УДК 519.63

МЕТОД РЭЛЕЯ–РИТЦА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

С.И. Соловьёв

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail Sergei.Solovyev@ksu.ru

Аннотация

Рассмотрена нелинейная вариационная задача на собственные значения в бесконечномерном гильбертовом пространстве V, состоящая в нахождении чисел λ и ненулевых элементов u из V, удовлетворяющих уравнению $a(u,v) = \lambda b(u,v)$ для любых элементов v из V. Доказано, что в случае, когда билинейная форма a является симметричной положительно определенной и ограниченной, билинейная форма b является симметричной положительной и вполне непрерывной, задача имеет последовательность положительных конечнократных собственных значений с единственной предельной точкой на бесконечности. Собственным значениям отвечает последовательность собственных элементов, образующая полную систему в пространстве V. Зададим семейство конечномерных подпространств V_h гильбертова пространства V, удовлетворяющее условию предельной плотности. Метод Рэлея-Ритца состоит в аппроксимации исходной бесконечномерной задачи конечномерной задачей в подпространстве V_h. Конечномерная аппроксимация осуществлялась с помощью метода конечных элементов. Доказано, что приближенная задача имеет конечную последовательность положительных собственных значений, которым отвечает последовательность собственных элементов, образующая полную систему в гильбертовом пространстве V_h. Для приближенных собственных значений и собственных элементов при достаточно малых h установлены оценки погрешности. При исследовании сходимости приближенной задачи использовалась вспомогательная параметрическая линейная задача на собственные значения.

Ключевые слова: Нелинейная спектральная задача, метод конечных элементов, оценка погрешности

Введение

Задачи на собственные значения возникают в науке и технике при математическом моделировании сложных технических процессов и систем.

Эти задачи описываются дифференциальными уравнениями, содержащими неизвестную функцию и спектральный параметр. Обобщенная постановка дифференциальной задачи приводит к вариационной задаче на собственные значения в бесконечномерном гильбертовом пространстве V, состоящей в нахождении чисел λ и ненулевых элементов u из V, удовлетворяющих уравнению $a(u,v)=\lambda b(u,v)$ для любых элементов $v\in V$. Предположим, что билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ является симметричной положительно определенной и ограниченной, билинейная форма $b(\cdot,\cdot)$ является симметричной положительной и вполне непрерывной. В этом случае задача имеет последовательность положительных конечнократных собственных значений λ_k, $k=1,2,\ldots$, с единственной предельной точкой на бесконечности. Собственным значениям отвечает последовательность собственных элементов u_k, $k=1,2,\ldots$, образующая полную систему в гильбертовом пространстве V. Зададим семейство конечномерных подпространств V_h гильбертова пространства V, удовлетворяющее условию предельной плотности. Метод Рэлея–Ритца состоит в аппроксимации исходной бесконечномерной задачи конечномерной задачей в подпространстве V_h, состоящей в нахождении чисел λ^h и ненулевых элементов u^h из V_h, удовлетворяющих уравнению $a(u^h,v^h)=\lambda^h b(u^h,v^h)$ для любых элементов $v^h\in V_h$. Приближенная задача имеет конечную последовательность положительных собственных значений λ_k^h, $k=1,2,\ldots,N_h$. Собственным значениям отвечает последовательность собственных элементов u_k^h, $k=1,2,\ldots,N_h$, образующая полную систему в гильбертовом пространстве V_h. Для приближенных собственных значений и собственных элементов при достаточно малых h справедливы оценки погрешности [1, с. 264] :

$$0\leqslant\lambda_k^h-\lambda_k\leqslant c\,(\varepsilon^h)^2,\quad \|u_k^h-u_k\|\leqslant c\,\varepsilon^h,\quad \varepsilon^h=\sup_{u\in U_k,\|u\|=1}\ \inf_{v^h\in V_h}\|u-v^h\|,$$

где c – постоянная, не зависящая от h, U_k – собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ_k. В настоящей работе метод Рэлея–Ритца изучается для вариационных задач на собственные значения, когда билинейные формы зависят от спектрального параметра. Нелиненйые задачи на собственные значения возникают в физике плазмы, гидродинамике, в теории упругости и интегральной оптике [2–7].

1. Постановка задачи.

Пусть V – вещественное бесконечномерное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}$ – числовая прямая, $\Lambda = (0,\infty)$. Введем отображения $a : \Lambda \times V \times V \to \mathbb{R}$, $b : \Lambda \times V \times V \to \mathbb{R}$, которые при фиксированном первом аргументе $\mu \in \Lambda$ являются симметричными билинейными формами $a(\mu) = a(\mu,\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ и $b(\mu) = b(\mu,\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$. Предположим, что для фиксированного $\mu \in \Lambda$ билинейная форма $a(\mu,\cdot,\cdot)$ является положительно определенной и непрерывной (ограниченной), то есть существуют положительные непрерывные функции $\alpha_1(\mu)$ и $\alpha_2(\mu)$ такие, что

$$\alpha_1(\mu)\|v\|^2 \leqslant a(\mu,v,v) \leqslant \alpha_2(\mu)\|v\|^2 \quad \forall v \in V.$$

Предположим, что для фиксированного $\mu \in \Lambda$ билинейная форма $b(\mu,\cdot,\cdot)$ является положительной и вполне непрерывной, то есть $b(\mu,v,v) > 0$ для $v \in V \setminus \{0\}$ и $b(\mu,v_i,v_i) \to b(\mu,v,v)$ при $i \to \infty$ для $v_i \rightharpoonup v$ в V при $i \to \infty$. Символом $\rightharpoonup$ обозначается слабая сходимость в гильбертовом пространстве V.

Сформулируем нелинейную задачу на собственные значения: найти $\lambda \in \Lambda$, $u \in V \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(\lambda,u,v) = \lambda b(\lambda,u,v) \quad \forall v \in V. \tag{1}$$

Число λ, удовлетворяющее уравнению (1), называется *собственным значением* билинейной формы $a(\lambda,\cdot,\cdot)$ относительно билинейной формы $b(\lambda,\cdot,\cdot)$, а элемент u – отвечающим λ *собственным элементом.* Короче λ и u будем называть собственным значением и собственным элементом задачи (1). Множество $U(\lambda)$, состоящее из собственных элементов, отвечающих собственному значению λ, и нулевого элемента, образует замкнутое подпространство в V, которое называется *собственным подпространством*, соответствующим собственному значению λ. Размерность этого подпространства называется *кратностью* собственного значения λ. Если размерность собственного подпространства равна единице, то соответствующее собственное значение называется *простым*.

Заметим, что если w – собственный элемент, отвечающий собственному значению λ задачи (1), то для произвольной отличной от нуля постоянной c элемент $u = cw$ также является собственным элементом, отвечающим собственному значению λ. Постоянную c, а, значит, и собственный элемент, можно фиксировать, используя условие нормировки. В последующем изложении применяется нормировка, когда c выбирается из условия $\|u\|_{b(\lambda)} = 1$, где $\|u\|^2_{b(\mu)} = b(\mu, u, u)$. Следовательно, $c = 1/\|w\|_{b(\lambda)}$.

Предположим, что выполнено условие непрерывности по числовому аргументу для билинейных форм $a(\mu) = a(\mu, \cdot, \cdot)$ и $b(\mu) = b(\mu, \cdot, \cdot)$, то есть $\alpha(\mu, \eta) \to 0$, $\beta(\mu, \eta) \to 0$ при $\mu \to \eta$, $\mu, \eta \in \Lambda$, где

$$\alpha(\mu, \eta) = \|a(\mu) - a(\eta)\|, \quad \beta(\mu, \eta) = \|b(\mu) - b(\eta)\|.$$

Определим *функционал Рэлея* (*отношение Рэлея*) выражением

$$R(\mu, v) = \frac{a(\mu, v, v)}{b(\mu, v, v)} \quad \forall v \in V \setminus \{0\}, \mu \in \Lambda.$$

Предположим, что отношение Рэлея является невозрастающей по числовому аргументу функцией, то есть

$$R(\mu, v) \geqslant R(\eta, v), \quad \mu < \eta, \mu, \eta \in \Lambda, \quad v \in V \setminus \{0\}.$$

Укажем на следующее свойство билинейной формы $b(\mu, \cdot, \cdot)$ при фиксированном $\mu \in \Lambda$: существует положительная постоянная $\beta_2(\mu)$ такая, что

$$b(\mu, v, v) \leqslant \beta_2(\mu)\|v\|^2 \quad \forall v \in V.$$

2. Параметрическая задача.

Введем вспомогательную линейную задачу на собственные значения при фиксированном $\mu \in \Lambda$: найти $\gamma = \gamma(\mu) \in \mathbb{R}$, $y = y(\mu) \in V \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(\mu, y, v) = \gamma b(\mu, y, v) \quad \forall v \in V. \tag{2}$$

Задача (2) имеет последовательность положительных конечнократных собственных значений $\gamma_k = \gamma_k(\mu)$, $k = 1, 2, \ldots$, занумерованных с учетом кратности:

$$0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_k \leqslant \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} \gamma_k = \infty.$$

Этим собственным значениям соответствует ортонормированная система собственных элементов $y_k = y_k(\mu)$, $k = 1, 2, \ldots$ такая, что $a(\mu, y_i, y_j) = \gamma_i \delta_{ij}$, $b(\mu, y_i, y_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots$ Элементы y_k, $k = 1, 2, \ldots$ образуют полную систему в пространстве V.

Обозначим

$$E_k(\mu) = \operatorname{span}\{y_1(\mu), y_2(\mu), \ldots, y_k(\mu)\},$$

$k = 1, 2, \ldots$ Для подпространства W пространства V определим

$$W^{\perp}_{a(\mu)} = \{v : v \in V, a(\mu, v, w) = 0 \ \forall w \in W\}.$$

Положим $E_0(\mu) = \{0\}$, $(E_0(\mu))^{\perp}_{a(\mu)} = V$.

Пусть W есть подпространство пространства V. Обозначим через $\mathcal{E}_k(W)$ множество всех k-мерных подпространств пространства W при $k \geqslant 1$. Множество $\mathcal{E}_0(W)$ состоит только из $E_0(\mu)$. Положим $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_k(V)$ при $k \geqslant 0$.

Справедливы вариационные свойства

$$\gamma_k = \min_{v \in (E_{k-1}(\mu))^{\perp}_{a(\mu)} \setminus \{0\}} R(\mu, v) = \max_{v \in E_k(\mu) \setminus \{0\}} R(\mu, v),$$

$$\gamma_k = \max_{W \in \mathcal{E}_{k-1}} \min_{v \in W^{\perp}_{a(\mu)} \setminus \{0\}} R(\mu, v) = \min_{W \in \mathcal{E}_k} \max_{v \in W \setminus \{0\}} R(\mu, v),$$

где $k = 1, 2, \ldots$

Из вариационных свойств вытекают неравенства $\gamma_k(\mu) \geqslant \gamma_k(\eta)$ при $\mu < \eta$, $\mu, \eta \in \Lambda$.

Далее в этом параграфе через $c = c(\mu, \eta)$ обозначаются различные постоянные, непрерывно зависящие от $\mu, \eta \in \Lambda$.

Лемма 1 *Если $\mu, \eta \in \Lambda$ и величина $|\mu - \eta|$ достаточно мала, то существует постоянная c, для которой справедлива оценка*

$$|\gamma_k(\mu) - \gamma_k(\eta)| \leqslant c\,(\alpha(\mu, \eta) + \beta(\mu, \eta)).$$

Доказательство. Для $v \in V \setminus \{0\}$, $\mu, \eta \in \Lambda$ имеет место равенство

$$R(\mu, v) - R(\eta, v) =$$

$$= \frac{a(\mu,v,v)-a(\eta,v,v)}{a(\mu,v,v)}\,R(\eta,v) + \frac{b(\eta,v,v)-b(\mu,v,v)}{a(\mu,v,v)}\,R^2(\eta,v) +$$
$$+ \frac{a(\mu,v,v)-a(\eta,v,v)}{a(\mu,v,v)}\,(R(\mu,v)-R(\eta,v)) +$$
$$+ \frac{b(\eta,v,v)-b(\mu,v,v)}{a(\mu,v,v)}\,(R(\mu,v)-R(\eta,v))R(\eta,v).$$

Отсюда для достаточно малых $|\mu-\eta|$ находим

$$R(\mu,v)-R(\eta,v) =$$
$$= \frac{\dfrac{a(\mu,v,v)-a(\eta,v,v)}{a(\mu,v,v)}\,R(\eta,v) + \dfrac{b(\eta,v,v)-b(\mu,v,v)}{a(\mu,v,v)}\,R^2(\eta,v)}{1-\dfrac{a(\mu,v,v)-a(\eta,v,v)}{a(\mu,v,v)} - \dfrac{b(\eta,v,v)-b(\mu,v,v)}{a(\mu,v,v)}\,R(\eta,v)},$$

где $v \in V \setminus \{0\}$, $\mu,\eta \in \Lambda$.

Теперь, используя вариационные свойства собственных значений, выводим

$$\gamma_k(\mu) = \min_{W\in\mathcal{E}_k}\max_{v\in W\setminus\{0\}} R(\mu,v) \leqslant \max_{v\in E_k(\eta)\setminus\{0\}} R(\mu,v) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{v\in E_k(\eta)\setminus\{0\}} R(\eta,v) + \max_{v\in E_k(\eta)\setminus\{0\}} |R(\mu,v)-R(\eta,v)| \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_k(\eta) + \varkappa(\mu,\eta),$$

где

$$\varkappa(\mu,\eta) = \frac{\dfrac{\alpha(\mu,\eta)}{\alpha_1(\mu)}\,\gamma_k(\eta) + \dfrac{\beta(\mu,\eta)}{\alpha_1(\mu)}\,\gamma_k^2(\eta)}{1-\dfrac{\alpha(\mu,\eta)}{\alpha_1(\mu)} - \dfrac{\beta(\mu,\eta)}{\alpha_1(\mu)}\,\gamma_k(\eta)},$$
$$\varkappa(\mu,\eta) \leqslant c\,(\alpha(\mu,\eta)+\beta(\mu,\eta)).$$

В результате получим

$$\gamma_k(\mu)-\gamma_k(\eta) \leqslant c\,(\alpha(\mu,\eta)+\beta(\mu,\eta)),$$

$$\gamma_k(\eta)-\gamma_k(\mu) \leqslant c\,(\alpha(\mu,\eta)+\beta(\mu,\eta)),$$

что завершает доказательство леммы.

Пусть $\gamma_i(\mu)$, $i=1,2,\ldots$, – последовательность собственных значений задачи (2), $y_i(\mu)$, $i=1,2,\ldots$, – ортонормированная система собственных элементов, соответствующая собственным значениям $\gamma_i(\mu)$, $i=1,2,\ldots$

Зафиксируем $\mu \in \Lambda$. Предположим, что $\gamma_k = \gamma_k(\mu)$ есть собственное значение задачи (2) кратности s,

$$\gamma_{k-1} < \gamma_k = \gamma_{k+1} = \dots = \gamma_{k+s-1} < \gamma_{k+s},$$

где $k \geqslant 1$, $\gamma_0 = 0$. Для $\eta \in \Lambda$ обозначим

$$Y_k(\eta) = \operatorname{span}\{y_k(\eta), y_{k+1}(\eta), ..., y_{k+s-1}(\eta)\}.$$

Пусть W_1 и W_2 – два замкнутых подпространства пространства V, $\dim W_1 = \dim W_2 < \infty$, P_1 и P_2 – ортогональные проекторы на W_1 и W_2 соответственно. Раствор подпространств W_1 и W_2 гильбертова пространства V определяется соотношениями

$$\vartheta(W_1, W_2) = \max_{u \in W_2, \|u\|=1} \|u - P_1 u\| = \max_{u \in W_1, \|u\|=1} \|u - P_2 u\|.$$

Лемма 2 *Если $\mu, \eta \in \Lambda$ и величина $|\mu - \eta|$ достаточно мала, то существует постоянная c, для которой справедлива оценка*

$$\vartheta(Y_k(\mu), Y_k(\eta)) \leqslant c\,(\alpha(\mu, \eta) + \beta(\mu, \eta)).$$

Доказательство. Представим элемент $y \in Y_k(\mu)$ в виде разложения

$$y = Q_k(\eta) y + v_k(\eta) + w_k(\eta),$$

где

$$Q_k(\eta) y = \sum_{i=k}^{k+s-1} \beta_i(\eta) y_i(\eta), \quad v_k(\eta) = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i(\eta) y_i(\eta),$$

$$w_k(\eta) = \sum_{i=k+s}^{\infty} \beta_i(\eta) y_i(\eta), \quad \beta_i(\eta) = b(\eta, y, y_i(\eta)), \quad i = 1, 2, \dots$$

Заметим, что используется следующее соглашение о знаке суммирования $\sum\limits_{i=m}^{n}$: если $n < m$, то сумма полагается равной нулю.

Согласно лемме 1, выберем $\eta \in \Lambda$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$\gamma_k(\mu) - \gamma_{k-1}(\eta) > 0, \quad \gamma_{k+s}(\eta) - \gamma_k(\mu) > 0.$$

Обозначим

$$\delta(\eta, v) = \sup_{w \in V \setminus \{0\}} \frac{|a(\eta, v, w) - \gamma_k b(\eta, v, w)|}{\|w\|_{a(\eta)}}.$$

Для $k \geqslant 1$ докажем оценку

$$\|v_k(\eta)\|_{a(\eta)} \leqslant \frac{\gamma_{k-1}(\eta)}{\gamma_k(\mu) - \gamma_{k-1}(\eta)}\,\delta(\eta, y).$$

Эта оценка при $k = 1$ выполняется тривиально. Пусть $k \geqslant 2$. Тогда справедливы соотношения:

$$a(\eta, y, v_k(\eta)) = a(\eta, v_k(\eta), v_k(\eta)),$$

$$b(\eta, y, v_k(\eta)) = b(\eta, v_k(\eta), v_k(\eta)),$$

$$a(\eta, v_k(\eta), v_k(\eta)) \leqslant \gamma_{k-1}(\eta) b(\eta, v_k(\eta), v_k(\eta)).$$

Следовательно, получим

$$-a(\eta, y, v_k(\eta)) + \gamma_k b(\eta, y, v_k(\eta)) =$$

$$= -a(\eta, v_k(\eta), v_k(\eta)) + \gamma_k b(\eta, v_k(\eta), v_k(\eta)) \geqslant$$

$$\geqslant (\gamma_k(\mu) - \gamma_{k-1}(\eta)) b(\eta, v_k(\eta), v_k(\eta)) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\gamma_k(\mu) - \gamma_{k-1}(\eta)}{\gamma_{k-1}(\eta)} a(\eta, v_k(\eta), v_k(\eta)), \quad k \geqslant 2.$$

Отсюда выводим требуемую оценку.

Для $k \geqslant 1$ докажем оценку

$$\|w_k(\eta)\|_{a(\eta)} \leqslant \frac{\gamma_{k+s}(\eta)}{\gamma_{k+s}(\eta) - \gamma_k(\mu)}\,\delta(\eta, y).$$

Нетрудно проверить, что

$$a(\eta, y, w_k(\eta)) = a(\eta, w_k(\eta), w_k(\eta)),$$

$$b(\eta, y, w_k(\eta)) = b(\eta, w_k(\eta), w_k(\eta)),$$

$$a(\eta, w_k(\eta), w_k(\eta)) \geqslant \gamma_{k+s}(\eta) b(\eta, w_k(\eta), w_k(\eta)).$$

Поэтому приходим к соотношениям

$$a(\eta, y, w_k(\eta)) - \gamma_k b(\eta, y, w_k(\eta)) =$$

$$= a(\eta, w_k(\eta), w_k(\eta)) - \gamma_k b(\eta, w_k(\eta), w_k(\eta)) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\gamma_{k+s}(\eta) - \gamma_k(\mu)}{\gamma_{k+s}(\eta)} a(\eta, w_k(\eta), w_k(\eta)) \geqslant$$

$$\geqslant (\gamma_{k+s}(\eta) - \gamma_k(\mu)) b(\eta, w_k(\eta), w_k(\eta)), \quad k \geqslant 1.$$

Эти соотношения приводят к требуемой оценке.

В результате выводим

$$\|y - Q_k(\eta) y\|_{a(\eta)} \leqslant \|v_k(\eta)\|_{a(\eta)} + \|w_k(\eta)\|_{a(\eta)} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{\gamma_{k-1}(\eta)}{\gamma_k(\mu) - \gamma_{k-1}(\eta)} + \frac{\gamma_{k+s}(\eta)}{\gamma_{k+s}(\eta) - \gamma_k(\mu)} \right) \delta(\eta, y) \leqslant c\, \delta(\eta, y) \leqslant$$
$$\leqslant c\, (\alpha(\mu, \eta) + \beta(\mu, \eta)) \|y\|_{a(\eta)}.$$

Следовательно, заключаем

$$\vartheta(Y_k(\mu), Y_k(\eta)) = \sup_{y \in Y_k(\mu) \setminus \{0\}} \frac{\|y - P_k(\eta) y\|}{\|y\|} \leqslant$$
$$\leqslant c \sup_{y \in Y_k(\mu) \setminus \{0\}} \frac{\|y - Q_k(\eta) y\|_{a(\eta)}}{\|y\|_{a(\eta)}} \leqslant c\, (\alpha(\mu, \eta) + \beta(\mu, \eta)),$$

где $P_k(\eta)$ – ортопроектор на $Y_k(\eta)$. Лемма доказана.

3. Существование и свойства решений.

Обратимся к исследованию существования решений нелинейной задачи на собственные значения (1).

Теорема 1 *Задача* (1) *имеет последовательность конечнократных положительных собственных значений* λ_k*,* $k = 1, 2, \ldots$*, занумерованных с учетом кратности:*

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots, \quad \lim_{k \to \infty} \lambda_k = \infty.$$

Каждое собственное значение λ_i*,* $i \geqslant 1$ *является единственным корнем уравнения*

$$\mu - \gamma_i(\mu) = 0, \quad \mu \in \Lambda, i \geqslant 1.$$

Собственное подпространство $U(\lambda_i)$ *задачи* (1) *является собственным подпространством* $Y(\mu)$*, соответствующим собственному значению* $\gamma_i(\mu)$ *линейной задачи на собственные значения* (2) *для* $\mu = \lambda_i$*.*

Доказательство. Поскольку функции $\gamma_i(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, $i = 1, 2, \ldots$ являются непрерывными невозрастающими функциями, то функции $\mu - \gamma_i(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, $i = 1, 2, \ldots$ являются непрерывными возрастающими функциями. Функции $\mu - \gamma_i(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, $i \geqslant 1$ принимают положительные и отрицательные значения. Поэтому каждое из уравнений $\mu - \gamma_i(\mu) = 0$, $\mu \in \Lambda$, $i \geqslant 1$ имеет единственное решение. Обозначим эти решения через λ_i, $i = 1, 2, \ldots$, то есть $\lambda_i - \gamma_i(\lambda_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$ Чтобы убедиться, что числа λ_i, $i = 1, 2, \ldots$ упорядочены по неубыванию, предположим противное, то есть $\lambda_i > \lambda_{i+1}$. Тогда получим противоречие:

$$\lambda_i = \gamma_i(\lambda_i) \leqslant \gamma_i(\lambda_{i+1}) \leqslant \gamma_{i+1}(\lambda_{i+1}) = \lambda_{i+1}.$$

Числа λ_i, $i = 1, 2, \ldots$ являются собственными значениями задачи (1).

Докажем, что собственные значения занумерованы с учетом кратности, то есть если $\lambda_{i-1} < \lambda_i = \lambda_{i+1} = \ldots = \lambda_{i+s-1} < \lambda_{i+s}$, то $\dim U(\lambda_i) = s$. Поскольку $\lambda_j = \gamma_j(\lambda_j)$, $j \geqslant 1$, то

$$\gamma_{i-1}(\lambda_{i-1}) < \gamma_i(\lambda_i) = \ldots = \gamma_{i+s-1}(\lambda_{i+s-1}) < \gamma_{i+s}(\lambda_{i+s}).$$

Учитывая монотонность функций $\gamma_j(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, $j = 1, 2, \ldots$, получим

$$\gamma_{i-1}(\lambda_i) < \gamma_i(\lambda_i) = \ldots = \gamma_{i+s-1}(\lambda_i) < \gamma_{i+s}(\lambda_i).$$

Следовательно, $\gamma_i(\lambda_i)$ – собственное значение задачи (2) при $\mu = \lambda_i$ и $\dim Y(\lambda_i) = s$, где $Y(\mu)$ – собственное подпространство отвечающее, собственному значению $\gamma_i(\mu)$ задачи (2). Поэтому мы заключаем $\dim U(\lambda_i) = \dim Y(\lambda_i) = s$.

Если предположить, что собственные значения ограничены $\lambda_i \leqslant c$ при $i \geqslant 1$, то приходим к противоречию:

$$\lambda_i = \gamma_i(\lambda_i) \geqslant \gamma_i(c) \to \infty$$

при $i \to \infty$. Теорема доказана.

Теорема 2 *Пусть* λ_i *– собственное значение задачи* (1) *кратности* s *такое, что*

$$\lambda_{i-1} < \lambda_i = \lambda_{i+1} = \ldots = \lambda_{i+s-1} < \lambda_{i+s}.$$

Если $\mu \in \Lambda$ и величина $|\lambda_i - \mu|$ достаточно мала, то существует постоянная c, для которой справедливы оценки

$$|\lambda_i - \gamma_i(\mu)| \leqslant c\,(\alpha(\lambda_i, \mu) + \beta(\lambda_i, \mu)),$$

$$\theta(U(\lambda_i), Y_i(\mu)) \leqslant c\,(\alpha(\lambda_i, \mu) + \beta(\lambda_i, \mu)).$$

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из лемм 1 и 2.

4. Схема аппроксимации.

Для аппроксимации задачи (1) зададим конечномерные подпространства V_h пространства V размерности N_h, удовлетворяющие условию предельной плотности, то есть для любого элемента v из V

$$\varepsilon_h(v) = \inf_{v^h \in V_h} \|v - v^h\| \to 0$$

при $h \to 0$. Из условия предельной плотности вытекает, что $N_h \to \infty$ при $h \to 0$.

Нелинейную задачу на собственные значения (1) будем аппроксимировать конечномерной задачей: найти $\lambda^h \in \Lambda$, $u^h \in V_h \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(\lambda^h, u^h, v^h) = \lambda^h b(\lambda^h, u^h, v^h) \quad \forall v^h \in V_h. \tag{3}$$

Число λ^h, удовлетворяющее уравнению (3), называется приближенным собственным значением, а элемент u^h – приближенным собственным элементом, отвечающим λ^h. Множество $U_h(\lambda^h)$, состоящее из собственных элементов, отвечающих собственному значению λ^h, и нулевого элемента, образует замкнутое подпространство в V_h, которое называется собственным подпространством, соответствующим собственному значению λ^h.

5. Существование приближенных решений.

Введем вспомогательную линейную задачу на собственные значения при фиксированном параметре $\mu \in \Lambda$: найти $\gamma^h = \gamma^h(\mu) \in \mathbb{R}$, $y^h = y^h(\mu) \in V_h \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(\mu, y^h, v^h) = \gamma^h b(\mu, y^h, v^h) \quad \forall v^h \in V_h. \tag{4}$$

Задача (4) имеет N_h положительных конечнократных собственных значений $\gamma_k^h = \gamma_k^h(\mu)$, $k = 1, 2, \ldots, N_h$, занумерованных с учетом кратности:

$$0 < \gamma_1^h \leqslant \gamma_2^h \leqslant \ldots \leqslant \gamma_{N_h}^h.$$

Этим собственным значениям соответствует ортонормированная система собственных элементов $y_k^h = y_k^h(\mu)$, $k = 1, 2, \ldots, N_h$ такая, что $a(\mu, y_i^h, y_j^h) = \gamma_i^h \delta_{ij}$, $b(\mu, y_i^h, y_j^h) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, N_h$. Элементы y_k^h, $k = 1, 2, \ldots, N_h$ образуют полную систему в пространстве V_h.

Обозначим

$$E_k^h(\mu) = \operatorname{span}\{y_1^h(\mu), y_2^h(\mu), \ldots, y_k^h(\mu)\}, \quad k = 1, 2, \ldots, N_h.$$

Для подпространства W_h пространства V_h определим $(W_h)^{\perp}_{a(\mu)} = \{v^h : v^h \in V_h, a(\mu, v^h, w^h) = 0 \, \forall w^h \in W_h\}$. Положим $E_0^h(\mu) = \{0\}$, $(E_0^h(\mu))^{\perp}_{a(\mu)} = V_h$.

Справедливы соотношения

$$\gamma_k^h = \min_{v^h \in (E_{k-1}^h(\mu))^{\perp}_{a(\mu)} \setminus \{0\}} R(\mu, v^h) = \max_{v^h \in E_k^h(\mu) \setminus \{0\}} R(\mu, v^h),$$

$$\gamma_k^h = \max_{W_h \in \mathcal{E}_{k-1}^h} \min_{v^h \in (W_h)^{\perp}_{a(\mu)} \setminus \{0\}} R(\mu, v^h) = \min_{W_h \in \mathcal{E}_k^h} \max_{v^h \in W_h \setminus \{0\}} R(\mu, v^h),$$

$$\gamma_k^h = \max_{W_h \in \mathcal{E}_{N_h - k+1}^h} \min_{v^h \in W_h \setminus \{0\}} R(\mu, v^h),$$

где $k = 1, 2, \ldots, N_h$.

Имеют место неравенства $\gamma_k^h(\mu) \geqslant \gamma_k^h(\eta)$ при $\mu < \eta$, $\mu, \eta \in \Lambda$.

Если $\mu, \eta \in \Lambda$ и величина $|\mu - \eta|$ достаточно мала, то существует постоянная $c = c(\mu, \eta)$, для которой справедлива оценка

$$|\gamma_k^h(\mu) - \gamma_k^h(\eta)| \leqslant c\,(\alpha(\mu, \eta) + \beta(\mu, \eta)).$$

Теорема 3 *Задача* (3) *имеет конечную последовательность конечнократных положительных собственных значений* λ_k^h, $k = 1, 2, \ldots, N_h$, *занумерованных с учетом кратности:*

$$0 < \lambda_1^h \leqslant \lambda_2^h \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{N_h}^h.$$

Каждое собственное значение λ_i^h, $i \geqslant 1$ *является единственным корнем уравнения*

$$\mu - \gamma_i^h(\mu) = 0, \quad \mu \in \Lambda, i \geqslant 1.$$

Собственное подпространство $U_h(\lambda_i^h)$ задачи (3) является собственным подпространством $Y_h(\mu)$, соответствующим собственному значению $\gamma_i^h(\mu)$ линейной задачи на собственные значения (4) для $\mu = \lambda_i^h$.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.

6. Исследование сходимости.

Пусть λ_k – собственное значение задачи (1) кратности s такое, что

$$\lambda_{k-1} < \lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{k+s-1} < \lambda_{k+s},$$

где $\lambda_0 = 0$, $k \geqslant 1$, $U_k = U(\lambda_k)$ – собственное подпространство, отвечающее λ_k, $\dim U_k = s$, $U_k^h = \operatorname{span}\{y_k^h, y_{k+1}^h, \ldots, y_{k+s-1}^h\}$, y_i^h, $i = k, k+1, \ldots, k+s-1$ – собственные элементы приближенной схемы (4).

Для $\mu \in \Lambda$ введем оператор $P_h(\mu) : V \to V_h$ по правилу

$$a(\mu, u - P_h(\mu)u, v^h) = 0 \quad \forall v^h \in V_h,$$

где $u \in V$. Заметим, что $P_h(\mu)u \to u$ при $h \to 0$, $u \in V$. Обозначим $P_h = P_h(\lambda_k)$. Положим

$$\varepsilon^h = \sup_{u \in U_k, \|u\|=1} \varepsilon_h(u).$$

Заметим, что $\varepsilon^h \to 0$ при $h \to 0$.

Теорема 4 *Для достаточно малых h справедлива оценка*

$$0 \leqslant \lambda_k^h - \lambda_k \leqslant c\,(\varepsilon^h)^2,$$

где c – постоянная, не зависящая от h.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{E}_k^h \subset \mathcal{E}_k$, то

$$\gamma_k(\mu) = \min_{W \in \mathcal{E}_k} \max_{v \in W \setminus \{0\}} R(\mu, v) \leqslant$$

$$\leqslant \min_{W_h \in \mathcal{E}_k^h} \max_{v^h \in W_h \setminus \{0\}} R(\mu, v^h) = \gamma_k^h(\mu).$$

Для доказательства неравенства $\lambda_k^h \geqslant \lambda_k$ предположим противное, то есть $\lambda_k^h < \lambda_k$. Тогда приходим к противоречию

$$\lambda_k = \gamma_k(\lambda_k) \leqslant \gamma_k^h(\lambda_k) \leqslant \gamma_k^h(\lambda_k^h) = \lambda_k^h.$$

Теперь для достаточно малых h получим

$$0 \leqslant \lambda_k^h - \lambda_k = \gamma_k^h(\lambda_k^h) - \gamma_k(\lambda_k) \leqslant \gamma_k^h(\lambda_k) - \gamma_k(\lambda_k) \leqslant c\,(\varepsilon^h)^2.$$

Здесь использована оценка погрешности для линейного случая. Теорема доказана.

Теорема 5 *Пусть* λ_k^h *– собственное значение приближенной схемы* (3), u_k^h *– отвечающий* λ_k^h *собственный элемент такой, что* $b(\lambda_k^h, u_k^h, u_k^h) = 1$. *Тогда имеет место сходимость* $\lambda_k^h \to \lambda_k$ *при* $h \to 0$, *из каждой последовательности* $h' \to 0$ *можно выбрать подпоследовательность* $h'' \to 0$ *такую, что* $u_k^h \to u_k$ *в* V *при* $h = h'' \to 0$, *где* λ_k *и* u_k *– собственное значение и собственный элемент задачи* (1). *Если* λ_k *– простое собственное значение и знаки собственных элементов* u_k^h *выбраны так, что* $b(\lambda_k^h, u_k^h, P_h u_k) > 0$, *то* $u_k^h \to u_k$ *в* V *при* $h \to 0$.

Доказательство. 1) В силу теоремы 4 и свойства предельной плотности имеет место сходимость $\lambda_k^h \to \lambda_k$ при $h \to 0$.

Для нормированных собственных элементов u_k^h имеем, что

$$a(\lambda_k^h, u_k^h, u_k^h) = \lambda_k^h \leqslant c,$$

где c – постоянная, не зависящая от h. Следовательно, получим

$$\|u_k^h\| \leqslant \sqrt{c/\alpha_1(\lambda_k^h)} \leqslant c_1.$$

Поэтому из последовательности $h' \to 0$ можно извлечь подпоследовательность $h'' \to 0$ такую, что $u_k^h \rightharpoonup w$ в V при $h = h'' \to 0$.

Для любого $v \in V$ выберем $v^h = P_h v$. При $h = h'' \to 0$ выводим

$$a(\lambda_k^h, u_k^h, v^h) \to a(\lambda_k, w, v), \;\; b(\lambda_k^h, u_k^h, v^h) \to b(\lambda_k, w, v).$$

Переходя в уравнении

$$a(\lambda_k^h, u_k^h, v^h) = \lambda_k^h\, b(\lambda_k^h, u_k^h, v^h)$$

к пределу по $h = h'' \to 0$, получим равенство

$$a(\lambda_k, w, v) = \lambda_k\, b(\lambda_k, w, v) \quad \forall v \in V.$$

Поскольку

$$1 = b(\lambda_k^h, u_k^h, u_k^h) \to b(\lambda_k, w, w)$$

при $h = h'' \to 0$, то $b(\lambda_k, w, w) = 1$. Это означает, что λ_k и $w = u_k$ есть собственное значение и отвечающий ему собственный элемент задачи (1).

Докажем, что имеет место сильная сходимость $u_k^h \to u_k$ в V при $h = h'' \to 0$. Несложные выкладки дают

$$\alpha_1(\lambda_k^h)\|u_k^h - P_h u_k\|^2 \leqslant a(\lambda_k^h, u_k^h - P_h u_k, u_k^h - P_h u_k) =$$

$$= a(\lambda_k^h, u_k^h, u_k^h) - 2a(\lambda_k^h, u_k^h, P_h u_k) + a(\lambda_k^h, P_h u_k, P_h u_k) =$$

$$= \lambda_k^h - 2a(\lambda_k^h, u_k^h, P_h u_k) + a(\lambda_k^h, P_h u_k, P_h u_k) \to \lambda_k - 2\lambda_k + \lambda_k = 0$$

при $h = h'' \to 0$. Здесь было учтено, что

$$a(\lambda_k^h, u_k^h, u_k^h) = \lambda_k^h \to \lambda_k,$$

$$a(\lambda_k^h, u_k^h, P_h u_k) \to a(\lambda_k, u_k, u_k) = \lambda_k,$$

$$a(\lambda_k^h, P_h u_k, P_h u_k) \to a(\lambda_k, u_k, u_k) = \lambda_k$$

при $h = h'' \to 0$. Следовательно, получим

$$\|u_k^h - u_k\| \leqslant \|u_k^h - P_h u_k\| + \|u_k - P_h u_k\| \to 0$$

при $h = h'' \to 0$.

2) Пусть λ_k – простое собственное значение, u_k – нормированный собственный элемент, отвечающий λ_k, $b(\lambda_k, u_k, u_k) = 1$, $k \geqslant 1$, последовательность u_k^h при $h = h' \to 0$ сходится в V к собственному элементу, отвечающему собственному значению λ_k. Тогда $u_k^h \to u_k$ в V при $h = h' \to 0$ или $u_k^h \to -u_k$ в V при $h = h' \to 0$.

Выберем знаки собственных элементов согласно условию

$$b(\lambda_k^h, u_k^h, P_h u_k) > 0.$$

Докажем, что $u_k^h \to u_k$ в V при $h = h' \to 0$. Предположим противное, то есть $u_k^h \to -u_k$ в V при $h = h' \to 0$. Тогда получим

$$b(\lambda_k^h, u_k^h, P_h u_k) \to -b(\lambda_k, u_k, u_k) = -1$$

при $h = h' \to 0$, что противоречит предположению выбора знаков собственных элементов $b(\lambda_k^h, u_k^h, P_h u_k) > 0$.

Составим последовательность $h' \to 0$, удовлетворяющую соотношению

$$\|u_k^h - u_k\| \geqslant c$$

при $h = h' \to 0$. Тогда, согласно пункту 1 доказательства, существует подпоследовательность $h'' \to 0$ такая, что $\|u_k^h - u_k\| \to 0$ при $h = h'' \to 0$. Но это противоречит предыдущему неравенству.

Таким образом, для любой последовательности $h' \to 0$ имеет место сходимость $u_k^h \to u_k$ в V при $h = h' \to 0$, то есть $u_k^h \to u_k$ в V при $h \to 0$. Теорема доказана.

Теорема 6 *Имеет место сходимость* $\vartheta(U_k, U_k^h) \to 0$ *при* $h \to 0$.

Доказательство. Чтобы доказать сходимость $\vartheta(U_k, U_k^h) \to 0$ при $h \to 0$, предположим противное, то есть существует последовательность $h = h' \to 0$ такая, что

$$\vartheta(U_k, U_k^h) > c,$$

где c – положительная постоянная, не зависящая от h.

Выберем подпоследовательность $h'' \to 0$ так, чтобы $y_i^h \to u_i$ в V при $h = h'' \to 0$, $i = k, k+1, \ldots, k+s-1$. Тогда для этой подпоследовательности имеет место сходимость

$$\vartheta(U_k, U_k^h) = \sup_{u \in U_k \setminus \{0\}} \inf_{u^h \in U_k^h} \frac{\|u - u^h\|}{\|u\|} \leqslant \sup_{u \in U_k \setminus \{0\}} \frac{\|u - v^h\|}{\|u\|} \to 0$$

при $h = h'' \to 0$, где элемент v^h из U_k^h определяется по правилу

$$v^h = \sum_{i=k}^{k+s-1} b(\lambda_k^h, P_h u, y_i^h) y_i^h.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. Теорема доказана.

7. Исследование погрешности.

Пусть λ_k – собственное значение задачи (1) кратности s такое, что

$$\lambda_{k-1} < \lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{k+s-1} < \lambda_{k+s},$$

где $\lambda_0 = 0$, $k \geqslant 1$, $U_k = U(\lambda_k)$ – собственное подпространство, отвечающее λ_k, $\dim U_k = s$, $U_k^h = \operatorname{span}\{y_k^h, y_{k+1}^h, \ldots, y_{k+s-1}^h\}$, y_i^h, $i = k, k+1, \ldots, k+s-1$ – собственные элементы приближенной схемы (4). Положим

$$\varepsilon^h = \sup_{u \in U_k, \|u\|=1} \varepsilon_h(u),$$

$$\delta^h = \alpha(\lambda_k, \lambda_k^h) + \beta(\lambda_k, \lambda_k^h).$$

Теорема 7 *Для достаточно малых h выполняется оценка погрешности*

$$\vartheta(U_k, U_k^h) \leqslant c\,(\varepsilon^h + \delta^h),$$

где c – постоянная, не зависящая от h.

Доказательство. Положим $\beta_i^h = b(\lambda_k^h, P_h u, y_i^h)$, $i = 1, 2, \ldots, N_h$, где y_i^h, $i = 1, 2, \ldots, N_h$ – собственные элементы задачи (4), $u \in U_k$, $\|u\| = 1$. Поскольку собственные элементы y_i^h, $i = 1, 2, \ldots, N_h$ схемы (4) образуют ортонормированный базис в пространстве V_h, то элемент $P_h u \in V_h$ можно представить в виде

$$P_h u = Q_k^h u + v_k^h + w_k^h,$$

где

$$Q_k^h u = \sum_{i=k}^{k+s-1} \beta_i^h y_i^h, \quad v_k^h = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i^h y_i^h, \quad w_k^h = \sum_{i=k+s}^{N_h} \beta_i^h y_i^h.$$

Здесь, как и выше, используется соглашение: для $n < m$ сумма $\sum\limits_{i=m}^{n}$ равна нулю.

Из сходимости $\lambda_i^h \to \lambda_i$ при $h \to 0$, $i = 1, 2, \ldots, k+s$ вытекает, что для достаточно малых h выполняются неравенства $\lambda_k - \lambda_{k-1}^h \geqslant c$, $\lambda_{k+s}^h - \lambda_k \geqslant c$, где $k \geqslant 1$, $\lambda_0^h = 0$.

Положим

$$\zeta_h(u) = \sup_{v^h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{|a(\lambda_k^h, P_h u, v^h) - \lambda_k b(\lambda_k^h, P_h u, v^h)|}{\|v^h\|}.$$

Выполняется оценка

$$\zeta_h(u) \leqslant c\,(\varepsilon^h + \delta^h).$$

Для $k \geqslant 1$ докажем оценку

$$\|v_k^h\| \leqslant c\,\zeta_h(u).$$

Эта оценка при $k = 1$ выполняется тривиально. Пусть $k \geqslant 2$. Тогда справедливы соотношения

$$a(\lambda_k^h, P_h u, v_k^h) = a(\lambda_k^h, v_k^h, v_k^h),$$

$$b(\lambda_k^h, P_h u, v_k^h) = b(\lambda_k^h, v_k^h, v_k^h),$$

$$a(\lambda_k^h, v_k^h, v_k^h) \leqslant \lambda_{k-1}^h b(\lambda_k^h, v_k^h, v_k^h).$$

Следовательно, получим

$$\|v_k^h\|\,\zeta_h(u) \geqslant -a(\lambda_k^h, P_h u, v_k^h) + \lambda_k b(\lambda_k^h, P_h u, v_k^h) =$$

$$= -a(\lambda_k^h, v_k^h, v_k^h) + \lambda_k b(\lambda_k^h, v_k^h, v_k^h) \geqslant$$

$$\geqslant (\lambda_k - \lambda_{k-1}^h) b(\lambda_k^h, v_k^h, v_k^h) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}^h}{\lambda_{k-1}^h}\, a(\lambda_k^h, v_k^h, v_k^h) \geqslant c^{-1}\,\|v_k^h\|^2, \quad k \geqslant 2.$$

Отсюда выводим требуемую оценку.

Для $k \geqslant 1$ докажем оценку

$$\|w_k^h\| \leqslant c\,\zeta_h(u).$$

Нетрудно проверить, что

$$a(\lambda_k^h, P_h u, w_k^h) = a(\lambda_k^h, w_k^h, w_k^h), \quad b(\lambda_k^h, P_h u, w_k^h) = b(\lambda_k^h, w_k^h, w_k^h),$$

$$a(\lambda_k^h, w_k^h, w_k^h) \geqslant \lambda_{k+s}^h b(\lambda_k^h, w_k^h, w_k^h).$$

Тогда приходим к соотношениям

$$\|w_k^h\|\,\zeta_h(u) \geqslant a(\lambda_k^h, P_h u, w_k^h) - \lambda_k b(\lambda_k^h, P_h u, w_k^h) =$$

$$= a(\lambda_k^h, w_k^h, w_k^h) + \lambda_k b(\lambda_k^h, w_k^h, w_k^h) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\lambda_{k+s}^h - \lambda_k}{\lambda_{k+s}^h}\, a(\lambda_k^h, w_k^h, w_k^h) \geqslant c^{-1}\, \|w_k^h\|^2, \quad k \geqslant 1.$$

Отсюда получим требуемую оценку.

Теперь, используя полученные выше оценки, выводим

$$\|P_h u - Q_k^h u\| \leqslant \|v_k^h\| + \|w_k^h\| \leqslant c\, \zeta_h(u) \leqslant c\,(\varepsilon^h + \delta^h)$$

при достаточно малых h. Следовательно,

$$\vartheta(P_h U_k, U_k^h) = \sup_{u \in U_k \setminus \{0\}} \frac{\|P_h u - P_k^h P_h u\|}{\|P_h u\|} \leqslant$$
$$\leqslant c \sup_{u \in U_k,\, \|u\|=1} \|P_h u - Q_k^h u\| \leqslant c \sup_{u \in U_k,\, \|u\|=1} \zeta_h(u) \leqslant c\,(\varepsilon^h + \delta^h).$$

где P_k^h – ортопроектор на U_k^h. Поэтому с помощью неравенства треугольника для раствора заключаем

$$\vartheta(U_k, U_k^h) \leqslant \vartheta(U_k, P_h U_k) + \vartheta(P_h U_k, U_k^h) \leqslant c\,(\varepsilon^h + \delta^h).$$

Теорема доказана.

Теорема 8 *Пусть u_k^h – собственный элемент приближенной схемы* (3), $b(\lambda_k^h, u_k^h, u_k^h) = 1$. *Тогда найдется собственный элемент $u = u(u_k^h) \in U_k$ задачи* (1) *такой, что для достаточно малых h справедлива оценка погрешности $\|u_k^h - u\| \leqslant c(\varepsilon^h + \delta^h)$, c – постоянная, не зависящая от h.*

Доказательство. Из теоремы 7 для $u = P_k u_k^h$, P_k – ортопроектор на U_k, при достаточно малых h получим требуемый результат

$$\frac{\|u_k^h - u\|}{\|u_k^h\|} = \frac{\|u_k^h - P_k u_k^h\|}{\|u_k^h\|} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{u^h \in U_k^h, \|u^h\|=1} \|u^h - P_k u^h\| = \vartheta(U_k, U_k^h) \leqslant c\,(\varepsilon^h + \delta^h),$$

где c – постоянная, не зависящая от h, $u_k^h = y_k^h \in U_k^h$, $\|u_k^h\| \leqslant c$. Теорема доказана.

Теорема 9 *Пусть $\delta^h = O(\varepsilon^h)$ при $h \to 0$. Тогда для достаточно малых h справедливы оценки погрешности $0 \leqslant \lambda_k^h - \lambda_k \leqslant c\,(\varepsilon^h)^2$, $u_k^h - u\| \leqslant c\,\varepsilon^h$, где c – постоянная, не зависящая от h, $b(\lambda_k^h, u_k^h, u_k^h) = 1$, $u = u(u_k^h) \in U_k$.*

Доказательство. Результат вытекает из теорем 4 и 8.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда Гумбольдта (Alexander von Humboldt Foundation) и Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 11-01-00864, 12-01-97026, 13-01-00908.

Список литературы

[1] *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 350 с.

[2] *Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Кашапов Н.Ф.* Высокочастотная плазменно-струйная обработка материалов при пониженных давлениях. Теория и практика применения. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2000. – 348 с.

[3] *Гулин А.В., Крегжде А.В.* Разностные схемы для некоторых нелинейных спектральных задач // Препринт № 153. – М.: ИПМ АН СССР, 1981. – 28 с.

[4] *Крегжде А.В.* О разностных схемах для нелинейной задачи Штурма-Лиувилля//Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 7. – С. 1280–1284.

[5] *Соловьёв С.И.* Нелинейные задачи на собственные значения. Приближенные методы. – LAP Lambert Academic Publishing, 2011. – 256 с.

[6] *Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н.* Моделирование высокочастотного емкостного разряда при больших межэлектродных расстояниях. I. Постановка задачи // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 2. – С. 123–130.

[7] *Желтухин В.С., Соловьёв С.И., Соловьёв П.С., Чебакова В.Ю.* Вычисление минимального собственного значения нелинейной задачи Штурма - Лиувилля // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 3. – С. 91–104.