

**КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ, ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ**  
***КАФЕДРА ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО***  
***МОДЕЛИРОВАНИЯ***

**И.Н. АГЛИУЛЛИН, В.Н. КУШНИРЕНКО, В.А. ТАЛЫЗИН**

**МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГЕОГРАФОВ**  
**ЧАСТЬ 1**  
**УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ**

**КАЗАНЬ 2016**

**Аглиуллин И.Н., Кушниренко В.Н., Талызин В.А.**

**Математика для географов. Часть 1:** Учебно – методическое пособие / И.Н.Аглиуллин, В.Н. Кушниренко, В.А. Талызин – Казань: Казанский университет, 2016. – 76 с.

УДК 517.1 (517.2) (517.3)

ББК 22.161.1

Рецензенты:

заведующий кафедрой математики УВО Университет управления  
«ТИСБИ» профессор, д.т.н. В.И. Заботин  
доцент кафедры экономико-математического моделирования ИУЭиФ  
к.т.н. В.А. Качалкин

Учебно-методическое пособие подготовлено по учебной дисциплине «Математика». В первой части издания изложены основы математического анализа, включающие такие разделы, как множества, предел последовательности, функции одной переменной, основы дифференциального исчисления, применение производных в исследовании функций, неопределенный и определенный интегралы.

Принято на заседании кафедры  
экономико-математического моделирования  
Протокол № 8 от 21 апреля 2016 года

Предназначено для студентов географических специальностей.

© Казанский университет, 2016

© Аглиуллин И.Н.,

©Кушниренко В.Н.,

©Талызин В.А., 2016

## Содержание

1.	Основные понятия математического анализа .....	5
1.1.	Действительные числа.....	5
1.2.	Множества и интервалы . .....	8
1.3.	Постоянные и переменные величины. Функция.....	9
1.4.	Основные элементарные функции.....	10
1.5.	Предел переменной величины. Предел функции.....	11
1.6.	Свойства пределов.....	15
1.7.	Приращения аргумента и функции. Непрерывность функции.....	15
1.8.	Свойства непрерывных функций.....	19
2.	Дифференциальное исчисление функции одной переменной..	20
2.1.	Определение производной.....	20
2.2.	Свойства производной и правила дифференцирования.....	23
2.3.	Производные элементарных функций.....	25
2.4.	Производные тригонометрических функций.....	26
2.5.	Производные обратных тригонометрических функций.....	27
2.6.	Правило Лопиталя.....	28
2.7.	Уравнения кривых в параметрической форме.....	29
2.8.	Производная функции, заданной параметрически.....	31
2.9.	Производная функции, заданной неявно.....	32
2.10.	Логарифмическое дифференцирование.....	32
2.11.	Дифференциал и его геометрический смысл.....	33
2.12.	Применение дифференциала в приближенных вычислениях...35	
2.13.	Производные и дифференциалы высших порядков.....	36
2.14.	Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях.....	37
2.15.	Исследование поведения функции .....	40
2.15.1.	Возрастание (убывание) функции .....	40
2.15.2.	Выпуклость (вогнутость) графика функции.....	42
2.15.3.	Точки перегиба.....	44
2.15.4.	Асимптоты графика функции.....	44
2.15.5.	Примерная схема исследования функции.....	45
3.	Интегральное исчисление.....	49
3.1.	Понятие первообразной.....	49
3.2.	Неопределенный интеграл и его свойства.....	50
3.3.	Таблица неопределенных интегралов.....	52
3.4.	Основные методы интегрирования.....	53
3.5.	Интегрирование рациональных функций.....	54
3.6.	Интегрирование иррациональных функций.....	56
3.7.	Интегрирование тригонометрических функций.....	58
4.	Определенный интеграл.....	61
4.1.	Определенный интеграл как предел интегральных сумм.....	61

4.2.	Свойства определенного интеграла.....	62
4.3.	Формула Ньютона-Лейбница.....	64
4.4.	Замена переменной в определенном интеграле.....	65
4.5.	Интегрирование по частям в определенном интеграле.....	66
5.	Геометрические приложения определенного интеграла.....	67
5.1.	Вычисление площадей плоских фигур.....	67
5.2.	Длина дуги кривой.....	69
5.3.	Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений.....	71
5.4.	Площадь поверхности вращения.....	74
	Литература.....	76

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

## 1.1. Действительные числа

Из школьного курса математики известно, что действительные числа – это совокупность рациональных и иррациональных чисел, которые могут быть как положительными, так и отрицательными. Последовательность их появления нам представляется следующей: вначале появились целые положительные числа  $1, 2, 3, \dots$  для подсчета и выполнения простых операций сложения. Эти числа называются **натуральными** –  $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ . В противоположность операции сложения появилась операция вычитания, следствием которой стало появление целых отрицательных чисел и числа ноль. Таким образом, появилось **множество целых чисел**:  $\{\dots, -n, -(n-1), \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ . Необходимость многократного сложения одного и того же числа привела к операции умножения. Операция обратная умножению привела к операции деления и, как следствие, к появлению дробных чисел. Объединение целых чисел и обыкновенных дробей, т.е. отношения целых чисел ( $2/3$ ,  $7/8$ ) привело к появлению так называемых **рациональных чисел**. Если пользоваться десятичными дробями, то рациональные числа представляются либо конечными, либо бесконечными, но периодическими десятичными дробями. Операция возведения в целую степень (многократное умножение одного и того же числа), привела к противоположной операции - извлечению корня четной и нечетной степени из положительного числа и нечетной степени из отрицательного числа. Таким образом, появились **иррациональные числа**, которые представляются бесконечными непериодическими дробями. К иррациональным числам также относятся, такие числа как  $\pi = 3,14 \dots$ ;  $e = 2,718 \dots$ ,  $\log_{10} 2$ ,  $\sin 1^\circ$  и т.д.

**Действительные числа** (совокупность рациональных и иррациональных чисел) принято изображать точками числовой оси – это бесконечная прямая на которой выбраны: некоторая точка  $O$ , называемая точкой отсчета, положительное направление, указываемое стрелкой, с выбором масштаба для измерения длины (рис.1.1).

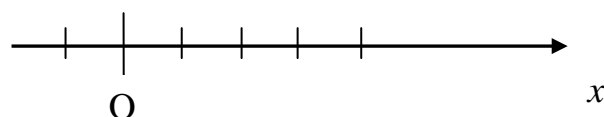


Рис. 1.1. Изображение действительного числа с помощью числовой оси

Между точками прямой (координатами чисел) и действительными числами существует взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому действительному числу отвечает единственная точка, координатой которой является это число и, наоборот, каждой точке соответствует единственное действительное число. Это обстоятельство во многих дальнейших рассуждениях позволяет равнозначно употреблять понятие «число  $x$ » и «точка  $x$ ». Действительные числа упорядочены по величине, т.е. для каждой пары действительных чисел « $x$ » и « $y$ » имеет место одно и только одно из соотношений:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y$$

Совокупность всех действительных чисел обычно обозначают буквой  $R$ .

Действительные числа также называются *вещественными*. Термин «действительное число» возник, как необходимость отличать их от так называемых «мнимых чисел», которые принято называть комплексными.

**Комплексные числа**, получаются при извлечении корней четных степеней из отрицательных чисел, например при решениях квадратных уравнений, когда дискриминант число отрицательное. Решение уравнения  $x^2 - 4x + 13 = 0$  приводит к следующим корням  $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9}$  или  $x_{1,2} = 2 \pm 3i$ , где  $i$  (мнимая единица) обозначает корень квадратный из «-1», т.е.  $i = \sqrt{-1}$ . Удобной формой изображения комплексного числа является их геометрическая интерпретация на комплексной плоскости. Число  $z = a + b \cdot i$  определяется как пара действительных чисел  $(a, b)$ , которым соответствует точка плоскости  $(Oxy)$  с декартовыми координатами  $x = a, y = b$ . Число  $z = 0$  соответствует началу координат данной плоскости. Ось абсцисс называется действительной, ось ординат – мнимой осью комплексного числа. На рис. 1.2 изображена пара комплексных чисел  $2 \pm 3 \cdot i$ . Изучением комплексных чисел и функций от них занимается специальный раздел высшей математики, называемый «Теория функций комплексной переменной».

Дальнейшее изложение курса математики будет касаться только действительных чисел, т.е. только тех чисел комплексной плоскости, которые лежат на действительной оси.

Отметим без доказательства два важных свойства совокупности действительных чисел:

- 1) между двумя произвольными действительными числами найдутся как рациональные, так и иррациональные числа;
- 2) каждое иррациональное число можно с любой точностью выразить с помощью рациональных чисел.

Расстояние от точки  $x$  до точки отсчета  $O$  называется абсолютной величиной или модулем числа  $x$ . Тогда, используя общепринятое обозначение модуля, можно записать

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

а расстояние между точками  $x$  и  $y$  числовой прямой равно  $|x - y|$ .

Для любых двух действительных чисел имеет место неравенство  $|a + b| \leq |a| + |b|$ , а равенство выполняется только тогда, когда эти числа имеют одинаковые знаки.

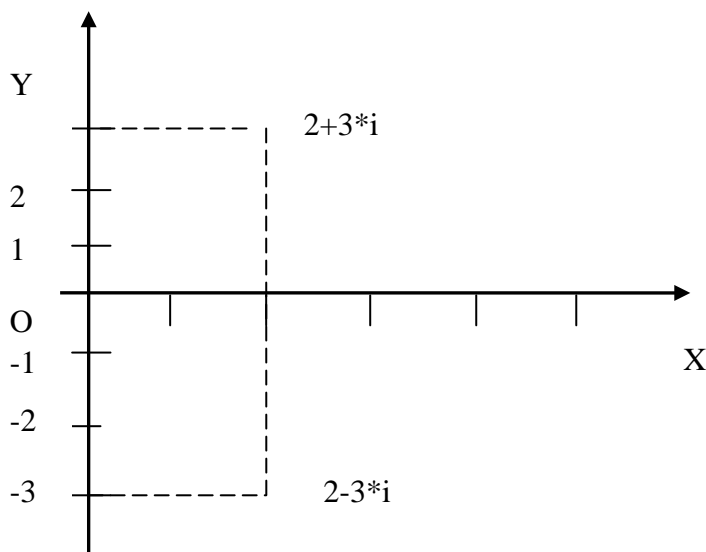


Рис. 1.2. Изображение комплексных чисел на плоскости

Очевидно, что мы пользуемся десятичной системой счисления (по числу пальцев на руках). В целях повышения общей математической культуры отметим, что в современном русском языке, а также в языках других народов названия всех натуральных чисел до миллиона состоят из 37 слов. Эти слова обозначают числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000. В свою очередь названия этих 37 чисел, как правило, образованы из названий чисел (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) и чисел 10, 100, 1000. Например, 2016 – это 2 раза по тысяче, один десяток и 6 единиц. В русском языке исключением является наименование «сорок» (прежде наравне с ним употреблялось и слово «четыредесят»). Словом «сорок» (иначе «сорочка») в древней Руси называли большой мешок, куда укладывались ценные соболиные шкурки и слово «сорок» играло особую роль, означая неопределенно большое количество (Али - баба и *сорок* разбойников). Число 90, хотя и не читается как «девяносто», тем не менее, слово «девяносто» также образовано из двух перечисленных 37 слов, как «девять-до-ста».

## 1.2. Множества и интервалы

В математике *множеством* называют совокупность каких-то предметов: множество книг, множество стульев, множество целых чисел, множество чисел от единицы до ста и т.д. Элементы множества – это предметы, составляющие множество. Принадлежность элемента  $a$  множеству  $A$  записывается в виде  $a \in A$ . Запись  $a \notin A$  означает, что элемента не принадлежит множеству  $A$ .

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается  $\emptyset$ .

*Открытым интервалом*  $(a, b)$  для множества действительных чисел называется интервал, содержащий действительные числа  $x$ , удовлетворяющие неравенствам  $a < x < b$ . Открытый интервал не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значений. Какое бы число, близкое к левому концу интервала  $a$  мы не взяли, всегда найдется число, лежащее между левым концом интервала  $a$  и этим числом. Аналогично для правого конца интервала.

*Замкнутый интервал*  $[a, b]$  состоит из всех чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $a \leq x \leq b$ , т.е., замкнутый интервал получается присоединением к открытому интервалу точек (значений)  $a$  и  $b$  концов интервала. *Полуоткрытый (полузамкнутый)* интервал получается присоединением к открытому интервалу одного из значений  $a$  или  $b$  концов интервала. В этом случае это одно из следующих множеств действительных чисел  $a < x \leq b$  или  $a \leq x < b$ . Множество  $R$  всех действительных чисел – это  $(-\infty, +\infty)$ , где символ " $\infty$ " читается как бесконечность и этот символ нельзя считать действительным числом.

*Окрестностью точки*  $x_0$  называется любой открытый интервал, содержащий эту точку. Очевидно, что открытый интервал  $(a, b)$  является окрестностью любой точки, принадлежащей этому интервалу.

Открытый интервал длины  $2\varepsilon$  с центром в точке  $a$  называется  $\varepsilon$  (эпсилон) – *окрестностью* точки  $a$ . Координаты  $x$  точек, принадлежащих  $\varepsilon$  – окрестности точки  $a$ , удовлетворяют неравенствам  $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$  (рис. 1.3).

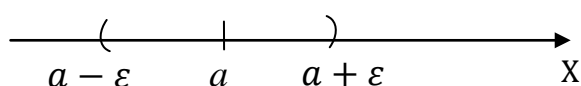


Рис. 1.3.  $\varepsilon$  – окрестность точки  $a$

### 1.3. Постоянные и переменные величины. Функция

При измерениях физических величин измеряются время, длина, площадь, температура и т.д. Математика занимается величинами, отвлекаясь от их конкретного содержания и в дальнейшем, говоря о величинах, мы будем иметь в виду только их численные значения, которые могут быть как переменными, так и постоянными.

**Переменной величиной** называется величина, которая принимает различные численные значения. Если величина все время сохраняет одно и тоже численное значение то она называется **постоянной величиной**.

Величина  $y$  называется **функцией переменной величины  $x$**  в области определения  $D$ , если каждому значению  $x$  из этой области соответствует одно определенное значение величины  $y$ , вычисляемое по определенному правилу. При этом величина  $x$  является независимой переменной и называется аргументом функции  $y$ . Множество  $D$  называется **областью определения функции**.

Задать функцию – это значит указать область ее определения и правило, по которому для каждого из значений независимой переменной  $x$  из области определения находится соответствующее этому значению значение функции. Областью определения функции может быть любое множество точек числовой оси, но чаще всего рассматривают функции, для которых области определения принадлежат двум типам:

1) множество целых неотрицательных чисел  $x = 0, x = 1, x = 2, \dots$ , (или некоторая часть этого множества), в этом случае говорят о функциях целочисленного аргумента;

2) один или несколько интервалов (конечных или бесконечных) числовой оси, в этом случае говорят о функциях непрерывного аргумента.

Функцию можно задать с помощью таблицы, графика, формулы или описать словесно.

При задании функции в виде таблицы выписывается ряд значений независимой переменной и соответствующих им значений функции. Из школьной программы известны таблицы десятичных логарифмов, таблицы тригонометрических функций и т.д.

**Графиком функции** (в декартовой системе координат) называется множество всех точек, абсциссы которых являются значениями независимых переменных, а ординаты – соответствующими значениями функции (графики тригонометрических функции, парабола, гипербола) и т.д.

Аналитическое задание функции состоит в том, что указывается формула, с помощью которой по заданным значениям независимой переменной вычисляются соответствующие им значения функции. Этот способ задания является основным при изучении курса математики.

## 1.4. Основные элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

- 1) Степенная функция:  $y = x^n$ , где  $n$  – действительное число;
- 2) Показательная функция:  $y = a^x$ , где  $a > 0, a \neq 1$ ;
- 3) Логарифмическая функция:  $y = \log_a x$ , где  $a > 0, a \neq 1$ ;
- 4) Тригонометрические функции:  $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$ .
- 5) Обратные тригонометрические функции:  $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$ .

Важным понятием в математике является понятие сложной функции.

*Сложной функцией* называется функция, составленная из двух или более функций, например  $y = f[\varphi(x)]$ , или  $y = f[u], u = \varphi(x)$ . Функция  $u = \varphi(x)$  при этом называется промежуточной переменной.

Функции, построенные из основных элементарных функций и постоянных величин при помощи конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции, называются *элементарными функциями*.

Например, элементарными будут функции

$$y = \sin \sqrt{x}; \quad y = \frac{\sin(x)^2 + 1}{a + b \cdot \cos x}$$

Неэлементарные функции встретятся в процессе дальнейшего изложения.

Элементарные функции принято разделять на два класса: алгебраические функции и трансцендентные функции.

*Функция называется алгебраической*, если ее значения можно получить, производя над независимой переменной конечное число алгебраических действий: сложений, вычитаний, умножений, делений и возведений в степень с рациональными показателями. Функция, не являющаяся алгебраической, называется *трансцендентной*.

Например, следующие функции являются алгебраическими:

$$y = 2x^2 - 3x + 5; \quad y = \frac{\sqrt{x} + 5}{x + \sqrt[3]{x - 1}},$$

а функции  $y = x \cdot 3^x; y = \sin x$ , являются трансцендентными.

Алгебраические функции в свою очередь разделяются на рациональные и иррациональные функции.

*Рациональной функцией* называется алгебраическая функция, если среди действий, которые производятся над независимой переменной, от-

существует извлечение корней, иначе функция называется *иррациональной*. Примеры рациональных функций

$$y = \frac{\sqrt{2x + x^2}}{\sqrt[3]{3} - 1}; y = 2x^2 - 3x + 5.$$

Первый из примеров еще называют *дробно-рациональной функцией*.  
Примеры иррациональных функций

$$y = \sqrt{x}; y = \frac{\sqrt{x} + 5}{x + \sqrt[3]{x - 1}}.$$

Функция может быть задана в неявном виде, например

$$x + y = 10; y * \sin x + x * 2^y = 1.$$

Во втором примере вообще нельзя выразить переменную  $y$  через переменную  $x$ .

### 1.5. Предел переменной величины. Предел функции

**Определение.** Постоянное число  $x_0$  называется *пределом переменной величины  $x$* , если для любого наперед заданного произвольного малого положительного числа  $\varepsilon$  можно указать такое значение переменной  $x$ , что все последующие значения переменной будут удовлетворять неравенству  $|x - x_0| < \varepsilon$ .

Если число  $x_0$  есть предел переменной величины  $x$ , то говорят, что  $x$  стремится к пределу  $x_0$ , и пишут:  $x \rightarrow x_0$  или  $\lim x = x_0$ .

Символ *lim* составляется из трех букв латинского слова *limes* (французского *limite*), означающего «предел».

**Пример.** Переменная величина  $x$  последовательно принимает значения

$$x_1 = 1 + 1, x_2 = 1 + \frac{1}{2}, x_3 = 1 + \frac{1}{3}, \dots, x_n = 1 + \frac{1}{n}, \dots$$

**Решение.** Докажем, что эта переменная величина имеет предел, равный единице. Действительно

$$|x_n - 1| = \left| \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right| = \frac{1}{n}.$$

Для любого  $\varepsilon > 0$  все последующие значения переменной, начиная с номера  $n$ , где

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

или

$$n > \frac{1}{\varepsilon},$$

будут удовлетворять неравенству

$$|x_n - 1| < \varepsilon.$$

Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , за исключением, быть может, самой точки  $x_0$ .

**Определение.** Число  $A$  называется *пределом функции  $f(x)$*  при  $x \rightarrow x_0$  (читается: при  $x$ , стремящемся к  $x_0$ ), если, по мере того как  $x$  приближается к  $x_0$  - значение  $f(x)$  приближается («стремится») к  $A$  и записывается

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

В математике наиболее употребительной является запись предела на так называемом языке "ε, δ" (эпсилон – дельта) с помощью логических символов (кванторов).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Эта запись читается следующим образом, число  $A$  называется *пределом функции  $f(x)$*  при  $x \rightarrow x_0$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$ , найдется такое число  $\delta > 0$ , что как только разность  $|x - x_0|$  становится меньше  $\delta$ , то разность  $|f(x) - A|$  становится меньше  $\varepsilon$ . Очевидно, что в общем случае  $\delta$  зависит от  $\varepsilon$ .

**Пример.** Рассмотрим функцию  $y = 3x - 1$  и докажем, что эта функция при  $x \rightarrow 1$  имеет предел равный 2, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2$$

**Решение.** Зададим произвольное число  $\varepsilon > 0$ . Для того, чтобы имело место неравенство  $|(3x - 1) - 2| < \varepsilon$  или тоже самое  $3|x - 1| < \varepsilon$  необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $|x - 1| < \varepsilon/3$ . Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{3}: |x - 1| < \delta \Rightarrow |(3x - 1) - 2| < \varepsilon.$$

**Пример.** Рассмотрим еще один пример

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Эта функция не определена при  $x = 1$ , но

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

При  $x \neq 1$  функция может быть записана в виде  $y_1 = x + 1$ . Функции  $y$  и  $y_1$  разные функции, так как они имеют разные области определений, но их значения совпадают при любых  $x \neq 1$ . Существование предела можно изобразить графически (рис. 1.4).

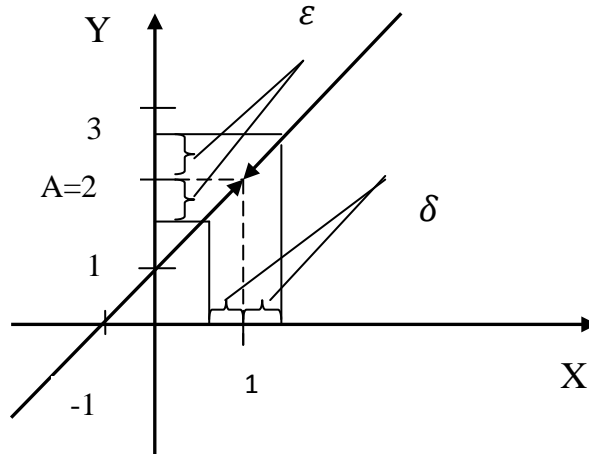


Рис. 1.4. Предел функции

**Определение.** Функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  **предел слева**, равный  $A$ , если для любого, сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$ , найдется такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x$  таких, что  $x_0 - \delta < x < x_0$  имеет место  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . Или с помощью кванторов

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x (x_0 - \delta < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Здесь соотношением вида  $x \rightarrow x_0 - 0$  отмечается, что  $x$  стремится к  $x_0$ , оставаясь левее точки  $x_0$ .

**Определение.** Функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  **предел справа**, равный  $B$ , если для любого, сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$ , найдется такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x_0 < x < x_0 + \delta$  имеет место  $|f(x) - B| < \varepsilon$ . Или с помощью кванторов

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = B \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x (x_0 < x < x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon.$$

Здесь соотношением вида  $x \rightarrow x_0 + 0$  отмечается, что  $x$  стремится к  $x_0$ , оставаясь правее точки  $x_0$ .

**Пример.** Рассмотрим следующую функцию, которая определена для  $\forall x \in R$  (рис. 1.5.),

$$y = \begin{cases} x + 1, & \text{при } x < 1 \\ x + 3, & \text{при } x > 1 \\ 3, & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

**Решение.** Рассмотрим пределы слева и справа в точке  $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1 - 0} (x + 1) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 1 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1 + 0} (x + 3) = 4.$$

Т.е. пределы слева и справа существуют, но не равны между собой и не равны значению функции в точке  $x = 1$ , ( $f(1) = 3$ ).

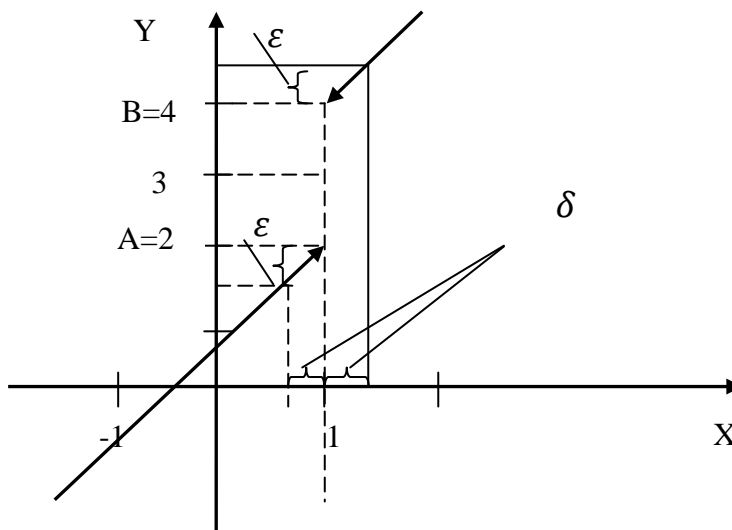


Рис. 1.5. Пределы «слева» и «справа»

**Определение.** Функция  $f(x)$  имеет предел в *бесконечно удаленной точке* ( $x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ ), равный  $A$ , если для любого, сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$ , найдется такое число  $N$ , что для всех  $|x| > N$  выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . Или с помощью кванторов

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall |x| > N \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

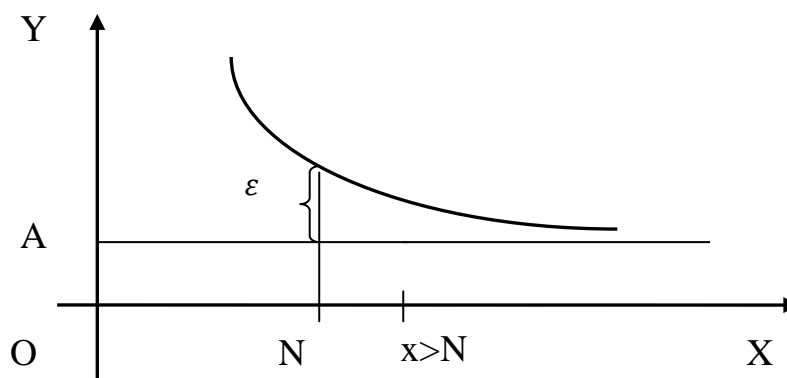


Рис 1.6. Предел на бесконечности

Приведем без доказательства два «замечательных» предела:

1. Первый «замечательный» предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

2. Второй «замечательный» предел

а) первая форма

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$$

б) вторая форма

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e,$$

где  $e \approx 2,718281828459045 \dots$  бесконечная непериодическая дробь; называется числом Эйлера.

### 1.6. Свойства пределов

Приведем без доказательства свойства пределов.

1. Функция не может иметь более одного предела.

2. Если для одного из пяти случаев:  $x \rightarrow x_0, x \rightarrow x_0 \pm 0, x \rightarrow \pm\infty$  имеет место  $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ , то

$$а) \lim(c_1 \cdot f(x) \pm c_2 \cdot g(x)) = c_1 \cdot A \pm c_2 \cdot B;$$

$$б) \lim(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$$

$$в) \lim f(x)/g(x) = A/B, \text{ если } B \neq 0.$$

3. Для сложной функции  $\lim f[g(x)] = f[\lim g(x)]$ , т.е. для непрерывных функций символы предела и функции можно поменять местами.

### 1.7. Приращения аргумента и функции. Непрерывность функции

Дана функция  $y = f(x), x \in D$ . Рассмотрим два значения аргумента  $x_0 \in D, x \in D$ :  $x_0$  - исходное значение аргумента,  $x$  - последующее значение аргумента.

**Приращением аргумента  $\Delta x$**  - называется разность  $\Delta x = x - x_0$ .

**Приращением функции  $\Delta y$**  - называется разность,  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  - (рис. 1.7). Символы  $\Delta x, \Delta y$  неразделяемые и читаются «дельта x», «дельта y».

Как правило,  $x_0$  - фиксированное значение, а  $x$  переменное. Значит  $\Delta x, f(x_0 + \Delta x), \Delta y$  являются функциями переменной  $x$ . Заметим, что  $\Delta y$  является функцией  $\Delta x$ .

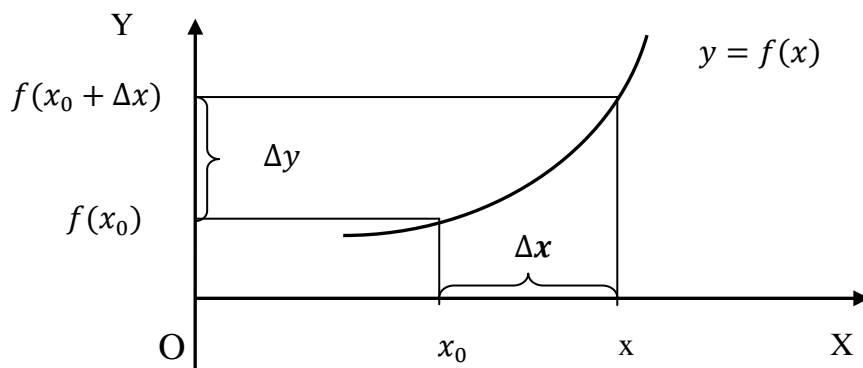


Рис. 1.7. Приращения аргумента и функции

**Пример.** Найти приращение функции  $y = x^2$  в точке  $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ .

**Решение:**

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2 * x_0 * \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Понятие непрерывности функции в точке введем с помощью приращений аргумента и функции.

**Определение.** Функция  $y = f(x)$ ,  $x \in D$ , называется **непрерывной** в точке  $x_0 \in D$  (предполагается, что функция  $f(x)$  определена в точке  $x_0$  и некоторой ее окрестности), если при  $\Delta x \rightarrow 0$ , следует  $\Delta y \rightarrow 0$ . Т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

На языке " $\varepsilon, \delta$ " это определение записывается следующим образом: функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0 \in D$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Геометрическая иллюстрация непрерывности приведена на рис. 1.8.

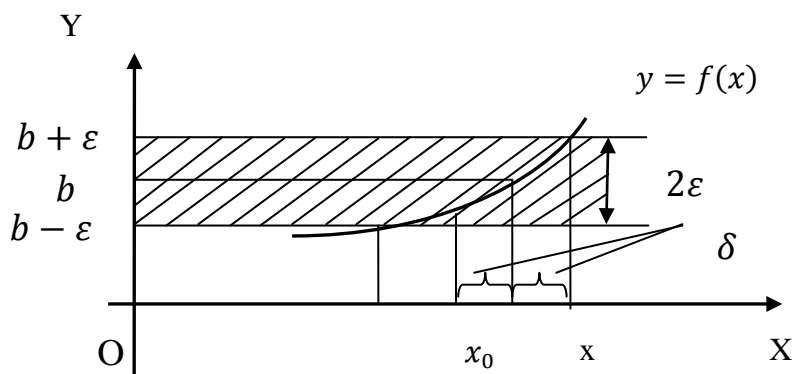


Рис. 1.8. Непрерывность функции

Условие непрерывности можно записать и так:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

или

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

но

$$x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} x,$$

тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right),$$

т.е. для нахождения предела непрерывной функции при  $x \rightarrow x_0$  достаточно в выражение функции подставить вместо аргумента  $x$  значение  $x_0$ .

Функция  $y = f(x)$ ,  $x \in D$ , называется **непрерывной** на некотором множестве  $X \subset D$ , если она непрерывна в каждой точке этого множества  $X$ .

**Определение.** Если в какой-либо точке  $x_0$  функция не является непрерывной, то точка  $x_0$  называется точкой разрыва функции.

При этом предполагается, что функция определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , а в самой же точке  $x_0$  функция может быть, как определена, так и не определена.

Точки разрыва функции могут быть первого и второго рода.

К точкам разрыва первого рода относятся точки, в которых пределы слева и справа существуют, но не равны между собой, либо равны между собой, но не равны значению функции в этой точке.

В примере (рис.1.5) в точке  $x = 1$ , рассматриваемая функция имеет разрыв первого рода, т.к. пределы слева и справа не равны между собой. Это пример так называемого **неустранимого** разрыва первого рода.

Рассмотрим функцию

$$y = \frac{\sin x}{x},$$

которая определена в окрестности точки  $x = 0$ , но в самой точке  $x = 0$  не определена. Эта функция имеет предел равный единице при  $x \rightarrow 0$ , т.е. пределы слева и справа существуют и равны между собой. Таким образом,  $x = 0$  точка разрыва первого рода.

Если рассматриваемую функцию доопределить следующим образом:

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

то данная функция определена в  $x = 0$ , имеет пределы слева и справа равные между собой и равные значению функции в этой точке. В этом случае для функции

$$y = \frac{\sin x}{x},$$

точка  $x = 0$  является точкой *устраняемого* разрыва первого рода.

В точках  $x_0$  разрыва второго рода предел функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  слева и/или справа, либо равны  $\pm\infty$ , либо не существуют. Точки разрыва второго рода могут быть и на концах области определения функции. Например, для функций

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \ln x, \quad y = \sin \frac{1}{x},$$

точка  $x = 0$  является точкой разрыва второго рода.

Покажем, что все основные элементарные функции непрерывны в каждой точке области определения.

1. Линейная функция  $y = kx + b$ . Пусть здесь и в дальнейшем  $x_0 = x$ , т.е. произвольное значение. Тогда

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = k(x + \Delta x) + b - kx - b = k * \Delta x$$

и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (k * \Delta x) = k * \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x) = 0.$$

2. Степенная функция  $y = x^n$ , доказательство рассмотрим для целых  $n$ ,  $n \in N$ . Воспользуемся формулой бинома Ньютона

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} \Delta x + C_n^2 x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n \\ &= \Delta x \left( nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 * 2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right). \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \left( nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 * 2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right) = 0.$$

3. Показательная функция  $y = a^x$ . Тогда  $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$  или

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^x (a^{\Delta x} - 1) = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (a^{\Delta x} - 1) = 0.$$

4. Логарифмическая функция  $y = \log_a x$ .

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right),$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \log_a 1 = 0.$$

5. Рассмотрим одну из тригонометрических функций, например  $y = \sin x$ . Вычислим приращение функции

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right),$$

тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = 0,$$

так как  $2 \left| \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right| \leq 2$ .

### 1.8. Свойства непрерывных функций

**Теорема.** Если две функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  непрерывны в точке  $x_0$ , то алгебраическая сумма  $\psi(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$  также есть непрерывная функция в точке  $x_0$ .

*Доказательство.*

Так как функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  непрерывны, то по определению непрерывности имеем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = f_1(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = f_2(x_0).$$

На основании свойства 2 о пределах можем записать

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \\ &= f_1(x_0) \pm f_2(x_0), \end{aligned}$$

или

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \psi(x_0).$$

Теорема доказана. Как следствие отметим, что теорема справедлива для любого конечного числа слагаемых.

Опираясь на свойства пределов, также можно доказать следующие теоремы:

а) произведение двух непрерывных функций есть функция непрерывная;

б) частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная, если знаменатель в рассматриваемой точке не обращается в ноль;

в) если  $u = \varphi(x_0)$  непрерывна при  $x = x_0$ , а функция  $f(u)$  непрерывна в точке  $u_0 = \varphi(x_0)$ , то сложная функция  $f[\varphi(x)]$  непрерывна в точке  $x_0$ .

## 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### 2.1. Определение производной

Пусть  $y = f(x)$  непрерывная функция аргумента  $x$ , определенная на интервале  $(a, b)$ , и пусть  $x$  - какая-либо точка этого интервала. Дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ . Функция  $y = f(x)$  также получит приращение  $\Delta y$ , равное

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

**Определение.** *Производной* функции называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Для производной общепринятыми являются следующие обозначения:

$$f'(x); y'; \frac{dy}{dx}; \frac{df(x)}{dx}$$

Рассмотрим геометрический смысл производной (рис. 2.1).

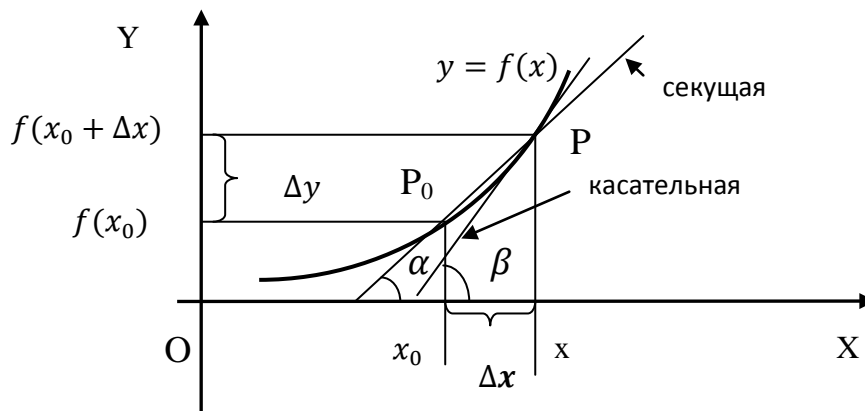


Рис. 2.1. Геометрический смысл производной

В точке графика функции  $P_0(x_0, y_0)$  аргументу  $x_0$  дадим приращение  $\Delta x$ . Функция получит приращение  $\Delta y$ . Пусть  $P_0(x_0, y_0)$  такая точка графика функции, в которой можно провести касательную. Касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол  $\alpha$ . Проведем секу-

шую  $P_0P$ , которая образует с положительным направлением оси абсцисс угол  $\beta$ . При этом угловой коэффициент секущей  $P_0P$

$$k_1 = \operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Пусть  $P \rightarrow P_0$  по кривой, тогда  $\Delta x \rightarrow 0$ , секущая стремится к касательной и  $\beta \rightarrow \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \beta \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$ . Очевидно, что в этом случае

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Таким образом, геометрический смысл производной  $f'(x_0)$  равен угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке с абсциссой  $x_0$ . Уравнение касательной имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Выясним механический смысл производной. Рассмотрим задачу о скорости движения точки. Пусть задана функция  $S(t)$ , описывающая закономерность прямолинейного движения точки (рис .2.2).

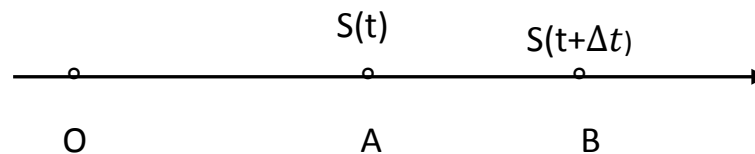


Рис. 2.2. Механический смысл производной

Точка  $A$  на прямой определяет путь  $S(t)$ , пройденный точкой к моменту времени  $t$ , а точка  $B$  путь  $S(t + \Delta t)$ , пройденный точкой к моменту времени  $t + \Delta t$ , тогда  $\Delta S = |AB| = |S(t + \Delta t) - S(t)|$ .

Средняя скорость движения точки за момент времени  $\Delta t$ , есть величина

$$V_{\text{cp}}(\Delta t) = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Введем понятие «мгновенной скорости»:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t).$$

Таким образом, механический смысл производной – скорость – это производная от пути по времени. Если функция  $\varphi(t)$  отражает протека-

ние, каких – либо экономических, климатических или природных процессов, то  $\varphi'(t)$ , быстрота их протекания, например – скорость роста доходов.

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется «дифференцируемой» в точке  $x$ , если она имеет в этой точке производную, т.е. существует конечный предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Между дифференцируемостью функции и непрерывностью функции существует связь .

**Теорема.** Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке функция непрерывна.

*Доказательство.*

Пусть  $y = f(x)$  функция, дифференцируемая в точке  $x$ , т.е. имеет место соотношение

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y',$$

тогда из тождества

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \quad (\Delta x \neq 0)$$

следует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = y' \cdot 0 = 0.$$

Следовательно,  $y = f(x)$  непрерывная в точке  $x$  функция.

Обратное утверждение неверно: непрерывная функция может не иметь производной (рис. 2.3.).

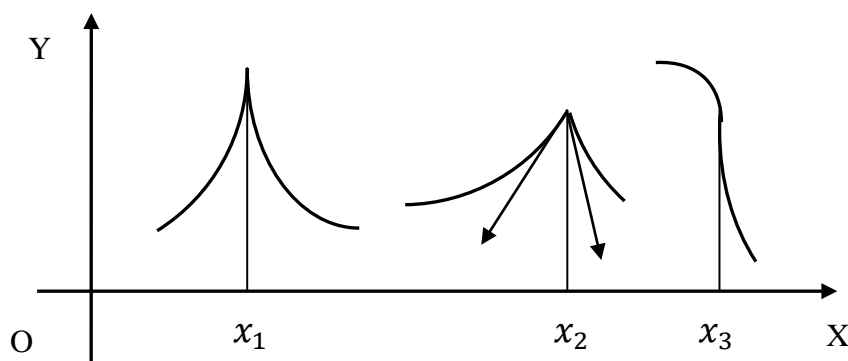


Рис. 2.3. Примеры не дифференцируемой непрерывной функции

Точки с абсциссами  $x_1, x_2, x_3$  называются, соответственно, точкой возврата с вертикальной касательной, угловой точкой и точкой перегиба с вертикальной касательной, в этих точках функция не дифференцируемая.

Например, функция  $y = |x|$  непрерывна в точке  $x = 0$ , но не является дифференцируемой в этой точке, т.к. точка  $x = 0$  является угловой и в этой точке существует бесконечно много касательных.

## 2.2. Свойства производной и правила дифференцирования

1. Производная постоянной равна нулю.

*Доказательство.*

Дано  $y = f(x) = c$ ; дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ , тогда

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0; \quad c' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

2. Производная алгебраической суммы дифференцируемых функций равна алгебраической сумме производных этих функций: т.е.  $u = f(x)$  и  $v = g(x)$  дифференцируемые функции, тогда  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ .

*Доказательство.*

Пусть  $y = u \pm v$ , дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ , тогда

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x) = (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v);$$

$$\Delta y = \Delta u \pm \Delta v; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = u' \pm v';$$

$$y' = (u \pm v)' = u' \pm v',$$

что и требовалось доказать.

3. Производная произведения двух функций равна сумме произведения производной первой функции на вторую функцию без изменения и, наоборот, производной второй функции на первую функцию без изменения, т.е.  $u = f(x)$  и  $v = g(x)$  дифференцируемые функции, тогда

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

*Доказательство.*

Пусть  $y = uv$ , тогда при значении  $x + \Delta x$  имеем

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v;$$

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v;$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = u'v + v'u + 0v'.$$

Таким образом, получили

$$y' = (uv)' = u'v + v'u$$

Замечание. Т.к.  $u = f(x)$  дифференцируемая функция, то из дифференцируемости следует непрерывность, поэтому  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$ .

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной. Действительно,

$$y' = (cv)' = c'v + v'c = cv'.$$

4. Производная частного двух функций равна дроби, в числителе которой разность произведения производной числителя на знаменатель без изменения и, наоборот, производной знаменателя на числитель без изменения, а в знаменателе квадрат знаменателя, т.е.  $u = f(x)$  и  $v = g(x)$  дифференцируемые функции и

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

*Доказательство.*

Дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ , тогда

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v};$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + \Delta uv - uv - \Delta v u}{(v + \Delta v)v};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v + \Delta v)v}; \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v + \Delta v)v} = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Здесь  $v = g(x)$  дифференцируемая функция, поэтому  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$ .

5. Производная сложной функции: даны две дифференцируемые функции  $y = f(z); z = g(x)$ . Тогда

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x.$$

*Доказательство.*

При значении аргумента  $x + \Delta x$  получим

$$z + \Delta z = g(x + \Delta x); \quad y + \Delta y = f(z + \Delta z).$$

При этом из условия  $\Delta x \rightarrow 0$ , следует  $\Delta z \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ .

$$\Delta z = g(x + \Delta x) - g(x); \quad \Delta y = f(z + \Delta z) - f(z),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}; \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{dy}{dz} * \frac{dz}{dx},$$

что и требовалось доказать.

6. Производная обратной функции. Пусть  $y = f(x)$ . Если переменную  $y$  рассматривать как аргумент, а  $x$  как функцию переменной  $y$ , то получим, так называемую, **обратную** по отношению к исходной функцию. Тогда

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Доказательство.

Имеем  $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ , тогда

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x}; \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = x'_y = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}.$$

### 2.3. Производные элементарных функций

1. Степенная функция  $y = x^n$ . Доказательство рассмотрим для целых  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Воспользуемся формулой бинома Ньютона

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} \Delta x + C_n^2 x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n \\ &= \Delta x \left( nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right) = nx^{n-1};$$

или  $(x^n)' = nx^{n-1}$ . Следствие:  $x' = 1$ .

2. Логарифмическая функция:

а)  $y = \ln x$ . Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{1}{x} \ln \left( 1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}} \right)^{\frac{x}{\Delta x}};$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left( 1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \ln \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x};$$

или

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

б)  $y = \log_a x$ . Используя основное логарифмическое тождество, получим

$$\begin{aligned} y &= \frac{\ln x}{\ln a}; y' = (\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}; \\ (\log_a x)' &= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

3. Показательная функция  $y = a^x$ .

$$\ln y = x \ln a; \quad \frac{1}{y} y' = \ln a; \quad y' = y \ln a = a^x \ln a.$$
$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

В частном случае

$$y = e^x; \quad (e^x)' = e^x.$$

4. Обобщение степенной функции  $y = x^\alpha; x > 0; \alpha \in R$ .

$$\ln y = \alpha \ln x; \quad \frac{1}{y} y' = \alpha \frac{1}{x}; \quad y' = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1};$$
$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

## 2.4. Производные тригонометрических функций

1.  $y = \sin x$ ; тогда

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right] = \cos x.$$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

2.  $y = \cos x$ ;

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right); \quad y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

3.  $y = \operatorname{tg} x$ ;

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

4.  $y = \operatorname{ctg} x$ ;

$$y' = (\operatorname{ctg} x)' = ((\operatorname{tg} x)^{-1})' = -(\operatorname{tg} x)^{-2} (\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{(\operatorname{tg} x)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

## 2.5. Производные обратных тригонометрических функций

1.  $y = \arcsin x$ ; при этом известно, что обратная функция  $x = \sin y$  и  $(-1 \leq x \leq 1; -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$ ;

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2.  $y = \arccos x$ ; обратная функция

$$x = \cos y; (-1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq \pi);$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3.  $y = \arctg x$ ; обратная функция  $x = tgy$   
 $(-\infty < x < \infty; -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$ ;

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{tg^2 y + 1} = \frac{1}{1 + x^2};$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4.  $y = \text{arcctg} x$ ; обратная функция  $x = ctgy$ ;  $(-\infty < x < \infty; 0 < y < \pi)$ ;

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\sin^2 y = -\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = -\frac{1}{ctg^2 y + 1} = -\frac{1}{1 + x^2};$$

$$(\text{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Таблица 4.1. Таблица производных

№	(функция)' = производная	№	(функция)' = производная
1	$(x^n)' = nx^{n-1}$ $(x)' = 1$	7	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

2	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	8	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
3	$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$	9	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$(a^x)' = a^x \ln a$ $(e^x)' = e^x$	10	$(\arccos x)'$ $= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$(\sin x)' = \cos x$	11	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
6	$(\cos x)' = -\sin x$	12	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

## 2.6. Правило Лопиталю

Приведем без доказательства правило Лопиталю.

Если функции  $f(x)$ ,  $g(x)$  дифференцируемы в некоторой окрестности точки  $x_0$ , за исключением может быть самой точки  $x_0$ , причем в этой окрестности  $g'(x) \neq 0$ , и если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

или

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty,$$

то справедливы формулы, называемые правилом Лопиталю:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Пример.** Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

**Пример.** Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

## 2.7. Уравнения кривых в параметрической форме

Рассмотрим два соотношения:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (1)$$

где  $t \in [t_1, t_2]$ . Предположим, что каждому значению  $t$  соответствует единственные значения  $x$  и  $y$ . Если рассматривать  $x$  и  $y$  как координаты точки на координатной плоскости  $xOy$ , то каждому значению  $t$  будет соответствовать определенная точка плоскости. При изменениях  $t \in [t_1, t_2]$  точка  $(x, y)$  описывает на плоскости некоторую кривую. Уравнения (1) называются параметрическими уравнениями этой кривой,  $t$  называется параметром, а способ задания кривой уравнениями (1) называется параметрическим. В некоторых случаях из системы уравнений (1) удастся исключить параметр  $t$ .

Параметрическое задание кривых широко используется в технических, экономических, географических и других приложениях математики. Например, траекторию полета самолета при наборе высоты можно считать кривой, заданной параметрическими уравнениями, в которых параметр  $t$  - время,  $x$  и  $y$  соответственно, дальность и высота положения самолета.

Параметрические уравнение циклоиды.

**Циклоидой** называется линия, описываемая точкой  $M$  окружности, когда окружность катится без скольжения по прямой линии (направляющей). Катящаяся окружность называется производящей.

На рис. 2.5 направляющей является прямая  $Ox$ ; производящая окружность радиуса  $a$  дана в двух положениях: в «начальном», когда точка  $M$ , отмеченная символом «\*» расположена в начале координат, и в «промежуточном». Параметром  $t$  является центральный угол.

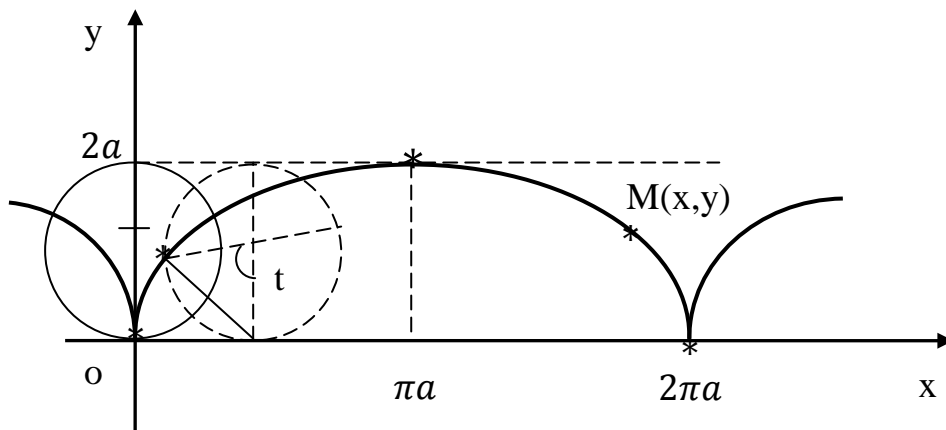


Рис. 2.5. Циклоида

Параметрические уравнения циклоиды имеют вид:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Исключая параметр  $t$  из системы уравнений циклоиды, можно установить зависимость между  $x$  и  $y$ , для этого надо найти для переменной  $t$  обратную функцию. Функция  $x = a(t - \sin t)$  имеет обратную, но она не выражается через элементарные функции, а значит и функция  $y = f(x)$  не выражается через элементарные функции. Поэтому выразим  $t$  из второго уравнения и найдем зависимость  $x = f(y)$ :

$$t = \arccos \frac{a - y}{a}, 0 \leq t \leq \pi,$$

$$x = a \cdot \arccos \frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} \text{ при } 0 \leq x \leq \pi a,$$

$$x = 2\pi a - a \cdot \arccos \frac{a - y}{a} + \sqrt{2ay - y^2} \text{ при } \pi a \leq x \leq 2\pi a.$$

Очевидно, что параметрические уравнения циклоиды имеют более удобный вид при исследовании функции, чем непосредственная зависимость  $y = f(x)$  или  $x = f(y)$ .

Параметрические уравнение астроида.

*Астроидой* называется кривая, полученная как траектория некоторой точки, отмеченной символом «\*» окружности радиуса  $a/4$ , катящейся без скольжения по другой окружности радиуса  $a$  (причем меньшая окружность всегда остается внутри большой) рис. 2.6.

Параметрические уравнения астроида имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t, \\ y = a \cdot \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Возведем все члены обоих уравнений в степень  $2/3$  и сложим, тогда получим следующую зависимость  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ .

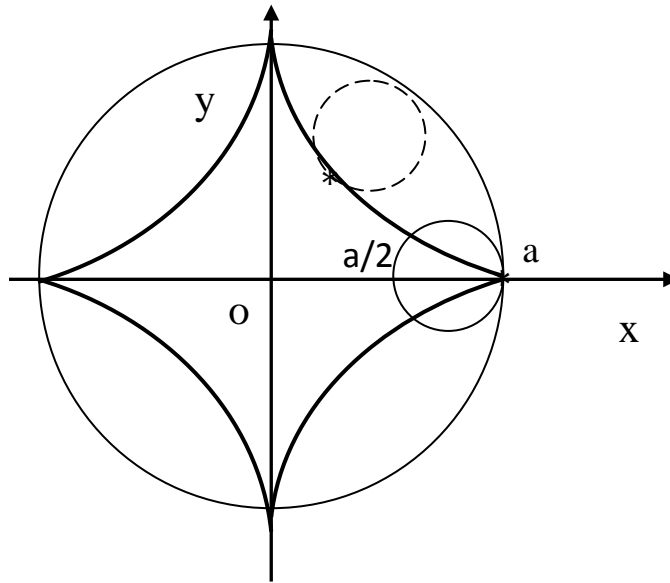


Рис. 2.6. Астроида

## 2.8. Производная функции, заданной параметрически

Пусть заданы параметрические уравнения кривой в виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где  $t \in [t_1, t_2]$ , а  $\varphi(t), \psi(t)$  - дифференцируемые функции, тогда при  $\Delta t \rightarrow 0$  следует  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ . По определению предела

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Таким образом, удалось найти производную функции, заданной параметрически, не находя непосредственного выражения  $y = f(x)$ .

**Пример.** Найти производную  $y'_x$  для функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

*Решение.*

$$x'_t = a(1 - \cos t), y'_t = \sin t;$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

## 2.9. Производная функции, заданной неявно

Пусть функция, связывающая переменные  $x$  и  $y$ , в предположении, что  $y$  зависит от  $x$ , задана неявно:  $F(x, y) = 0$  или

$$F(x, y(x)) = 0.$$

Дифференцируем обе части этого уравнения, помня о том, что  $y$  является функцией от  $x$ , а так как производная правой части равна нулю, получаем линейное относительно  $y'$  уравнение. Из полученного уравнения находим производную.

**Пример.** Найти производную функции  $y'_x$ :  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ ,

*Решение.*

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y'_x - 3y - 3xy'_x = 0; \quad y'_x = \frac{x^2 - y}{x - y^2}.$$

## 2.10. Логарифмическое дифференцирование

Иногда встречаются функции, для которых при вычислениях производной целесообразно предварительно прологарифмировать обе части выражения, а затем вычислять производную. Технику вычисления производных, называемую логарифмическим дифференцированием, рассмотрим на примерах.

**Пример.** Найти производную функции  $y = x^x$ .

*Решение.* Эта функция не является степенной ( $x^n$ ) и не является показательной ( $a^x$ ), поэтому ее предварительно прологарифмируем  $\ln y = x \ln x$ , тогда

$$\frac{1}{y} y' = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1, \quad y' = y(\ln x + 1), \quad y' = x^x(\ln x + 1).$$

**Пример.** Найти производную функции

$$y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}.$$

*Решение.* Зная правила нахождения производной дроби, произведения и таблицу производных, можно вычислить производную данной функции, но «красивее» результат можно получить, используя логарифмическое дифференцирование и свойства логарифмов, т.е.

$$\ln y = 3 \cdot \ln(x + 1) + \frac{1}{4} \cdot \ln(x - 2) - \frac{2}{5} \cdot \ln(x - 3),$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{3}{x + 1} + \frac{1}{4(x - 2)} - \frac{2}{5(x - 3)},$$

$$y' = \frac{(x + 1)^3 \sqrt[4]{x - 2}}{\sqrt[5]{(x - 3)^2}} \left( \frac{3}{x + 1} + \frac{1}{4(x - 2)} - \frac{2}{5(x - 3)} \right).$$

## 2.11. Дифференциал и его геометрический смысл

Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ . Производная этой функции в некоторой точке  $x_0 \in (a, b)$  равна

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Из этого равенства следует

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon, \quad \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon \Delta x,$$

где  $\varepsilon$  — бесконечно малая при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Тогда  $\varepsilon \Delta x$  величина более высокого порядка малости, чем  $\Delta x$ , т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

Таким образом, приращение состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое называется главной частью приращения, второе слагаемое — величина более высокого порядка малости, чем первое слагаемое (при  $f'(x_0) \neq 0$ ).

**Определение.** Дифференциалом функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  называется главная, линейная относительно приращения аргумента  $\Delta x$  часть приращения функции  $\Delta y$ , равная произведению производной функции в точке  $x_0$  на приращение независимой переменной и обозначается  $dy$ :

$$dy = f'(x_0)\Delta x \quad \text{или} \quad df(x) = f'(x_0)\Delta x.$$

Рассмотрим функцию  $f(x) = x$ , тогда  $df(x) = dx = x'\Delta x = \Delta x$ , т.е.  $dx = \Delta x$ .

Таким образом, дифференциал независимой переменной равен её произвольному приращению. Поэтому для любой функции  $y = f(x)$  справедливо соотношение  $dy = f'(x)dx$ , где  $dx = \Delta x$ , а так как

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

то обозначение производной в виде дроби есть не что иное, как отношение дифференциала функции  $dy$  к приращению (дифференциалу) независимой переменной  $dx$ , т.е. это дробь. Теперь правило дифференцирования сложной функции  $y = f(z); z = g(x)$  можно получить формально, умножив и поделив на величину  $dz$  производную

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

В обозначениях Лейбница эта формула приобретает вид тождества.

Дифференциал обладает свойствами, аналогичными свойствам производной, например:

$$dc = 0; \quad d(u \pm v) = du \pm dv; \quad d(uv) = u dv + v du.$$

Дифференциал функции  $y = f(z)$ ; можно записать в виде  $dy = f'(z)dz$  независимо от того является ли переменная  $z$  в свою очередь функцией другой переменной  $z = g(x)$ , если да, то  $dz = g'(x)dx$  и  $dy = f'(z)dz = f'_z(z) \cdot g'_x(x)dx$ .

То обстоятельство, что запись  $dy = f'(z)dz$  не зависит от того, является ли переменная  $z$  независимой или зависимой переменной называют **свойством инвариантности (неизменности) формы записи дифференциала**.

Рассмотрим геометрический смысл дифференциала (рис. 2.7).

Известно, что для функции  $y = f(x)$  геометрический смысл производной  $y' = tg(\alpha)$ . В этом случае из рис. 2.7 следует, что дифференциал  $dy$  функции  $y = f(x)$  равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в точке  $(x, y)$  при изменении  $x$  на величину  $\Delta x = dx$ .

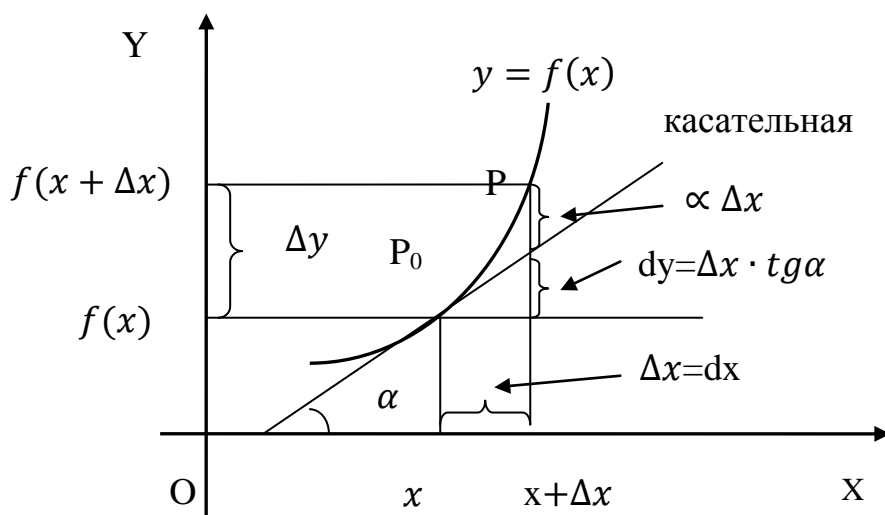


Рис. 2.7. Геометрический смысл дифференциала

## 2.12. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Приращение функции  $\Delta y = dy + \varepsilon \Delta x$  отличается от ее дифференциала  $dy$  на бесконечно малую величину  $\varepsilon \Delta x$  и при достаточно малых значениях  $\Delta x$  можно считать  $\Delta y \approx dy$  или

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Приведенная формула используется в приближенных вычислениях, причем, чем меньше  $\Delta x$ , тем точнее формула.

**Пример.** Вычислить приближенно  $\sqrt[5]{33,2}$ .

**Решение.** Рассмотрим функцию  $y = f(x) = \sqrt[5]{x}$ . Это степенная функция и её производная

$$f'(x) = \frac{1}{5} \cdot x^{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \cdot x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}.$$

В качестве  $x_0$  требуется взять число, удовлетворяющее условиям:

- значение  $\sqrt[5]{x_0}$  должно достаточно просто вычисляться;
- число  $x_0$  должно быть как можно более близким к числу 33,2.

В нашем случае этим требованиям удовлетворяет число  $x_0 = 32$ , для которого  $\sqrt[5]{x_0} = 2$ ,  $\Delta x = x - x_0 = 33,2 - 32 = 1,2$ .

Применяя формулу, находим искомое число:

$$\sqrt[5]{33,2} \approx \sqrt[5]{32} + \frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}} 1,2 = 2 + \frac{1}{5 \cdot 2^4} = 2 + \frac{1,2}{80} = 2,015.$$

**Пример.** Вычислить приближенно  $\sin 1^\circ$ .

*Решение.* Очевидно,

$$x_0 = 0, f'(x) = \cos x, \Delta x = x - x_0 = \frac{\pi}{180}$$

$$\sin 1^\circ = \sin \frac{\pi}{180} = \sin 0 + \cos 0 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,017.$$

В четырехзначных таблицах задано  $\sin 1^\circ \sim 0,0175$ .

Абсолютной и относительной погрешностью числа называются, соответственно, выражения вида

$$\Delta = |y - b| \text{ и } \delta = \frac{\Delta}{b},$$

где  $b$  - точное значение или приближенное, но более точное значение, например из семизначных таблиц. Если  $b$  неизвестно, то относительная погрешность вычисляется по формуле

$$\delta \approx \frac{\Delta}{|y|}.$$

### 2.13. Производные и дифференциалы высших порядков

Для дифференцируемой функции  $y = f(x)$ , производная  $f'(x)$  также является (в общем случае) функцией от  $x$ . Если  $f'(x)$  дифференцируемая функция, то можно вычислить производную  $(f'(x))'$ , которая называется второй производной и обозначается

$$y'', f''(x).$$

Продифференцировав вторую производную можно найти третью

$$y''', f'''(x),$$

и т.д.  $n$ -ую производную ( $n = 4, 5, \dots$ )  $y^n, f^n(x)$ .

Дифференциал второго порядка  $d^2y$  определяется как

$$d(dy) = d((f'(x)dx)) = f''(x)dx^2 + f'(x)(dx)',$$

но  $dx$  для всех значений  $x$  одно и то же, поэтому она считается константой и  $(dx)' = 0$ .

Окончательно, получаем  $d^2y = f''(x)dx^2$  и, вообще,  $d^n y = f^n(x)dx^n$ .

Теперь учитывая, что  $dx^2 = (dx)^2 \neq d(x^2), \dots, dx^n = (dx)^n \neq d(x^n)$ , производные высших порядков можно обозначать и в виде дроби:

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}.$$

## 2.14. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

В математике, технических приложениях, экономике, географии и во многих других областях науки часто возникает необходимость исследования поведения функции, в том числе, определение интервалов возрастания и убывания функции, нахождение точек экстремума и т.д. В этих задачах немаловажная роль отводится понятию производной. Но прежде, чем перейти к этому вопросу сформулируем (без доказательства) несколько полезных теорем.

**Теорема 1** (теорема Ролля). Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема в интервале  $(a, b)$ . Если  $f(a) = f(b)$ , то найдется, по крайней мере, одна точка  $x_0 \in [a, b]$ , в которой  $f'(x_0) = 0$ . Геометрическая иллюстрация теоремы приведена на рис. 2.8.

**Теорема 2** (теорема Лагранжа). Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема в интервале  $(a, b)$ , то найдется, по крайней мере, одна точка  $x_0 \in [a, b]$ , в которой  $f(b) - f(a) = f'(x_0) \cdot (b - a)$ .

Геометрическая иллюстрация теоремы приведена на рис. 2.9.

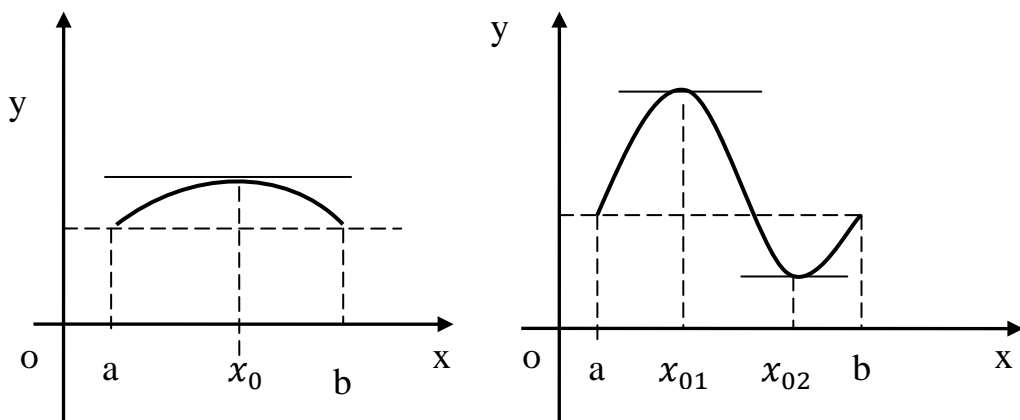


Рис. 2.8. Геометрическая иллюстрация теоремы Ролля

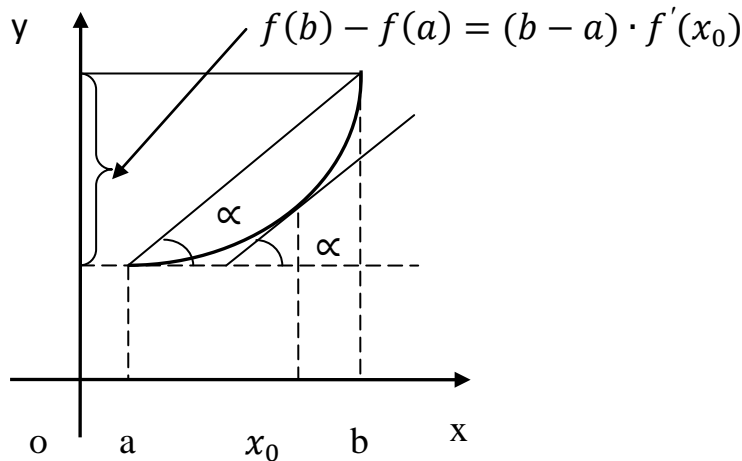


Рис. 2.9. Геометрическая иллюстрация теоремы Лагранжа

Очевидно, что при  $f(a) = f(b)$  теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

**Теорема 3** (теорема Коши). Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и имеет на концах отрезка разные знаки ( $f(a) \cdot f(b) < 0$ ), то существует, хотя бы одна точка  $x_0 \in [a, b]$ , в которой  $f(x_0) = 0$  (рис. 2.10).

Теорему Коши ещё называют теоремой о прохождении функции через ноль.

**Определение 1.** Значение  $f(x_0)$  называется максимумом функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , если существует окрестность  $U(x_0)$  точки  $x_0$  такая, что  $U(x_0) \in [a, b]$  и  $\forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x_0) > f(x)$ .

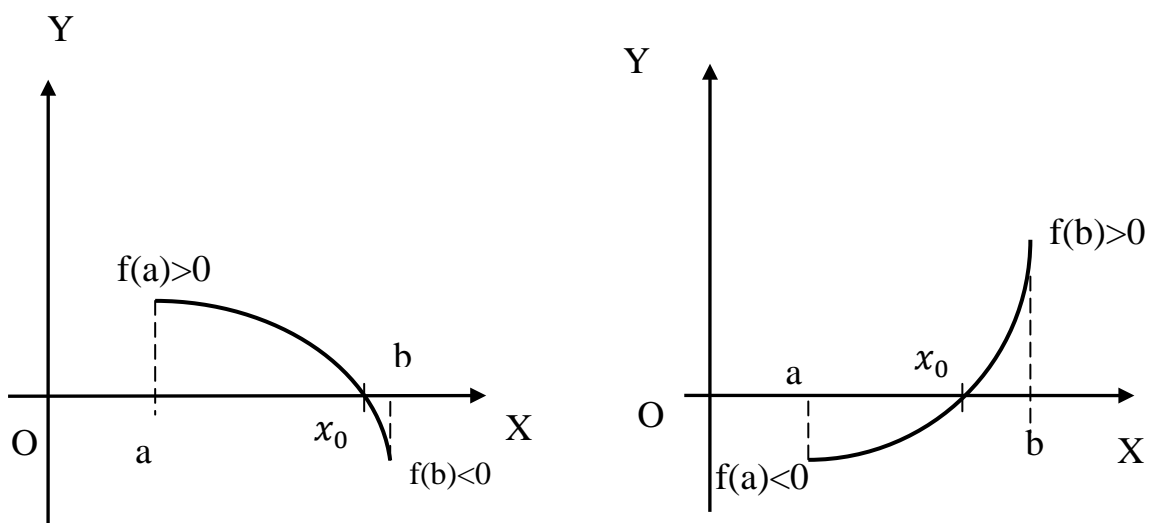


Рис. 2.10. Прохождение функции через ноль

**Определение 2.** Значение  $f(x_0)$  называется минимумом функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , если существует окрестность  $U(x_0)$  точки  $x_0$  такая, что  $U(x_0) \in [a, b]$  и  $\forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x_0) < f(x)$ .

Для точек максимума и минимума принят единый термин – точки экстремума (точки локального экстремума). Когда говорят о точке экстремума (точка плоскости) указывают только значение аргумента, предполагая, что ординатой является соответствующее экстремальное значение функции. На рис. 2.11 точки:  $x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04}$  – точки локального экстремума функции – точки  $x_{01}, x_{03}$  максимума; точки  $x_{02}, x_{04}$  минимума.

**Теорема 4** (теорема Вейерштрасса). Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она достигает на этом отрезке своих наибольшего ( $M$ ) и наименьшего ( $m$ ) значений (рис. 2.11).

Эти значения ( $M, m$ ) могут быть как на концах отрезка, так и точках, в которых производная либо равна нулю, либо не существует. Если функция  $f(x) = c$ , т.е. постоянная, то  $M = m = c$ .

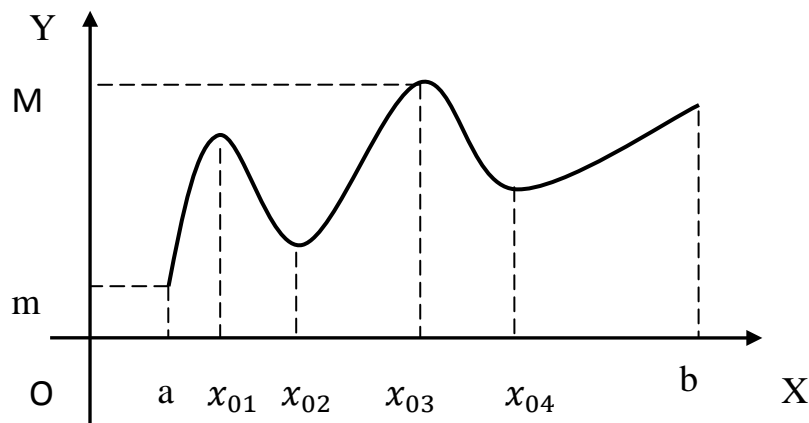


Рис. 2.11. Экстремумы функции

Наименьшее значение функции  $f(a) = m$ ; наибольшее значение функции  $f(x_{03}) = M$ .

## 2.15. Исследование поведения функции

### 2.15.1. Возрастание (убывание) функции

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется возрастающей (убывающей) на некотором интервале, если для любых двух значений аргумента из этого интервала, большему значению аргумента соответствует большее значение функции (большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции).

Это можно записать с использованием кванторов для интервала  $[a, b]$  следующим образом:

- 1) условие возрастания:  $\forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ;
- 2) условие убывания:  $\forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

Интервал, на котором функция возрастает (убывает) называется интервалом монотонности функции, а сама функция называется монотонной на этом интервале.

**Теорема 1.** Необходимый признак возрастания (убывания) функции.

Если дифференцируемая функция возрастает (убывает) в некотором промежутке  $(a, b)$ , то производная этой функции неотрицательна (неположительна) в этом промежутке.

*Доказательство:* пусть функция  $f(x)$  возрастает в промежутке  $(a, b)$  и дифференцируема, тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если  $x, x + \Delta x \in (a, b)$ , то по определению возрастания функции

$f(x + \Delta x) - f(x) > 0$  при  $\Delta x > 0$  и  $f(x + \Delta x) - f(x) < 0$  при  $\Delta x < 0$ , т.е. знаки приращений аргумента и функции совпадают, значит

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0,$$

но предел положительной величины не может быть отрицательным числом, следовательно,  $f'(x) \geq 0$ . Что и требовалось доказать.

Случай убывания функции доказывается аналогично.

**Теорема 2.** Достаточный признак возрастания (убывания) функции.

Если производная дифференцируемой функции положительна (отрицательна) внутри некоторого промежутка  $(a, b)$ , то функция возрастает (убывает) на этом промежутке.

*Доказательство:* пусть  $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b)$ , тогда для любых  $x_1, x_2: a \leq x_1 < x_2 \leq b$  из теоремы Лагранжа имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(x_0), \quad x_1 < x_0 < x_2,$$

а значит  $a < x_0 < b$  и  $f'(x_0) > 0$ , поэтому  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , или  $f(x_2) > f(x_1)$ , т.е. функция возрастает, что и требовалось доказать.

Вторая часть (для случая отрицательной производной и убывания функции) доказывается аналогично.

Необходимое условие существования экстремума даёт следующая теорема.

**Теорема 1** (теорема Ферма). Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$  и имеет в этой точке экстремум, то  $f'(x_0) = 0$ .

*Доказательство:* пусть, для определенности,  $x_0$  - точка максимума функции  $f(x)$ . Тогда по определению максимума

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0) \quad \text{или} \quad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) < 0:$$

1) при  $\Delta x < 0$  следует

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} > 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \geq 0;$$

2) при  $\Delta x > 0$  следует

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} < 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \leq 0.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} f'(x_0) \geq 0; \\ f'(x_0) \leq 0; \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Что и требовалось доказать.

Теперь, очевидно, что для нахождения экстремума дифференцируемой функции необходимо решить уравнение  $f'(x) = 0$ .

Точки, в которых  $f'(x) = 0$  или  $f'(x)$  не существуют, называются критическими значениями аргумента или **критическими точками**.

Достаточные условия существования экстремума определяются следующими двумя теоремами.

**Теорема 2** (первый достаточный признак существования экстремума).

Если  $f'(x_0) = 0$  и производная функции меняет свой знак при переходе через значение  $x_0$ , то  $f(x_0)$  является экстремумом при этом:

1) максимумом, если изменение знака производной происходит с плюса на минус;

2) минимумом, если изменение знака производной происходит с минуса на плюс;

3) функция  $f(x)$  при  $x = x_0$  не имеет экстремума, если при переходе через точку  $x_0$  знак производной не меняется.

Для доказательства воспользуемся признаками возрастания и убывания функции:

*Доказательство:*

1) если  $f'(x_0) > 0$  при  $x < x_0$ , то функция слева от точки  $x_0$  возрастает;

2) если  $f'(x_0) < 0$  при  $x > x_0$ , то функция справа от точки  $x_0$  убывает, так что  $f(x_0)$  является наибольшим (т.е. экстремумом) в окрестности точки  $x_0$ .

**Теорема 3** (второй достаточный признак существования экстремума).

Если  $f'(x_0) = 0$ , а  $f''(x_0) \neq 0$ , то  $f(x_0)$  является экстремумом причем:

1) максимумом, если  $f''(x_0) < 0$ ;

2) минимумом, если  $f''(x_0) > 0$ .

*Доказательство:* по определению

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Рассмотрим случай максимума. Пусть  $f''(x_0) < 0$ , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$$

Тогда при значениях  $x$ , достаточно близких к  $x_0$ , значение

$$\frac{f'(x)}{x - x_0}$$

будет сколь угодно близким к  $f''(x_0)$  и, следовательно, будет иметь тот же знак:

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0.$$

Поэтому при  $x < x_0 \Rightarrow f'(x) > 0$ ,  $x > x_0 \Rightarrow f'(x) < 0$ , а это на основании теоремы 2 значит, что  $f(x_0)$  является максимумом.

Случай минимума доказывается аналогично.

### 2.15.2. Выпуклость (вогнутость) графика функции

**Определение 1.** Функция  $f(x)$  называется **выпуклой** на интервале  $(a, b)$ , если  $\forall x \in (a, b)$ , значения  $f(x)$  лежат ниже её касательной.

**Определение 2.** Функция  $f(x)$  называется **вогнутой** на интервале  $(a, b)$ , если  $\forall x \in (a, b)$ , значения  $f(x)$  лежат выше её касательной.

На интервалах  $(a_1, b_1)$  и  $(a_2, b_2)$ , функция является выпуклой (рис. 2.12), на интервале  $(b_1, a_2)$ , вогнутой.

**Теорема 1** (необходимый признак выпуклости, вогнутости).

Если график дважды дифференцируемой функции выпуклый (вогнутый) на некотором промежутке, то вторая производная неположительная (неотрицательная) на этом промежутке.

*Доказательство.* Рассмотрим случай выпуклости (рис. 2.12, интервал  $(a_1, b_1)$ ).

Дано  $f'(x_1) > f'(x_2)$  при  $x_1 < x_2$ , график первой производной убывает, и, следовательно, вторая производная неположительная, т.е.

$$f''(x) \leq 0.$$

**Теорема 2** (достаточное условие выпуклости, вогнутости).

Если  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ ) в некотором промежутке, то график такой функции вогнутый (выпуклый) в этом промежутке.

*Доказательство.* Рассмотрим случай вогнутости (рис. 2.12, интервал  $(b_1, a_2)$ ).

Докажем, что график функции  $f(x)$  будет выше касательной.

Уравнение касательной, проведенной в точке,  $x_0$  имеет вид:

$$Y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

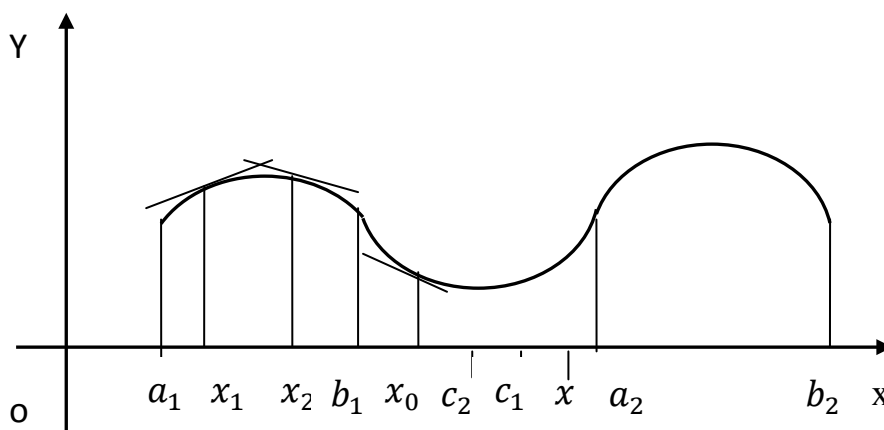


Рис. 2.12. Выпуклость (вогнутость) графика функции

Находим разность текущих ординат кривой  $y = f(x)$  и касательной  $Y$  при одних и тех же значениях  $x$ :

$$y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Далее, используем теорему Лагранжа:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c_1) \cdot (x - x_0),$$

где  $c_1 \in (x_0, x)$  при  $x > x_0$ , поэтому

$$y - Y = [f'(c_1) - f'(x_0)] \cdot (x - x_0).$$

Ещё раз применим теорему Лагранжа к функции  $f'(c_1) - f'(x_0)$ :

$$y - Y = f''(c_2) \cdot (c_1 - x_0) \cdot (x - x_0), \text{ где } c_2 \in (x_0, c_1) \text{ при } c_1 > x_0$$

В правой части  $f''(c_2) > 0$  по условию, а сомножители  $(c_1 - x_0)$ ,  $(x - x_0)$  имеют одинаковые знаки, таким образом, выражение в правой части положительно, следовательно,  $y > Y$  и функция находится над касательной, т.е. является вогнутой. Что и требовалось доказать.

Случай выпуклости доказывается аналогично.

### 2.15.3. Точки перегиба

**Определение.** Точки, в которых выпуклость меняется на вогнутость или, наоборот, называются точками перегиба.

На рис. 2.12 точки  $b_1, a_2$  являются точками перегиба.

**Теорема 1** (необходимый признак точки перегиба).

Если  $x = x_0$  - точка перегиба, то  $f''(x_0) = 0$ , либо не существует.

**Теорема 2** (достаточный признак наличия точки перегиба).

Если у непрерывной функции  $f(x)$  знаки второй производной  $f''(x_0)$  слева и справа от критической точки меняются, то  $x_0$  - точка перегиба.

**Критические точки** – те, в которых  $f''(x_0)$  либо равна нулю, либо не существует.

### 2.15.4. Асимптоты графика функции

**Асимптоты** – прямые, к которым стремится график функции. Асимптоты помогают строить графики функции. Асимптоты бывают трёх видов: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

1. Вертикальные асимптоты. Уравнения асимптот имеют вид  $x = a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty$$

или (и)

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty.$$

Вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва второго рода или на границах области определения.

2. Горизонтальные асимптоты. Уравнения асимптот имеют вид:  
 $y = b_1$ , для правой асимптоты, если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b_1,$$

$y = b_2$ , для левой асимптоты, если

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b_2.$$

При  $y = b_1 = b_2$  получается двухсторонняя асимптота.

3. Наклонные асимптоты. Уравнение асимптоты имеет вид:  $y = kx + b$ .

Чтобы функция  $f(x)$  имела асимптоту  $y = kx + b$ , необходимо и достаточно существование пределов:

- для правой асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx);$$

- для левой асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx).$$

*Доказательство.* Рассмотрим правую асимптоту.

Разность между ординатами асимптоты и функции  $kx + b - f(x) = \varepsilon$ . По определению асимптоты  $\varepsilon \rightarrow 0$ , когда  $x \rightarrow +\infty$ . Тогда

$$k = \frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x} + \frac{\varepsilon}{x};$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = y - kx = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx);$$

Если правая и левая асимптоты совпадают, получается двухсторонняя асимптота. Очевидно, что горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной, когда  $k = 0$ , а предел  $b$  существует и конечный.

### 2.15.5. Примерная схема исследования функции

При исследовании функции и построении ее графика рекомендуется использовать следующую схему:

1. Найти область определения функции.

2. Исследовать функцию на четность – нечетность. Если функция четная или нечетная, то график достаточно исследовать только для неотрицательных значений  $x$ , а для  $x < 0$  график симметричен относительно

оси  $y$  в случае четности функции и симметричен относительно начала координат для нечетной функции.

3. Найти вертикальные асимптоты.

4. Исследовать поведение функции в бесконечности, найти горизонтальные и наклонные асимптоты.

5. Найти интервалы возрастания и убывания функции и точки экстремума.

6. Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции и точки перегиба.

7. Найти точки пересечения функции с осями координат.

**Пример.** Исследовать функцию

$$y = f(x) = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$$

и построить ее график.

*Решение.*

1. Функция определена на всей числовой прямой, кроме точки  $x = 1$ .
2. Исследуем поведение функции на четность-нечетность:

$$f(-x) = \frac{-2x - 1}{(x + 1)^2}, \quad f(-x) \neq -f(x), \quad f(-x) \neq f(x).$$

Функция не является нечетной и не является четной, т.е. это функция общего вида.

3. Исследуем поведение функции в окрестности  $x=1$  точки:

$$\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} = +\infty.$$

Точка  $x = 1$  является точкой разрыва второго рода, а пределы слева и справа равны бесконечности. Прямая  $x = 1$  является вертикальной асимптотой.

4. Исследуем поведение функции в бесконечности, используя правило Лопиталя для раскрытия неопределенности:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{2 \cdot (x - 1)} = 0.$$

Найдем наклонные асимптоты  $y = k \cdot x + b$ :

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 1}{x \cdot (x - 1)^2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \cdot (2 - \frac{1}{x})}{x \cdot (x - 1)^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} - 0 \cdot x \right) = 0.$$

Таким образом, горизонтальная асимптота  $y = 0$  получилась как частный случай наклонной.

5. Для определения интервалов монотонности функции найдем производную:

$$y' = -\frac{2 \cdot x}{(x-1)^3}.$$

Если  $y' = 0$ , то  $x = 0$ , при  $x = 1$  производная функции не определена, т.е. монотонность функции необходимо исследовать на интервалах  $(-\infty, 0)$ ;  $(0, 1)$ ;  $(1, \infty)$ .

Пусть

а)  $x \in (-\infty, 0)$ , тогда  $y' < 0$ , т.е. функция на этом интервале убывает;

б)  $x \in (0, 1)$ , тогда  $y' > 0$ , т.е. функция на этом интервале возрастает;

в)  $x \in (1, \infty)$ , тогда  $y' < 0$ , т.е. функция на этом интервале убывает.

При переходе через критическую точку  $x = 0$  производная меняет знак с минуса на плюс; точка  $x = 0$  является точкой минимума и  $f(0) = -1$ . В точке  $x = 1$  функция не определена, экстремума нет.

6. Для исследования выпуклости (вогнутости) найдем вторую производную

$$y'' = 2 \cdot \frac{2 \cdot x + 1}{(x-1)^4}.$$

Если  $y'' = 0$ , то  $x = -0,5$  при  $x = 1$  вторая производная функции не существует, т.е. выпуклость (вогнутость) функции необходимо исследовать на интервалах  $(-\infty; -0,5)$ ;  $(-0,5; 1)$ ;  $(1, \infty)$ .

Пусть

а)  $x \in (-\infty; -0,5)$ , тогда  $y'' < 0$ , т.е. функция на этом интервале выпуклая;

б)  $x \in (-0,5; 1)$ , тогда  $y'' > 0$ , т.е. функция на этом интервале вогнутая;

в)  $x \in (1, \infty)$ , тогда  $y'' > 0$ , т.е. функция на этом интервале вогнутая.





При переходе через критическую точку  $x = 0,5$  вторая производная меняет знак; критическая точка  $x = 0,5$  является точкой перегиба.

7. Найдем точки пересечения с осями координат:

при  $x = 0$ ,  $y(0) = -1$ ; при  $y = 0$ ,  $x = 0,5$ .

Полученные результаты запишем в следующую таблицу.

Таблица. Исследование функции

Интервал изменения или значение аргумента $x$	Значения функции $y$	Знак или значение		Выводы	Фрагмент графика функции
		$y'$	$y''$		
$(-\infty, -0,5)$		-	-	Функция убывает и выпуклая	
-0,5	-8/9	-	0	Точка перегиба	
$(1/2, 0)$		-	+	Убывает, вогнутая	
0	-1	0	+	min	
$(0, 1)$		+	+	Возрастает, вогнутая	
1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	Точка разрыва второго рода	
$(1, \infty)$		-	+	Убывает, вогнутая	

На рис. 2.13. Приведен график исследуемой функции.

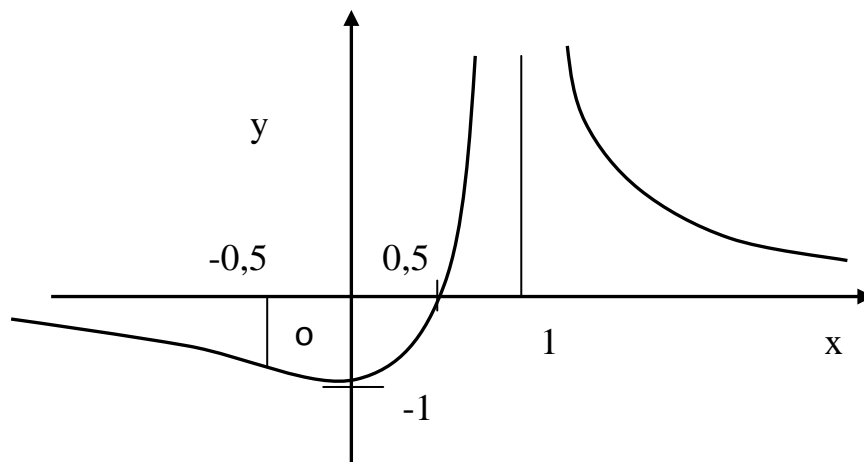


Рис. 2.13. График функции

### 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

#### 3.1. Понятие первообразной

Основная задача дифференциального исчисления заключалась в нахождении производной для заданной функции, т.е. для данной функции  $f(x)$  найти  $f'(x)$ . Обратная задача – восстановление по производной  $f'(x)$ , той функции-«первого образа», от которой была взята производная, и это является задачей интегрального исчисления.

**Определение.** Функция  $F(x)$  называется «первообразной» для функции  $f(x)$ , если  $F'(x) = f(x)$  или  $dF(x) = f(x)dx$ .

**Пример.** Пусть  $f(x) = \cos x$ , тогда первообразная  $F(x) = \sin x$ , т.к.  $(\sin x)' = \cos x, x \in (-\infty, \infty)$ .

**Теорема.** Если  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  две первообразные для функции  $f(x)$ , то они отличаются на постоянное слагаемое.

*Доказательство:* рассмотрим  $\phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ ,

$$\phi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

По теореме Лапласа имеем:  $\phi(x_2) - \phi(x_1) = \phi'(x)(x_2 - x_1)$ , где  $x_1 < x < x_2$ , а т.к.  $\phi'(x) = 0$ , то  $\phi(x_2) = \phi(x_1)$  для любых  $x_1, x_2$ , а это значит, что  $\phi(x) = C = const$ , т.е.  $F_1(x) = F_2(x) + C$ .

Вывод: если  $F(x)$  – одна из первообразных для функции  $f(x)$ , то все первообразные имеют вид  $F(x) + C$ , т.е. операция отыскания первообразной многозначна. При этом получаем семейство кривых (Рис. 3.1).

Касательные в любой точке параллельны между собой.

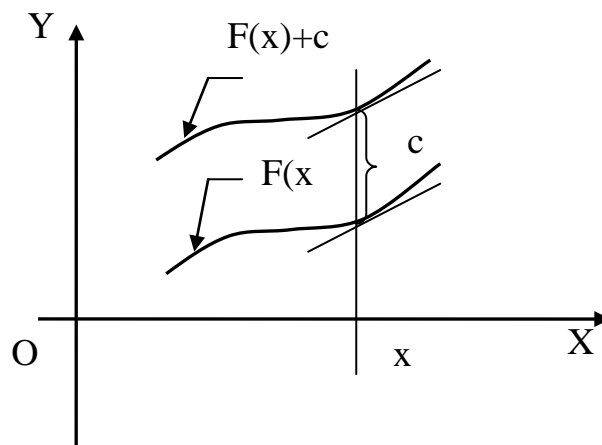


Рис. 3.1. Семейство первообразных

### 3.2. Неопределенный интеграл и его свойства

**Определение.** Совокупность всех первообразных для данной функции  $f(x)$  на интервале  $(a, b)$ , называется **неопределенным интегралом** от функции  $f(x)$  и обозначается

$$\int f(x)dx,$$

где  $\int$  – знак интеграла,

$f(x)$  – подынтегральная функция,

$f(x)dx$  – подынтегральное выражение.

Если  $F(x)$  – одна из первообразных для функции  $f(x)$  на интервале  $(a, b)$ , то:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

Операция нахождения неопределенного интеграла от некоторой функции называется **интегрированием** этой функции.

Неопределенный интеграл обладает следующими свойствами.

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

В самом деле:

$$\left[ \int f(x)dx \right]' = [F(x) + C]' = F'(x) + C' = f(x).$$

По определению дифференциала:

$$d \left[ \int f(x)dx \right] = [F(x) + C]' dx = f(x)dx.$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала функции  $f(x)$  равен функции  $f(x)$  с точностью до постоянного слагаемого

$$\int df(x) = f(x) + C.$$

Справедливость этого равенства проверяется дифференцированием обеих частей. В самом деле, по определению дифференциала  $df(x) = f'(x)dx$ , тогда

$$\int df(x) = \int f'(x)dx$$

и на основании первого свойства имеем

$$\left[ \int f'(x) dx \right]' = f'(x) = [f(x) + C]'$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$$

Возьмем производные от обеих частей и воспользуемся первым свойством.

$$\left[ \int kf(x) dx \right]' = \left[ k \int f(x) dx \right]' = kf(x).$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций, т.е.

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx - \int f_3(x) dx.$$

*Доказательство.*

На основании первого свойства:

$$\left\{ \int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx \right\}' = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x).$$

С другой стороны, производная алгебраической суммы равна сумме производных и опять на основании первого свойства:

$$\begin{aligned} & \left[ \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx - \int f_3(x) dx \right]' = \\ & = \left[ \int f_1(x) dx \right]' + \left[ \int f_2(x) dx \right]' - \left[ \int f_3(x) dx \right]' = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x). \end{aligned}$$

5. Вид интеграла не меняется при переходе от переменной  $x$  к переменной  $u$ , где  $u$  - дифференцируемая по  $x$  функция.

Поэтому, если

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad u = \varphi(x) \Rightarrow \int f(u) du = F(u) + C.$$

*Доказательство.*

Для левой части последнего соотношения имеем:

$$\int f(u) du = \int f(u) u' dx.$$

Для правой части:

$$\frac{d[F(u) + C]}{dx} = \frac{dF(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot u'.$$

Т.е. получили, что производная правой части равна подынтегральной функции в левой части.

### 3.3. Таблица неопределенных интегралов

Справедливость каждой приведенной формулы проверяется дифференцированием.

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1);$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c;$$

$$3. \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C ;$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + c;$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + c;$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c;$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c;$$

$$9. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c;$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + c;$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c;$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c.$$

### 3.4. Основные методы интегрирования

1. Метод разложения. Пусть  $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ , тогда

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

*Пример.*

$$\int (e^x + x^2)dx = \int e^x dx + \int x^2 dx = e^x + \frac{x^3}{3} + c.$$

2. Метод подстановки (замена переменной).

Необходимо вычислить интеграл

$$\int f(x)dx,$$

для которого непосредственно подобрать первообразную для  $f(x)$  не представляется возможным, но известно, что первообразная существует.

Сделаем замену переменной в подынтегральном выражении, положив  $x = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  – дифференцируемая функция, тогда  $dx = \varphi'(t)dt$  и получаем формулу замены переменной в неопределенном интеграле

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

*Пример.* Найти значение интеграла, под номером 12 в таблице интегралов:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

*Решение.* Сделаем замену переменной  $\sqrt{x^2 \pm a^2} = t - x$ . Такая подстановка называется подстановкой Эйлера, возведем обе части в квадрат и произведем преобразования  $x^2 \pm a^2 = t^2 - 2tx + x^2$ ;  $t^2 = 2tx \pm a^2$ ;

$$2tdt = 2tdx + 2xdt; (t - x)dt = tdx; \frac{dx}{t - x} = \frac{dt}{t}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int \frac{dx}{t - x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c.$$

3. Интегрирование по частям.

Из соотношения  $d(uv) = u dv + v du$ , интегрируя, получаем

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du; \int u dv = uv - \int v du.$$

Последняя формула называется формулой интегрирования по частям.

*Пример.* Вычислить интеграл

$$\int x \sin x dx.$$

*Решение.* Положим  $u = x$ ;  $dv = \sin x dx$ , тогда  $du = dx$ ;  $v = -\cos x$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c.$$

### 3.5. Интегрирование рациональных функций

Интегралы от рациональных функций всегда выражаются через элементарные функции. В общем случае рациональные функции имеют вид:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

где  $P_m(x)$ ,  $Q_n(x)$  - многочлены  $m$  и  $n$  степени, соответственно.

Если  $m \geq n$ , т.е. многочлен является неправильной дробью, то выполнив деление, получим:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = W_{m-n}(x) + \frac{R_s(x)}{Q_n(x)}; s < n,$$

где  $W_{m-n}(x)$  - некоторый многочлен (целая часть), полученный при делении многочлена на многочлен, а второе слагаемое – остаток (правильная дробь).

Рассмотрим наиболее простой случай, когда знаменатель имеет только действительные, различные корни:

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_n). \end{aligned}$$

Тогда правильная дробь разлагается на простейшие дроби по формуле

$$\frac{R_s(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n},$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_n$  - постоянные неизвестные коэффициенты. Для нахождения этих коэффициентов в правой части необходимо привести дроби к общему знаменателю и при равных знаменателях в правой и левой частях, отбросив знаменатель, приравнять числители. При этом получится тождество, справедливое при любых значениях  $x$ . В дальнейшем возможны два подхода к определению коэффициентов  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

**Пример.** Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

*Решение.* Подынтегральная функция – неправильная дробь ( $m = 3 > n = 2$ ), поэтому выделим целую часть делением «уголком» многочлена на многочлен, тогда в результате получим

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x^2 - 5x + 6} = x + 1 + \frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6}.$$

Правильную дробь разложим на элементарные дроби:

$$\begin{aligned} \frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{2x - 1}{(x - 3) \cdot (x - 2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2} \\ &= \frac{A \cdot (x - 2) + B \cdot (x - 3)}{(x - 3) \cdot (x - 2)}. \end{aligned}$$

Приравнивая числитель в правой и левой частях, получим тождество:

$$2x - 1 = A \cdot (x - 2) + B \cdot (x - 3),$$

справедливое при любых значениях  $x$ .

Теперь первый подход для вычисления коэффициентов  $A, B$  состоит в том, что вычислим обе части при конкретном значении  $x$ . Для простоты вычислений положим  $x = 2$ , тогда  $2 \cdot 2 - 1 = 0 + B \cdot (2 - 3) \Rightarrow B = -3$ . При  $x = 3 \Rightarrow A = 5$ , тогда

$$\frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{5}{x - 3} - \frac{3}{x - 2}.$$

При втором методе вычисления коэффициентов  $A, B$ , исходим из того, что при тождественном равенстве двух многочленов, коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в правой и левой частях совпадают. Тогда получаем систему линейных уравнений для определения  $A, B$ :  $x: 2 = A + B$ ;  $x^0: -1 = -2 \cdot A - 3 \cdot B$ . Из которых также следует  $A=5; B=-3$ .

Теперь подынтегральная функция может быть записана в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x^2 - 5x + 6} &= x + 1 + \frac{5}{x - 3} - \frac{3}{x - 2}. \\ \int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int \left( x + 1 + \frac{5}{x - 3} - \frac{3}{x - 2} \right) dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + 5 \cdot \ln|x - 3| - 3 \cdot \ln|x - 2| + c.$$

### 3.6. Интегрирование иррациональных функций

1. Рассмотрим интеграл

$$\int R(x, x^{m/n}, \dots, x^{r/s}) dx,$$

где  $R$  – рациональная функция своих аргументов.

Пусть  $k$  – общий знаменатель дробей  $m/n, \dots, r/s$ . Сделаем замену переменной  $x = t^k, dx = kt^{k-1}dt$ .

Тогда каждая дробная степень  $x$  выразится через целую степень  $t$  и подынтегральная функция преобразуется в рациональную функцию от  $t$ .

**Пример** . Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^{1/2} dx}{x^{3/4} + 1}.$$

*Решение.*

Общий знаменатель дробей 0,5 и 0,75  $k = 4$ , поэтому делаем замену переменной  $x = t^4, dx = 4t^3 dt$ ; тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{1/2} dx}{x^{3/4} + 1} &= 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1} t^3 dt = 4 \int \frac{t^5}{t^3 + 1} dt = 4 \int \left( t^2 - \frac{t^2}{t^3 + 1} \right) dt = \\ &= 4 \int t^2 dt - 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1} dt = 4 \frac{t^3}{3} - \frac{4}{3} \ln|t^3 + 1| + c = \\ &= \frac{4}{3} \left[ x^{3/4} - \ln|x^{3/4} + 1| \right] + c. \end{aligned}$$

2. Рассмотрим интеграл вида:

$$\int R \left( x, \sqrt[m]{\frac{ax + b}{cx + d}} \right) dx,$$

где  $R$  – рациональная функция от своих аргументов. Покажем, что такой интеграл сводится к интегралу от дробно-рациональной функции заменой

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax + b}{cx + d}}.$$

В самом деле

$$t^m = \frac{ax + b}{cx + d}; \quad ct^m x - ax = b - dt^m;$$

$$x = \frac{b - dt^m}{ct^m - a}; \quad dx = \frac{mt^{m-1}(ad - cb)}{(ct^m - a)^2} dt.$$

Так что

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx = \int R\left(\frac{b - dt^m}{ct^m - a}, t\right) \frac{mt^{m-1}(ad - cb)}{(ct^m - a)^2} dt = \int R_1(t) dt,$$

где  $R_1(t)$  – рациональная функция аргумента  $t$ .

Если под знаком интеграла находится несколько выражений вида

$$\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{m/n}, \dots, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{r/s},$$

то вычисление интеграла сводится к вычислению интеграла от рациональной функции с помощью подстановки

$$\frac{ax + b}{cx + d} = t^k,$$

где  $k$  общий знаменатель дробей  $m/n, \dots, r/s$ .

**Пример.** Вычислить интеграл

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x}.$$

*Решение.*

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}; \quad t^2 = \frac{1+x}{1-x}; \quad x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}; \quad dx = \frac{4t \cdot dt}{(t^2 + 1)^2}.$$

Тогда

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x} = \int t \frac{(t^2 + 1)4t \cdot dt}{2(t^2 + 1)^2} = 2 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} \cdot dt =$$

$$= 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = 2t - 2 \operatorname{arctg} t + c = 2 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + c.$$

3. Интегралы вида  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ ,

где  $R$  – рациональная функция от  $x$  и  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ .

Рассмотрим только один случай:  $a > 0$ ;  $x_1 \neq x_2$ . Тогда

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = |x - x_1| \sqrt{\frac{a(x - x_2)}{x - x_1}}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx &= \int R\left(x, |x - x_1| \sqrt{\frac{a(x - x_2)}{x - x_1}}\right) dx \\ &= \int R_1\left(x, \sqrt{\frac{a(x - x_2)}{x - x_1}}\right) dx, \end{aligned}$$

т.е. вычисление интеграла свели к вычислению интеграла, рассмотренного в пункте 2.

### 3.7. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интеграл вида  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ ,

где  $R$  – рациональная функция от  $\sin x$  и от  $\cos x$ . Покажем, что этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \\ \cos x &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \end{aligned}$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt,$$

где  $R_1$  – рациональная функция от  $t$ .

**Пример.** Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x}.$$

*Решение.* С использованием вышеприведенных формул получаем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin x} &= \int \frac{2dt}{\left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{(1+t)^2} = \\ &= 2 \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2} = -2 \cdot \frac{1}{t+1} + c = -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} + c. \end{aligned}$$

Подстановка  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$  называется «универсальной тригонометрической подстановкой», т.к. всегда позволяет вычислить интеграл от рациональной функции от  $\sin x$  и  $\cos x$ . Однако применение универсальной тригонометрической подстановки на практике часто приводит к сложным рациональным функциям под знаком интеграла. Поэтому в некоторых случаях используются другие подстановки, облегчающие вычисление интегралов от рациональных тригонометрических функций. Рассмотрим некоторые из них.

1) Если интеграл имеет вид

$$\int R(\sin x) \cos x dx,$$

то подстановка  $\sin x = t, \cos x dx = dt$  приводит к следующему интегралу

$$\int R(t) dt.$$

2) Аналогично, если

$$\int R(\cos x) \sin x dx,$$

то используется подстановка  $\cos x = t, \sin x dx = -dt$ .

3) В случае, если подынтегральная рациональная функция зависит только от  $\operatorname{tg} x$ , то замена

$$\operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

приводит к следующему интегралу

$$\int R(t) \frac{dt}{1+t^2}$$

4) В некоторых случаях при интегрировании тригонометрических функций могут оказаться полезными формулы:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2},$$

$$\sin mx \cdot \cos nx = 0,5(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x),$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = 0,5(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x),$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = 0,5(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x).$$

## 4. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### 4.1. Определенный интеграл как предел интегральных сумм

Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана непрерывная функция  $y = f(x)$  (рис. 4.1).

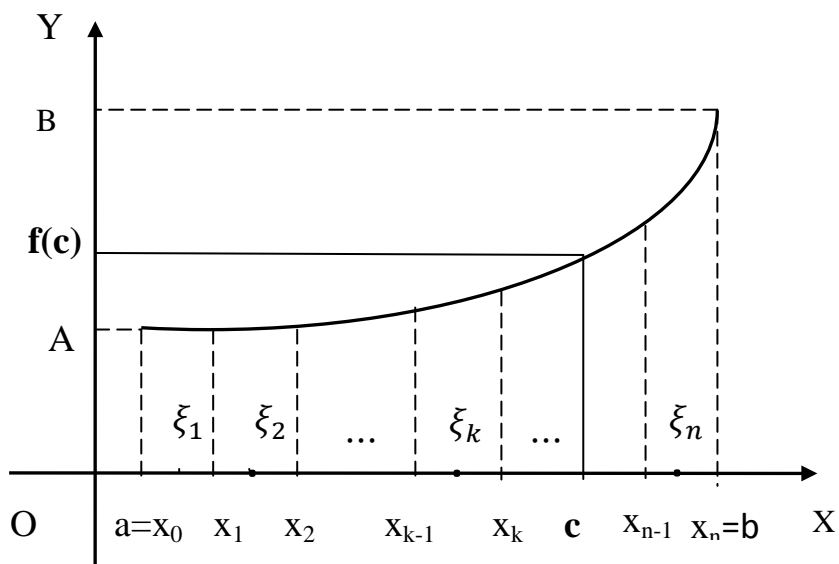


Рис. 4.1. Определенный интеграл

1) Заданный отрезок  $[a, b]$  разделим на  $n$  промежутков (не обязательно равных) точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Вычислим для каждого промежутка произведение  $f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ , где  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $\xi_k$  - произвольная точка, удовлетворяющая условию:  $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

2) Составим сумму таких произведений по всем промежуткам

$$f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

Эта сумма называется «интегральной суммой».

3) Каждый промежуток разделим на более мелкие промежутки так, что

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \rightarrow 0.$$

При этом интегральная сумма становится переменной величиной, имеющей конечный предел, если  $f(x)$  - непрерывна, а отрезок  $[a, b]$  конечен (доказательство опускаем). Этот предел называется «определенным интегралом» от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx:$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x)dx,$$

где  $x$  – называется переменной интегрирования  $a, b$  – соответственно, нижний и верхний предел интегрирования.

В случае, когда  $f(x) \geq 0$  интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

будет численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной заданной кривой, прямыми  $x = a$  и  $x = b$  и осью  $Ox$ .

#### 4.2. Свойства определенного интеграла

1. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю, т.е.

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Это следует из определения определенного интеграла, где  $\Delta x = 0$ .

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла

$$\int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx,$$

где  $A = const$ .

3. Определенный интеграл от алгебраической суммы непрерывных функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

Второе и третье свойства доказываются через определение определенного интеграла и свойства пределов.

4. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx,$$

Из определения определенного интеграла следует, что знаки  $\Delta x$  меняются.

5. Для любых  $a, b, c$  справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

6. Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

7. Если  $f(x) \leq \varphi(x)$  на  $[a, b]$ , где  $a < b$ , то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

В частности, если  $m \leq f(x) \leq M$ , то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a),$$

где  $m, M$  – наименьшее и наибольшее значение  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

8. Теорема о среднем.

Если  $f(x)$  – непрерывная функция на отрезке  $[a, b]$ , то существует такая точка  $c$  ( $a \leq c \leq b$ ), что

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c).$$

Геометрически это свойство означает, что найдется прямоугольник со сторонами  $(b - a)$  и  $f(c)$ , равновеликий криволинейной трапеции  $aABb$  (рис. 4.1).

### 4.3. Формула Ньютона – Лейбница

Формула Ньютона – Лейбница связывает определенный интеграл с неопределенным интегралом и дает практически удобный метод вычисления определенных интегралов.

Пусть в определенном интеграле нижняя граница  $a$  – фиксированная, а верхняя граница  $b = x$  переменная (рис. 4.2), тогда имеем функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x) dx.$$

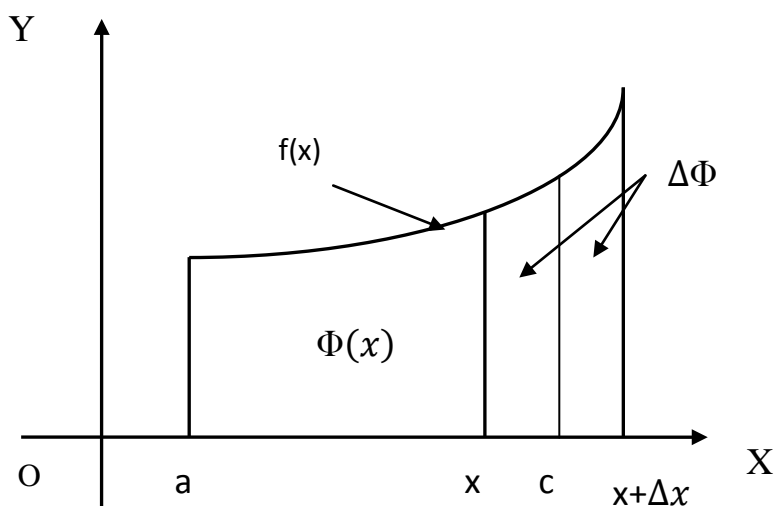


Рис. 4.2. Функция с переменным верхним пределом интегрирования

Покажем вначале, что  $\Phi'(x) = f(x)$ , т.е.  $\Phi(x)$  - первообразная для  $f(x)$ .

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx = \int_x^{x+\Delta x} f(x) dx.$$

Применим теорему о среднем, получим

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(x) dx = (x + \Delta x - x) \cdot f(c) = \Delta x \cdot f(c).$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x).$$

Т.к.  $c \rightarrow x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  и непрерывной функции  $f(x)$ .

Пусть  $F(x)$  – первообразная для функции  $f(x)$ , но две первообразные отличаются на постоянное слагаемое:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x) dx = F(x) + c.$$

Положим  $x = a$ , тогда

$$\int_a^a f(x) dx = 0 = F(a) + c,$$

или  $c = -F(a)$ , следовательно

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a).$$

Положим  $x=b$ , тогда получим формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Последнее выражение используется для краткой формы записи разности функции и при значениях аргумента  $b$  и  $a$  соответственно.

#### 4.4. Замена переменной в определенном интеграле

В определенном интеграле

$$\int_a^b f(x) dx$$

сделаем замену переменной  $x = \varphi(t)$ . Пусть  $\alpha = \varphi(a), \beta = \varphi(b)$ , тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Пусть  $F(x)$  – первообразная, тогда

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ранее было показано, что

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + c,$$

тогда

$$\int_a^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

У соответствующих выражений равны правые части, следовательно, равны и левые.

#### 4.5. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Известно, что  $d(uv) = u dv + v du$  или  $u dv = d(uv) - v du$ .

Проинтегрируем равенство в пределах от  $a$  до  $b$ :

$$\int_a^b u dv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v du = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Таким образом, формула интегрирования по частям в определенном интеграле имеет вид:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

## 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

### 5.1. Вычисление площадей плоских фигур

В п. 4.1 было показано, что для случая  $f(x) \geq 0$  интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и подынтегральной функцией  $f(x)$ .

При  $f(x) \leq 0$  значение интеграла будет отрицательным числом и, если не просто вычисляется интеграл, а находится площадь фигуры, то при отрицательных значениях подынтегральной функции, значение интеграла необходимо брать по абсолютной величине.

**Пример.** Найти площадь, ограниченную функцией  $y = \cos x$  и осью  $Ox$ , при  $0 \leq x \leq 2\pi$  (рис. 5.1.).

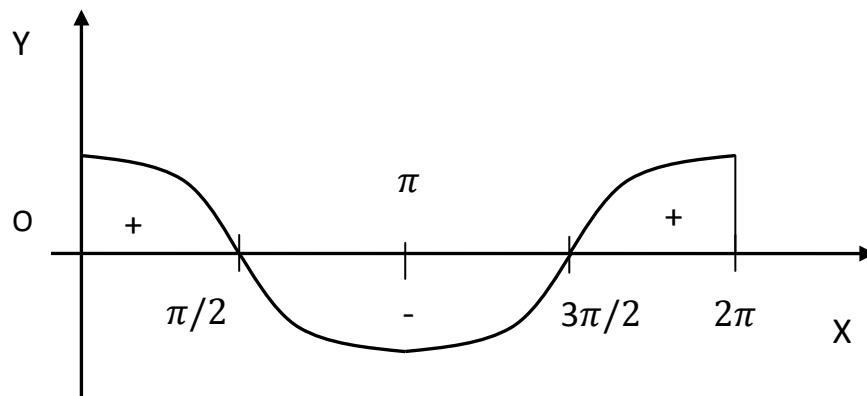


Рис. 5.1. Вычисление площади плоской фигуры

*Решение.* Т.к.  $\cos x \geq 0$ , при  $x \in \left[0, \pi/2\right] \cup \left[3\pi/2, 2\pi\right]$  и  $\cos x \leq 0$

при

$x \in \left[\pi/2, 3\pi/2\right]$ , то площадь находится по формуле

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \cos x \, dx + \int_{3\pi/4}^{2\pi} \cos x \, dx = \\
&= \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \sin x \Big|_{\pi/2}^{3\pi/4} + \sin x \Big|_{3\pi/4}^{2\pi} = \\
&= \left( \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) - \left( \sin \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{2} \right) + \left( \sin 2\pi - \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 4.
\end{aligned}$$

Без доказательства приведем формулу для вычисления площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной уравнениями в параметрической форме:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

где  $\alpha \leq t \leq \beta$  и  $a = \varphi(\alpha), b = \psi(\beta)$ . Тогда

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Пусть в полярной системе координат кривая задана уравнением (рис. 5.2).

$$r = f(\varphi),$$

где  $f(\varphi)$  - непрерывная функция при  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ .

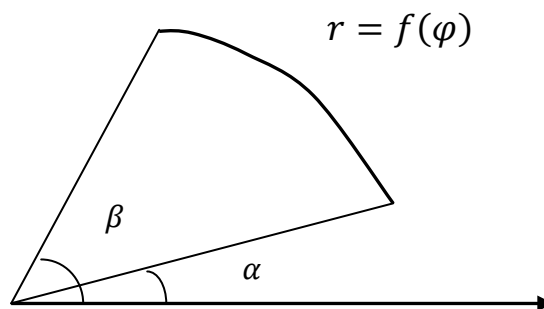


Рис. 5.2. Площадь криволинейного сектора

Тогда площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой  $r = f(\varphi)$  и радиус-векторами  $\varphi = \alpha$  и  $\varphi = \beta$ , вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi$$

**Пример.** Вычислить площадь, ограниченную лемнискатой Бернулли (рис.5.3):  $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$

**Решение.** Очевидно, при изменении  $0 \leq \varphi \leq \pi/4$  радиус-вектор опишет четверть искомой площади, лежащей в первом квадранте:

$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} [a\sqrt{\cos 2\varphi}]^2 d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

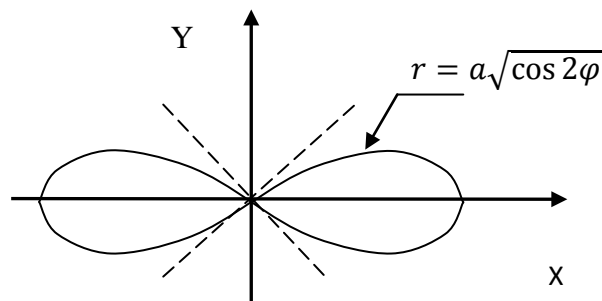


Рис. 5.3. Лемниската Бернулли

Таким образом, площадь, ограниченная лемнискатой, будет равна  $S = a^2$ .

## 5.2. Длина дуги кривой

Рассмотрим непрерывную кривую, заданную уравнением  $y = f(x)$ . Найдем длину дуги этой кривой, заключенную между вертикальными прямыми  $x = a$  и  $x = b$  (рис. 5.4).

Разобьем отрезок  $[a, b]$  точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . Точки  $f(x_i), f(x_{i+1}), (i = \overline{0, n-1})$  соединим хордой и

получим ломаную линию, вписанную в дугу  $\widetilde{A, B}$ . Длины хорд обозначим через  $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$ .

Тогда

$$\Delta l_i \cong \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

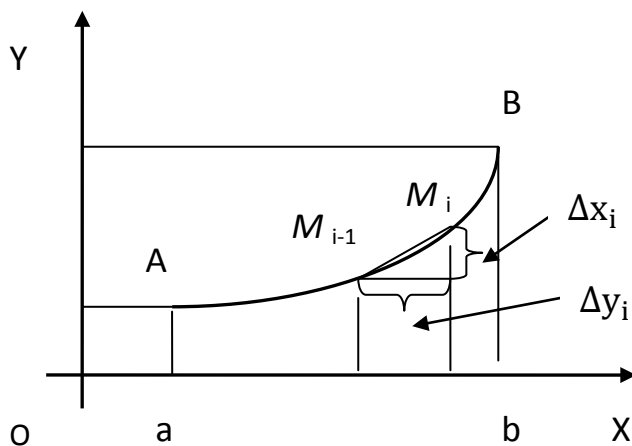


Рис. 5.4. Вычисление длины дуги

Длина ломаной линии равна

$$L_n = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i,$$

и пусть

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i.$$

Предел, к которому стремится длина ломаной

$$L = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

называется длиной  $L$  дуги  $\widetilde{A, B}$ .

**Пример.** Найти длину окружности, заданной уравнением  $x^2 + y^2 = a^2$ .

**Решение.** Длину окружности найдем через длину четвертой части окружности, лежащей в первом квадранте. Уравнение дуги имеет вид:

$y = \sqrt{a^2 - x^2}$ , откуда

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Тогда длина окружности

$$L = 4 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 4a \cdot \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a = 2\pi a.$$

Длина  $L$  дуги  $\widetilde{A, B}$  кривой, заданной в параметрической форме:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), a = \varphi(\alpha), b = \psi(\beta) (\alpha \leq t \leq \beta),$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2} dt.$$

Длина  $L$  дуги  $\widetilde{A, B}$  кривой, заданной в полярной системе координат

$$r = f(\varphi), a = f(\alpha), b = f(\beta)$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

### 5.3. Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений

Пусть некоторое тело  $T$  расположено между параллельными плоскостями  $x = a$  и  $x = b$  (рис. 5.5).

Предположим, что известна площадь любого сечения  $S(x)$  этого тела плоскостью, перпендикулярной к оси  $Ox$ . Разобьем отрезок  $[a, b]$  точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . Объем слоя, заключенного между точками  $x_i$  и  $x_{i+1}$  будет  $\Delta v_i = S(\xi_i) \Delta x_i$ , ( $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ ,  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ ), а объем всего тела есть интегральная сумма:

$$V \cong \sum_{i=1}^n \Delta v_i = \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \Delta x_i.$$

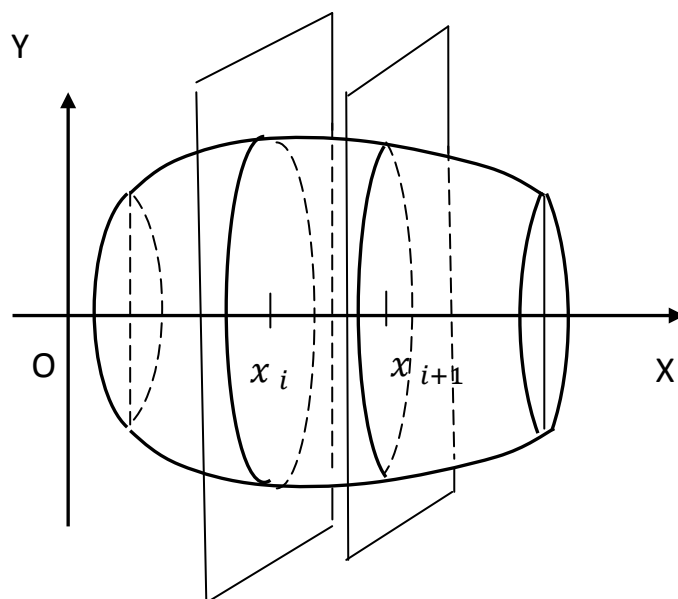


Рис. 5.5. Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений

Предполагая, что  $S(x)$  непрерывная функция вычисляется предел, когда максимальный из отрезков

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

стремится к нулю и получается следующее выражение для объема тела по площадям параллельных сечений:

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

**Пример.** Найти объем конуса.

**Решение.** Пусть высота конуса равна  $H$ , а радиус основания  $R$  (рис.5.6).

Из подобия треугольников

$$r = \frac{R}{H} x,$$

тогда  $S(x) = \pi r^2$ .

$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_0^H \pi \frac{R^2}{H^2} x^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

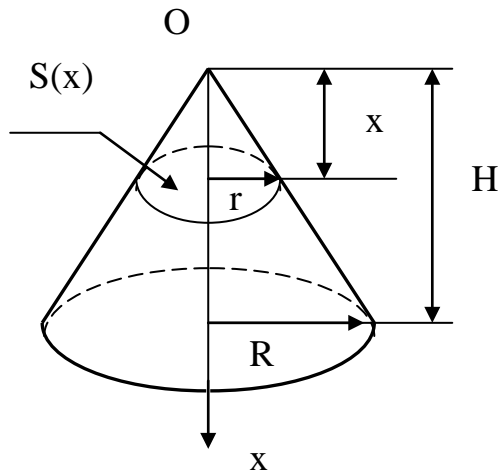


Рис. 5.6. Вычисление объема конуса

Частным случаем вычисления объема тела по площадям параллельных сечений является вычисление объема тела вращения. Предположим, что некоторая непрерывная на  $[a, b]$  кривая  $y = f(x)$  вращается вокруг оси абсцисс (рис. 5.5). В этом случае площадь сечения для любого  $x \in [a, b]$  определяется формулой  $S(x) = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2$ . Тогда объем тела, получаемого при вращении кривой вокруг оси абсцисс, есть выражение вида:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Аналогично, если непрерывная кривая  $x = g(y)$ ,  $y \in [c, d]$  вращается вокруг оси ординат, то объем тела равен

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y) dy = \pi \int_c^d g^2(y) dy.$$

**Пример.** Найти объем шара радиуса  $R$ .

**Решение.** Тогда  $x^2 + y^2 = R^2$ ;  $y^2 = R^2 - x^2$ .

$$V_x = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left( R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

## 5.4. Площадь поверхности вращения

Рассмотрим непрерывную на  $[a, b]$  кривую, заданную уравнением  $y = f(x)$ . Найдем площадь поверхности вращения этой кривой вокруг оси абсцисс (рис. 5.7).

Разобьем отрезок  $[a, b]$  точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . Точки  $M_i = f(x_i); M_{i+1} = f(x_{i+1}), (i = 0, n-1)$  соединим хордой. Тогда площадь усеченного конуса, заключенного между плоскостями  $x_i$  и  $x_{i+1}$  равна

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot \Delta s_i.$$

Но длина  $\Delta s_i$  хорды  $M_i, M_{i+1}$

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

Площадь поверхности вращения, образованная вращением ломаной линии  $\overline{M_i, M_{i+1}}, (i = 0, n-1)$  вокруг оси абсцисс равна

$$P_n = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

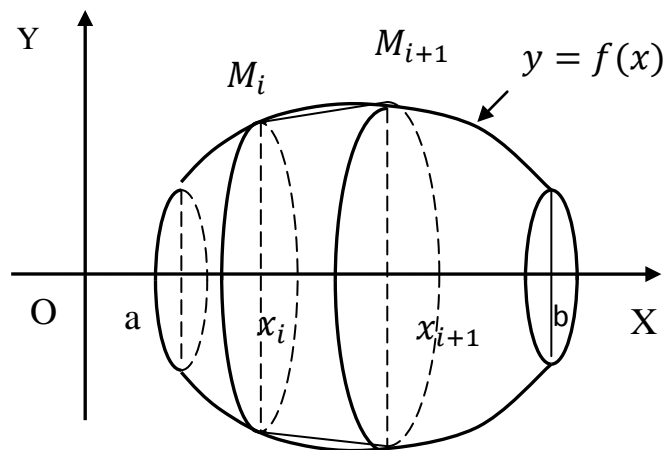


Рис. 5.7. Вычисление площади поверхности вращения

Можно доказать, что предел этой суммы, когда максимальный из отрезков

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

стремится к нулю, равен

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

который называется площадью поверхности вращения.

**Пример.** Найти площадь поверхности вращения окружности  $x^2 + y^2 = R^2$  вокруг оси абсцисс при  $x \in [-R, R]$  (рис. 5.8).

*Решение.* Уравнение верхней половины окружности  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ .

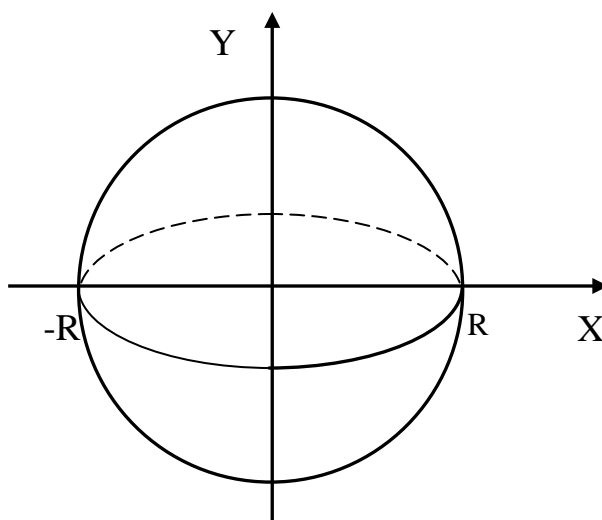


Рис. 5.8. Площадь поверхности вращения окружности

Тогда

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Искомая площадь поверхности вращения

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2 + x^2} dx = \\ &= 2\pi R x \Big|_{-R}^R = 2\pi R(R + R) = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

## Литература

1. Математика: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. Ч.1/ Под ред. Р.Ш. Марданова. – Казань: Изд-во КФЭИ, 1999. – 532 с.
2. Кузнецов Б.Т. Математика: Учебник. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 719 с.
3. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономических специальностей: Учебник и практикум/ Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд., перераб. И доп. – М.: Юрайт, Высшее образование, 2010. – 909 с. (МО РФ, УМО).
4. Самнер Г. Математика для географов. Перевод с англ. М. Прогресс, 1981.
5. Мышкис Ф.Д. Лекции по высшей математике. [Электронный ресурс]. Изд-во «Лань», ISBN 978-5-8114-0572-5, 2009. – 688 с. <http://e.lanbook.com/view/book/281>.
6. Назаров А.И., Назаров И.А. Курс математики для нематематических специальностей и направлений бакалавриата. [Электронный ресурс]. Изд-во «Лань», ISBN 978-5-8114-1199-3, 2011. – 576 с. <http://e.lanbook.com/view/book/1797>.
7. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2008. 352 с.