тензорных коэффициентов по ряду индексов и их инвариантность относительно определенных точечных групп. Мультиполи и тензоры $\vec{\gamma}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}$ зависят только от вида решетки и инвариантны относительно ее точечной группы \mathcal{G}^{lat} . Для определения тензорных коэффициентов необходимо учесть и симметрию граничных условий, поэтому они инвариантны относительно группы $\mathcal{G}^{\text{coef}} = \mathcal{G}^{\text{lat}} \cap \mathcal{G}^{\text{ext}}$. Здесь \mathcal{G}^{ext} – точечная группа одних лишь граничных условий (без учета геометрии решетки). Зная \mathcal{G}^{lat} и $\mathcal{G}^{\text{coef}}$, можно воспользоваться теорией нелинейных тензорных функций [4] и разложить искомые величины по тензорному базису соответствующей группы. Неизвестными будут лишь скалярные параметры этого разложения.

В Главе 2 рассматривается задача о фильтрации жидкости через неподвижную решетку частиц. Методом, предложенным в Главе 1, найдены решения задачи I для кубических и гексагональных решеток, определены скорости фильтрации через них и тензоры проницаемости этих решеток.

В разделе 2.1 в общем виде указан вид возмущения скорости вблизи начала координат; в задаче I v_i есть четная функция \vec{x} . Поэтому неизвестными являются H_i, G_{ijk}, \dots , а $B_{ij}, F_{jk}, D_{ijkl}, \dots$ равны нулю.

В разделе 2.2 построены мультиполи, периодические относительно кубической решетки. В данном случае $\mathcal{G}^{\text{lat}} = \bar{6}/4$ (в обозначениях Шубникова). Если орты $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ совмещены с осями решетки, то базис этой группы составляют $\vec{\delta} = \vec{e}_1^2 + \vec{e}_2^2 + \vec{e}_3^2$ и $\vec{O}_h = \vec{e}_1^4 + \vec{e}_2^4 + \vec{e}_3^4$.

В разделе 2.3 решена задача о фильтрации вязкой жидкости через кубическую решетку. В силу линейности задачи достаточно описать фильтрацию в направлении трех координатных осей. В кубической решетке оси равноправны, поэтому можно рассмотреть фильтрацию лишь вдоль оси аппликат. Для этих граничных условий Ox_3 – поворотная ось бесконечного порядка, поэтому $\mathcal{G}^{\text{ext}} = \infty \cdot m$ и $\mathcal{G}^{\text{coef}} = 4 \cdot m$. Базис $\mathcal{G}^{\text{coef}}$ составляют тензоры $\vec{\delta}$, \vec{O}_h , $\vec{b} = \vec{e}_3$. Если считать $U_i = Ub_i$ фиксированной величиной, то, например,

$$T_{ijklm} = \eta U [\nu_{21} \delta_{i(j} b_k b_l b_m) + \nu_1 b_i b_j b_k b_l b_m + \nu_{13} b_i o_{jklm} + \nu_{31} o_{i(jkl} b_m)]$$

Скобки в индексах означают симметризацию без деления на число слагаемых. Аналогичные $\nu_{21}, \dots, \nu_{31}$ скалярные параметры разложения H_i, G_{ijk}, \dots по тензорному базису найдены с точностью до ε^8 .

На рис. 1 можно проследить элементы симметрии группы $4 \cdot m$ при распределении скоростей вокруг частицы в узле простой кубической решетки.

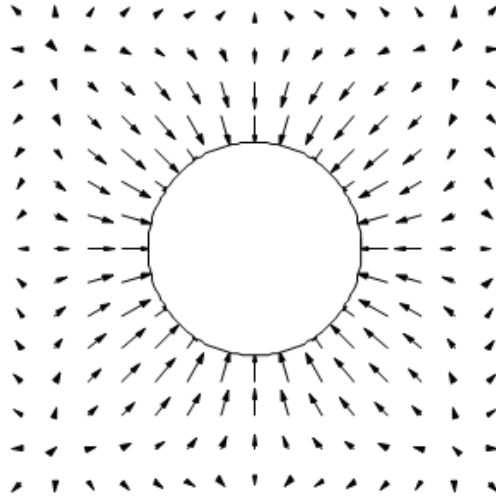


Рис. 1: Проекция \vec{v} на Ox_1x_2 в задаче I, $\vec{U} \uparrow \uparrow Ox_3$, $x_1, x_2 \in [-r/2, r/2]$, $x_3 = 0.1r$, $a = 0.25r$

Рассмотрен предельный переход от задачи о фильтрации жидкости через решетку к задаче об обтекании одиночной частицы однородным потоком при $\varepsilon \rightarrow 0$. В задаче о фильтрации заранее заданной величиной может быть как скорость однородного потока U_i , так и макроскопический градиент давления A_i . Если известна U_i , то предельный переход существует. Если задан градиент давления, то переход невозможен, ибо в этом случае при $\varepsilon \rightarrow 0$ скорость однородного потока стремится к бесконечности.

В разделе 2.4 получен вид мультиполей для гексагональной решетки, для которой $\mathcal{G}^{\text{lat}} = m \cdot 6 : m$ (рис. 2). Шаг решетки по оси аппликат может отличаться от шага по оси абсцисс; относительное удлинение шага вдоль Ox_3 определяется параметром A .

В разделе 2.5 задача о фильтрации вязкой жидкости через гексагональную решетку решена с точностью до ε^6 . В данном случае $\mathcal{G}^{\text{coef}}$ зависит от того, вдоль какой оси происходит фильтрация: при фильтрации в направлении

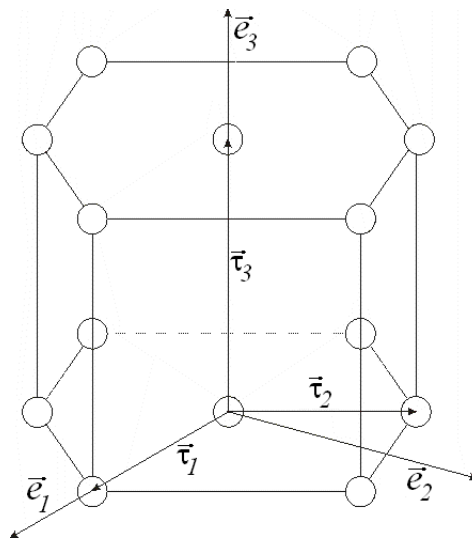


Рис. 2: Структура гексагональной решетки

$Ox_3 \mathcal{G}^{\text{coef}} = 6 \cdot m$, а при фильтрации в направлении $Ox_1 \mathcal{G}^{\text{coef}} = 2 \cdot m$. Проекции возмущения скорости на плоскости, перпендикулярные направлению фильтрации, приведены на рис. 3 и 4.

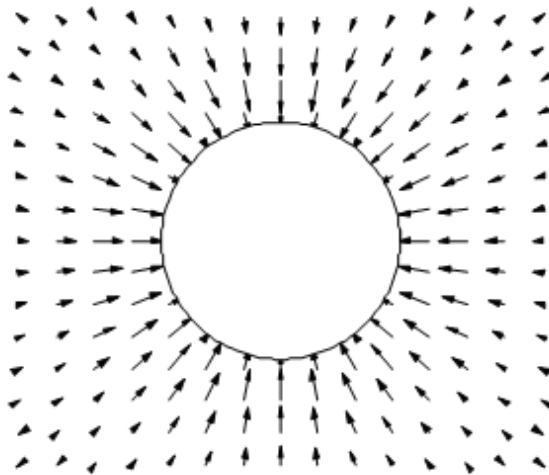


Рис. 3: Проекция \vec{v} на Ox_1x_2 в задаче I, $\vec{U} \uparrow \uparrow Ox_3$, $x_1 \in [-r/2, r/2]$, $x_2 \in [-\sqrt{3}r/4, \sqrt{3}r/4]$, $x_3 = 0.1Ar$, $a = 0.25r$

В разделе 2.6 с помощью найденных решений определены скорости фильтрации через рассмотренные решетки и тензоры проницаемости этих решеток. Эти величины представлены в виде разложения по степеням параметра $\phi = f\varepsilon^3$ – доле твердого вещества в суспензии. Величина f различна для разных конфигураций частиц.

Результаты для кубической конфигурации, полученные предложенным в диссертации методом, совпадают с результатами [2, 3]. Скорость фильтрации через гексагональную решетку и тензор проницаемости этой решетки найдены впервые. Коэффициенты проницаемости κ_1, κ_3 вдоль осей Ox_1 и Ox_3 зависят от параметра A . При неизменном ϕ и сохранении поворотной симметрии растяжение вдоль оси аппликат в A раз приводит к сжатию в \sqrt{A}

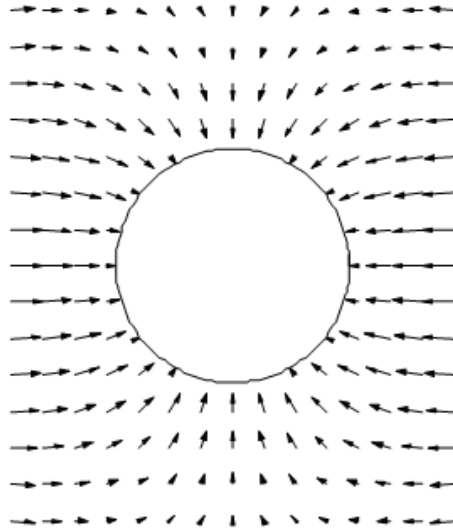


Рис. 4: Проекция \vec{v} на Ox_2x_3 в задаче I, $\vec{U} \uparrow \uparrow Ox_1$, $x_2 \in [-\sqrt{3}r/4, \sqrt{3}r/4]$, $x_3 \in [-Ar/2, Ar/2]$, $x_1 = 0.1r$, $a = 0.25r$

раз вдоль осей абсцисс и ординат, а площадь сечения ячейки решетки плоскостью Ox_1x_2 уменьшается в A раз. Это затрудняет фильтрацию в направлении Ox_3 , и коэффициент κ_3 уменьшается с ростом A . Напротив, сечение ячейки плоскостью Ox_2x_3 увеличивается в \sqrt{A} раз, что облегчает фильтрацию вдоль Ox_1 . Поэтому κ_1 растет с увеличением A .

Коэффициенты проницаемости κ_1 , κ_3 могут быть представлены в виде

$$\kappa_1 = \frac{2a^2}{9\phi} Q_1(\phi), \quad \kappa_3 = \frac{2a^2}{9\phi} Q_3(\phi), \quad \lim_{\phi \rightarrow 0} Q_1(\phi) = \lim_{\phi \rightarrow 0} Q_3(\phi) = 1$$

Графики $Q_1(\phi)$ и $Q_3(\phi)$ при различных значениях A приведены на рис. 5.

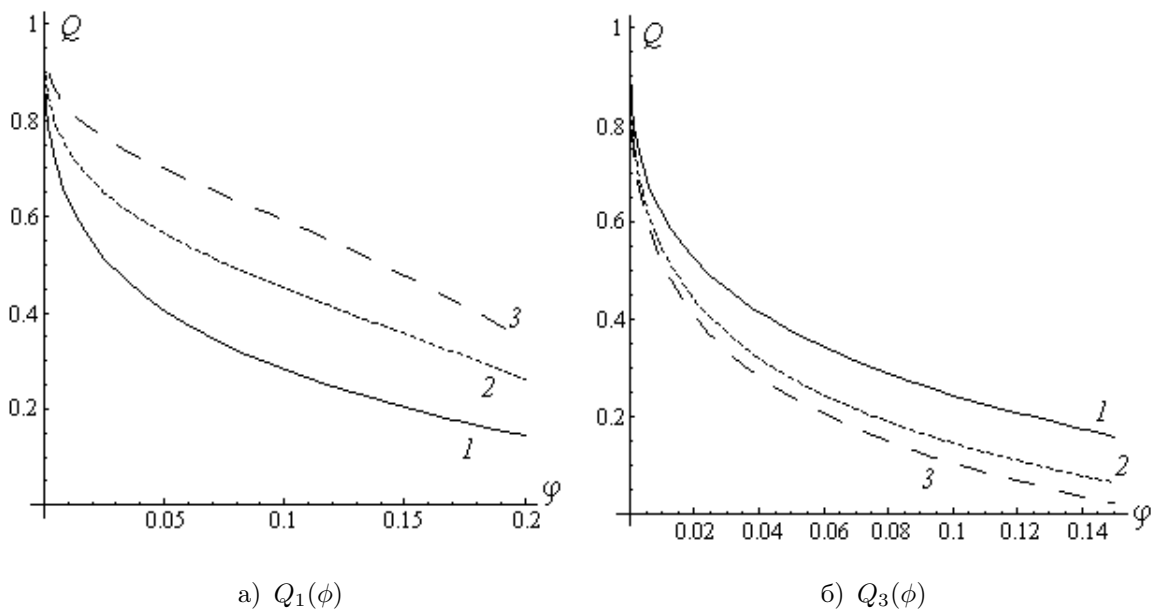


Рис. 5: Линия 1 – $A = 1$; линия 2 – $A = 2\sqrt{2/3}$; линия 3 – $A = 2$

Глава 3 содержит решение задач о периодической структуре частиц в линейных потоках вязкой жидкости, т.е. в сдвиговом потоке и потоке расширения или сжатия. Найденные распределения скорости позволяют вычислить тензор эффективной вязкости периодической суспензии.

В разделе 3.1 указан общий вид v_i для линейных потоков; теперь это возмущение – нечетная функция \vec{x} . Поэтому неизвестными являются коэффициенты B_{ij} , F_{jk}, \dots , а H_i , G_{ijk}, \dots следует считать равными нулю.

В разделе 3.2 мультиполи, построенные в разделе 2.2, использованы для описания возмущений, вызываемых кубической решеткой в сдвиговом потоке в плоскости Ox_1x_2 ($\mathcal{G}^{\text{coef}} = m \cdot 2 : m$) и в потоке расширения вдоль Ox_3 ($\mathcal{G}^{\text{coef}} = m \cdot 4 : m$). В обоих случаях задача II решена с точностью до ε^8 , построены картины течения, иллюстрирующие группу симметрии задачи.

Чтобы частицы в узлах кубической решетки приобрели относительную угловую скорость, на них должен действовать внешний момент. Для определения вращательной вязкости такой суспензии задача III ($\mathcal{G}^{\text{coef}} = 4 : m$) решена с точностью до ε^8 . Полученный результат согласуется с [1].

В разделе 3.3 изучается поведение гексагональной решетки в линейных потоках. Хотя возмущения скорости при сдвиге в плоскостях Ox_1x_2 и Ox_1x_3 имеют одну и ту же группу симметрии ($2 : m$), в первом случае частицы в отсутствие внешнего момента заморожены в жидкость, а во втором – имеют ненулевую относительную угловую скорость. Описано также поведение гексагональной решетки частиц в потоке расширения вдоль оси шестого порядка (группа симметрии $m \cdot 6 : m$). Эти задачи решены с точностью до ε^6 .

В разделе 3.4 решения, полученные в разделах 3.2 и 3.3, используются для нахождения эффективной вязкости суспензий с кубической и гексагональной решеткой сфер. Эффективная вязкость периодической суспензии есть тензор четвертого ранга, связывающий девиаторную часть среднего напряжения и тензор скоростей деформаций. Для суспензии с кубической решеткой сфер этот тензор определяется двумя параметрами, вычисленными, например, в [1]. Метод, предлагаемый в диссертации, воспроизводит эти результаты с высокой точностью.

Развиваемый в настоящей работе подход позволяет найти тензор эффективной вязкости периодической суспензии произвольной структуры. В суспензии с гексагональной решеткой сфер он определяется тремя параметрами η_1 , η_2 и η_3 . Они могут быть интерпретированы как коэффициенты вязкости при сдвиге в плоскости Ox_1x_2 , при сдвиге в плоскости Ox_1x_3 и в потоке растяжения вдоль оси Ox_3 . Как и коэффициенты проницаемости, они зависят от удлинения A шага решетки. Графики η_1 и η_2 приведены на рис. 6.

Если A растет, то (при фиксированной концентрации взвеси ϕ) частицы в плоскости Ox_1x_2 сближаются, сопротивление сдвигу в этой плоскости увеличивается. Поэтому η_1 монотонно возрастает с ростом A . В потоке растяжения решетка сжимается в направлениях, перпендикулярных направлению растяжения. При больших A частицы, лежащие в плоскости Ox_1x_2 находят-

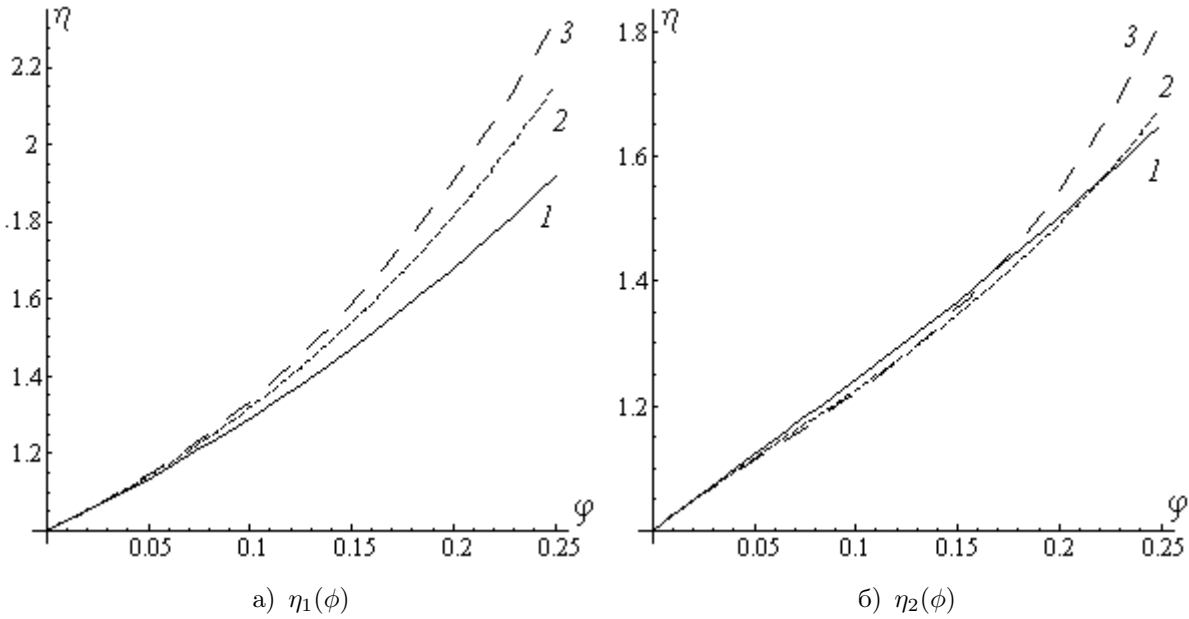


Рис. 6: Линия 1 – $A = 1$; линия 2 – $A = 2\sqrt{2/3}$; линия 3 – $A = 2$

ся на малом расстоянии друг от друга, что препятствует дальнейшему их сближению. Поэтому η_3 также есть возрастающая функция A . При малых ϕ зависимость между η_2 и A обратная, так как при относительном удлинении решетки в A раз площадь сечения ячейки плоскостью Ox_1x_3 становится в \sqrt{A} раз больше, а сопротивление сдвигу в этой плоскости уменьшается. При больших ϕ значительный вклад в возмущение скорости дают частицы, лежащие в разных плоскостях, параллельных Ox_1x_3 . При увеличении A эти плоскости сближаются, что ведет к увеличению η_2 .

В *Главе 4* рассмотрена деформация кубической структуры в сдвиговом потоке. Поскольку в линейном потоке конфигурация частиц со временем меняется, такие величины, как эффективная вязкость, также зависят от времени. Чтобы приписать суспензии некую макроскопическую характеристику, необходимо осреднить мгновенные значения соответствующей величины.

В *разделе 4.1* выясняется, какой должна быть ориентация сдвигового потока относительно решетки, чтобы исходная конфигурация частиц восстанавливалась с течением времени. В этом случае мгновенные макроскопические характеристики суспензии можно осреднить по отрезку времени, необходимому для восстановления решетки. Рассмотрено периодическое и почти периодическое течение суспензии.

В *разделе 4.2* описана динамика кубической решетки в случае, когда тензор градиентов скоростей известен заранее и постоянен. Предполагается, что сдвиг производится в одном из трех направлений:

1. вдоль ребра куба,
2. вдоль диагонали одной из граней,
3. вдоль главной диагонали куба

В этих трех случаях $\mathcal{G}^{\text{coef}} = 2 : m$. Возмущения скорости и давления найдены с точностью до ε^3 .

При деформации решетки частицы приобретают отличную от нуля мгновенную угловую скорость в отсутствие внешнего момента. Эта скорость (как и мгновенная сдвиговая вязкость) меняется с течением времени:

$$\omega(q) = \frac{5}{2}\dot{\gamma}\varepsilon^3 f_-(q), \quad \eta^{sh} = \eta \left[1 + \frac{5}{2}\phi \left(1 + 5f_+(q)\frac{\phi}{f} \right) \right]$$

Здесь $\dot{\gamma}$ – скорость сдвига, $q = \dot{\gamma}t$ – безразмерное время.

Графики функций $f_{\pm}(q)$ для простой кубической решетки при трех разных направлениях сдвига приведены на рис. 7.

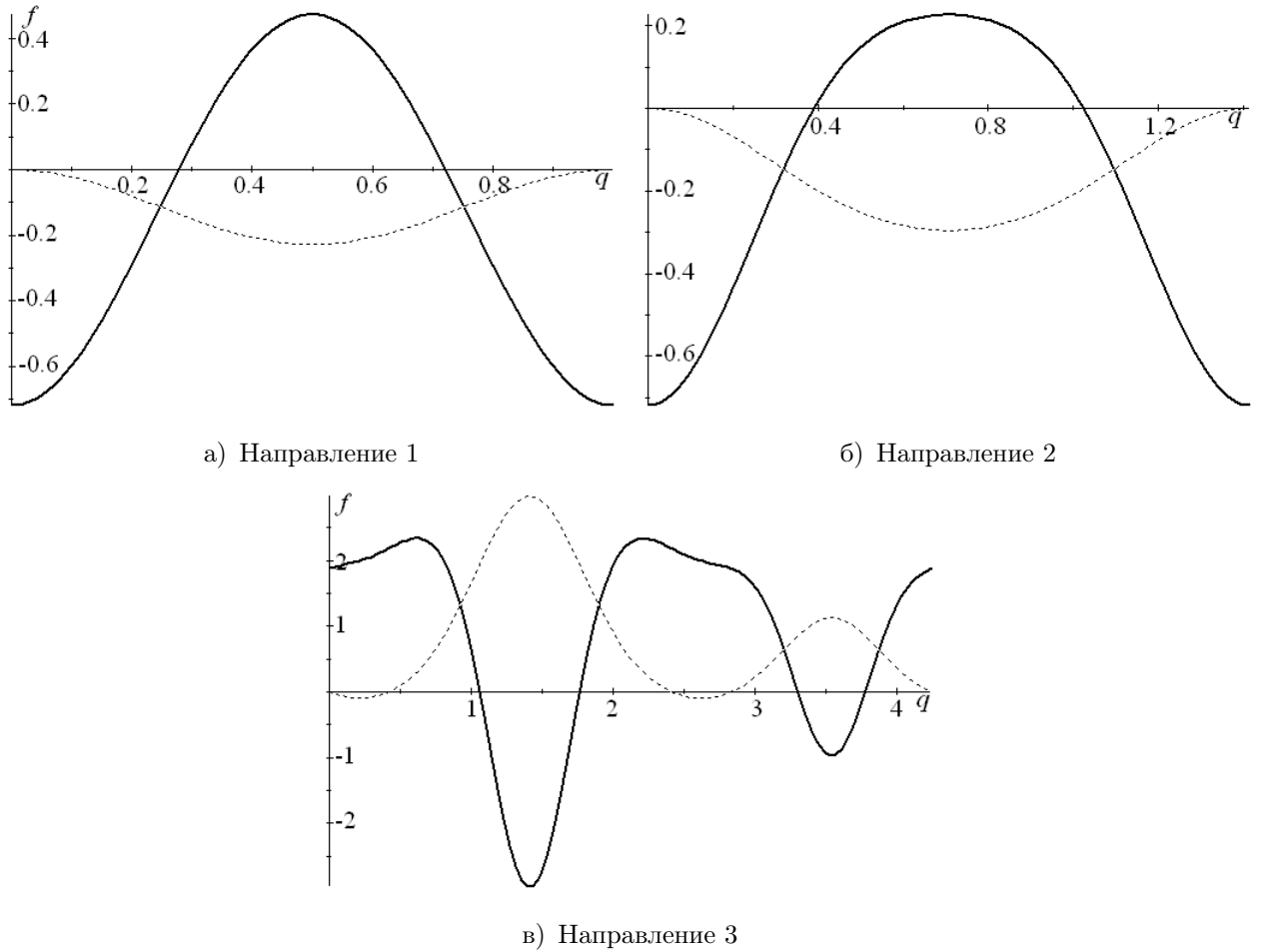


Рис. 7: Сплошная линия – $f_+(q)$, пунктир – $f_-(q)$

Среднее значение сдвиговой вязкости зависит от типа исходной решетки и направления сдвига; по сравнению с мгновенной вязкостью суспензии с недеформированной решеткой оно может как увеличиться, так и уменьшиться. При $\phi \leq 0.1$ изменение составляет 1–2%. Для рассмотренных начальных конфигураций частиц и направлений сдвига можно указать такой момент времени $t = t^*$, что сдвиговая вязкость η^{sh} и относительная угловая скорость частиц ω суть четные функции $t - t^*$. Время отсчитывается от момента, когда

частицы образовали кубическую решетку. Это свойство позволяет снизить вычислительные затраты.

В *разделе 4.3* исследуется динамика периодической суспензии, в которой поддерживается постоянное среднее напряжение. В этом случае скорость сдвига меняется с течением времени, а на основной сдвиговой поток накладываются расширения/сжатия ячейки решетки вдоль координатных осей. При сдвиге в направлениях, указанных выше, эти движения периодичны. Основным следствием такого “дыхания” решетки является увеличение промежутка времени, необходимого для восстановления исходной конфигурации. Характер изменения сдвиговой вязкости и угловой скорости частиц аналогичен случаю “недышащей” решетки. Влияние периодических расширений/сжатий ячейки на среднее значение сдвиговой вязкости обнаружено не было.

Заключение содержит краткий обзор основных результатов, полученных в ходе диссертационного исследования.

В *Приложении А* указаны некоторые свойства специальных функций, использованных для построения общего решения уравнений Стокса.

В *Приложении В* приведены значения решеточных сумм по кубическим и гексагональным решеткам, а также средние значения мультиполей по ячейкам периодичности решеток.

Основные результаты

Основные результаты работы таковы:

- На основе мультипольного разложения решения уравнений Стокса и теории нелинейных тензорных функций разработана и программно реализована модель течения жидкости, содержащей периодическую структуру твердых сферических частиц.
- Описано поведение жидкости, содержащей кубическую или гексагональную решетку сфер, в однородном и линейном потоках. С помощью найденных периодических возмущений скорости и давления получены макроскопические характеристики таких суспензий – тензоры проницаемости и эффективной вязкости.
- В частных случаях, когда в жидкости взвешена кубическая решетка сфер, результаты, полученные с помощью предлагаемой модели, хорошо согласуются с результатами, полученными другими методами.
- Описана динамика решетки частиц в сдвиговом потоке. Указаны условия, при которых исходная конфигурация частиц периодически восстанавливается. Для трех типов кубических решеток и трех различных направлений сдвига найдено среднее значение сдвиговой вязкости. Показано, что учет деформации решетки и осреднение по времени приводит к изменению вязкости по сравнению с ее мгновенным значением для исходной кубической структуры.

- Разобраны случаи, когда в суспензии с деформирующейся структурой частиц постоянны градиенты скорости и средние напряжения. Показано, что основное различие между ними заключается в увеличении времени, необходимого для восстановления исходной структуры, в случае с постоянными средними напряжениями.

Финансовая помощь РФФИ (проекты №01-01-00435, №04-01-00607) позволила ускорить выполнение исследований и написание диссертации.

Список литературы

1. Adler P.M. Spatially periodic suspensions of convex particles in linear shear flows. III. Dilute arrays of spheres suspended in Newtonian fluids / M. Zuzovsky, P.M. Adler and H. Brenner // *Physics of Fluids*. – 1983. – V. 26, N 7. – P. 1714–1723.
2. Hasimoto H. On the periodic fundamental solutions of the Stokes equations and their application to viscous flow past a cubic array of spheres / H. Hasimoto // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1959. – V.5, pt.2. – P.317–328.
3. Sangani A.S. Slow flow through a periodic array of spheres / A.S. Sangani and A. Acrivos // *International Journal of Multiphase Flow*. – 1982. – V.8, N 4. – P. 343–360.
4. Лохин В.В. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов / В.В. Лохин, Л.И. Седов // *Прикладная математика и механика*. – 1963. – Т. 27, N 3. – С. 393–417.

Научные статьи в ведущих рецензируемых журналах, рекомендуемых ВАК РФ для публикации по кандидатским и докторским диссертациям

1. Мартынов С.И. Вязкость суспензии с кубической решеткой сфер в сдвиговом потоке / С.И. Мартынов, А.О. Сыромясов // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. – 2005. – N 4. – С. 3–14.
2. Мартынов С.И. Симметрия периодической решетки частиц и потока вязкой жидкости в приближении Стокса / С.И. Мартынов, А.О. Сыромясов // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. – 2007. – N 3. – С. 7–20.

Другие публикации

3. Сыромясов А.О. Периодические решения трехмерных уравнений Стокса / А.О. Сыромясов // *Труды Средневолжского математического общества*. – Саранск, 2003. – Т. 5, N 1. – С. 274–279.

4. Сыромясов А.О. Кубическая решетка сфер в сдвиговом потоке / А.О. Сыромясов // Лобачевские чтения – 2003 : материалы третьей все-российской молодежной научной школы-конференции (Казань, 1–4 дек. 2003 г.). – Казань, 2003. – Т. 21 : Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. – С. 156–157.
5. Сыромясов А.О. Обтекание периодической решетки сфер вязкой жидкостью / А.О. Сыромясов // Наука и инновации в Республике Мордовия : материалы III респ. науч.-практ. конф. "Роль науки и инноваций в развитии хозяйственного комплекса региона", Саранск, 25–26 дек. 2003 г. : в 3 ч. – Саранск, 2004. – Ч. 2 : Естественные науки. – С. 261–264.
6. Мартынов С.И. Периодическая решетка твердых сфер в линейном потоке вязкой жидкости / С.И. Мартынов, А.О. Сыромясов // Прикладная математика и механика : сб. науч. тр. – Ульяновск, 2004. – С. 172–176.
7. Martynov S.I. The motion of viscous fluid containing a periodic lattice / Sergey I. Martynov, Alexey O. Syromyasov // High speed hydrodynamics (HSH–2004) : abstracts of the Second international summer scientific school, June 27 – July 3, Cheboksary, Russia. – [Чебоксары, 2004]. – P. 106–108. – Англ., рус.
8. Martynov S.I. The motion of viscous fluid containing a periodic lattice / Sergey I. Martynov, Alexey O. Syromyasov // High speed hydrodynamics (HSH–2004) : proceedings of the Second international summer scientific school, June 27 – July 3, Cheboksary, Russia. – [Чебоксары, 2004]. – P. 251–257.
9. Сыромясов А.О. Эффективная вязкость периодической суспензии / А.О. Сыромясов // Студент и научно-технический прогресс : материалы XLIII междунар. науч. студ. конф. Математика. – Новосибирск, 2005. – С. 28–29.
10. Сыромясов А.О. Вязкость суспензии с периодической решеткой сфер / А.О. Сыромясов // Труды Средневолжского математического общества. – Саранск, 2005. – Т. 7, N 1. – С. 347–351.
11. Сыромясов А.О. Электродинамика структурированной суспензии / А.О. Сыромясов // Труды Средневолжского математического общества. – Саранск, 2006. – Т. 8, N 1. – С. 301–306.
12. Сыромясов А.О. Динамика решетки частиц в сдвиговом потоке / А.О. Сыромясов // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 22–28 авг. 2006 г.) : аннотации докл. – Н. Новгород, 2006. – Т. 2. – С. 164–165.