КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра математической статистики

И. А. КАРЕЕВ

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Учебно-методическое пособие

Казань — 2016

Принято на заседании кафедры математической статистики
Протокол № 8 от 6 апреля 2016 года

Рецензенты:
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математической статистики КФУ **И. Н. Володин**.

Кареев И. А
Лекции по теории случайных процессов: учебно-методическое пособие — Казань: Казан. ун-т, 2016. — 83 с.

В учебном пособии достаточно кратко (но со вкусом) излагаются основные понятия теории случайных процессов. Приведены характеристики основных классов случайных процессов, приведены их свойства.

Предназначено для студентов физико-математических специальностей университетов.

Содержание

Литература

1. *Боровков А.А.* **Теория вероятностей: учебное пособие для вузов.** – М.: Наука, 1986.

2. *Вентцель А.Д.* **Курс теории случайных процессов: учебное пособие для студентов механико-матемaтематических факультетов университетов.** – М.: Наука, 1975.

3. *Гихман И.И.* **Введение в теорию случайных процессов: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений** / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1977.

4. *Ширяев А.Н.* **Вероятность–1.** – М.: Изд-во МЦНМО, 2007.

5. *Ширяев А.Н.* **Вероятность–2.** – М.: Изд-во МЦНМО, 2007.

1 Введение

В этой главе вводятся основные понятия, связанные со случайными процессами, а также приводятся примеры некоторых их разновидностей.

1.1 Определение понятия случайного процесса и случайной функции

Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ — некоторое вероятностное пространство, и $T \subseteq \mathbb{R}$. Будем называть T *областью определения* процесса.

В широком смысле под *случайным процессом* ξ понимают некоторое семейство случайных величин $\{\xi(t)\}_{t\in T}$, определённых на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Индексирующий параметр $t \in T$ часто интерпретируют как *время*. Мы будем рассматривать лишь случайные процессы, принимающие значения в измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, так что $\xi(t)\colon \Omega \to \mathcal{E}$ для любого $t \in T$, где $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}$ — множество возможных значений процесса ξ. При фиксированном элементарном исходе $\omega \in \Omega$ семейство $\{\xi(t)\}_{t\in T}$ можно рассматривать как неслучайную функцию переменной t называемую *траекторией* или *выборочным значением* процесса.

Дадим альтернативное определение, рассматривающее случайный процесс как измеримое отображение из вероятностного пространство на пространство траекторий. В такой формулировке процесс выступает в качестве *случайной функции* от *аргумента* $t \in T$.

Пусть χ — множество функций $x(t)$ с областью определения $t \in T$ и областью значений в $\mathbb{R}$. χ будем называть *выборочным пространством* процесса. В качестве следующего шага определим σ-алгебру над χ.

Определение 1.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in T$ и $B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Множества вида

$$C = \{x \in \chi\colon x(t_1) \in B_1, \ldots, x(t_n) \in B_n\},$$

называются *цилиндрическими*.

Цилиндрическое множество представляет собой множество всех траекторий из пространства χ, которые пересекают B_1 в момент времени t_1, B_2 в момент времени t_2 и т.д. (см. рис. 1).

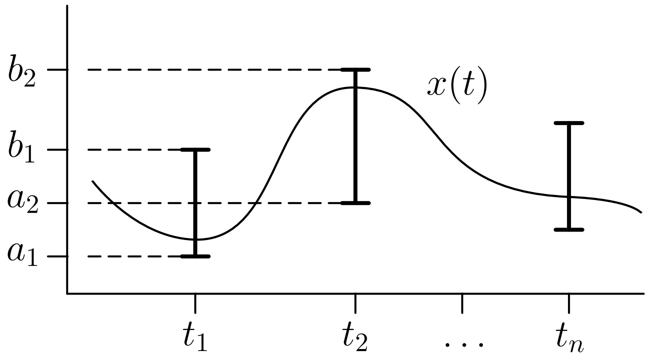


Рис. 1: Цилиндрическое множество с $B_i = [a_i, b_i]$ и пример входящей в него траектории $x(t)$

Семейство всех цилиндрических множеств над пространством χ порождает *цилиндрическую* σ-алгебру $\mathscr{B}_\chi$. χ и $\mathscr{B}_\chi$ образуют *выборочное измеримое пространство* $(\chi, \mathscr{B}_\chi)$ случайного процесса ξ. Вероятностные свойства процесса определяются вероятностью $\mathbb{P}_\xi$, заданной на $(\chi, \mathscr{B}_\chi)$.

Определение 1.2. *Случайным процессом* или *случайной функцией* ξ называется измеримое отображение вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ на выборочное пространство $(\chi, \mathscr{B}_\chi, \mathbb{P}_\xi)$.

Применение в определении случайной функции именно цилиндрической σ-алгебры связано с вопросом однозначного определения вероятности над пространством траекторий. Для случая цилиндрических σ-алгебр достаточно определить $\mathbb{P}_\xi$ согласованным образом лишь на семействе всех цилиндрических множеств, т.е. описать *конечномерное* распределение процесса ξ:

$$\mathbb{P}(\xi(t_1) \in B_1, \dots, \xi(t_n) \in B_n).$$

Тогда, согласно теореме Колмогорова, существует единственное продолжение вероятности на всю цилиндрическую σ-алгебру $\mathscr{B}_\chi$. Для случая более богатых σ-алгебр на множестве траекторий ξ общего подхода для задания вероятности нет. Заметим, что когда T счётно, то цилиндрической σ-алгебры $\mathscr{B}_\chi$ бывает достаточно для описания любого события. В случае же непрерывного T не всякое событие оказывается измеримым относительно $\mathscr{B}_\chi$. Подробнее этот вопрос будет затронут в главе 4.

Если T — дискретно, то ξ называют процессом с *дискретным временем.* Когда $T \subseteq \mathbb{Z}$, то случайный процесс ξ называют *случайной* *последовательностью* и его значение $\xi(t)$ обозначают как ξ_t. Если T — непрерывно, то, соответственно, ξ называется процессом с *непрерывным временем.*

В дальнейшем нами будут рассматриваться лишь T вида:

$$T \subseteq \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad T = [a, +\infty), \quad \text{или} \quad T = (-\infty, +\infty).$$

Напомним, что случайные процессы фактически являются функциями двух переменных $t \in T$ и $\omega \in \Omega$. В зависимости от рассматриваемой задачи, применяют разную запись для его значений. Например:

$$\xi(t, \omega), \quad \xi(t), \quad \xi_\omega(t).$$

Как и в случае случайных величин, принято отождествлять случайные процессы, которые слабо отличаются друг от друга. Основной мерой «неотличимости» процессов выступает понятие эквивалентности.

Определение 1.3. Процессы ξ и η называются *эквивалентными*, если для всех $t \in T$:

$$\mathbb{P}(\xi(t) \neq \eta(t)) = 0.$$

Обозначение: $\xi \sim \eta$.

Заметим, что свойства траекторий эквивалентных процессов могут довольно сильно различаться.

Пример 1.4. Пусть $T = [0, 1]$, $\xi(t) = 0$ для всех $t \in T$. Пусть $\tau \sim U(0, 1)$ и

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau; \\ 1, & t = \tau. \end{cases}$$

Тогда $\xi \sim \eta$ (см. рис. 2). Тем не менее, траектория ξ всегда непрерывна, а η — всегда разрывна в точке $t = \tau$.

Замечание 1.5. Стохастически эквивалентные процессы имеют одинаковые конечномерные распределения. Обратное, в общем случае, неверно.

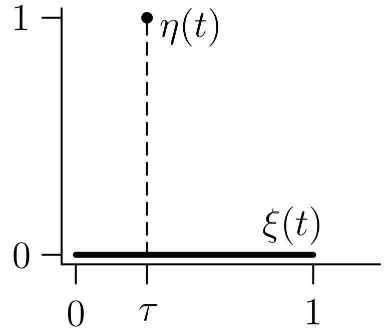


Рис. 2: Траектории ξ и η (см. пример 1.4).

Доказательство. Пусть случайные процессы $\xi \sim \eta$, и $t_1, \dots, t_n \in T$, $B_1, \dots, B_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Т.к. $\mathbb{P}(\xi(t_i) = \eta(t_i)) = 1$, то

$$\mathbb{P}(\xi(t_1) \in B_1, \dots, \xi(t_n) \in B_n) =$$
$$= \mathbb{P}\Big(\bigcap_i \{\xi(t_i) \in B_i\} \cap \bigcap_i \{\xi(t_i) = \eta(t_i)\}\Big) =$$
$$= \mathbb{P}\Big(\bigcap_i \{\eta(t_i) \in B_i\} \cap \bigcap_i \{\xi(t_i) = \eta(t_i)\}\Big) =$$
$$= \mathbb{P}(\xi(t_1) \in B_1, \dots, \xi(t_n) \in B_n). \qquad \blacksquare$$

Заметим, что здесь представлено достаточно узкое определение случайного процесса в удобном нам виде. В более общей постановке множество T и множество значений процесса могут иметь произвольный вид; в качестве σ-алгебры выборочного пространства $\mathscr{B}_\chi$ может быть выбрана произвольная σ-алгебра, содержащая все цилиндрические множества (при этом, однако, могут возникнуть трудности при определении распределения процессов на таком пространстве, т.к. теорема Колмогорова позволяет однозначно определить процесс лишь на цилиндрической σ-алгебре).

1.2 Основные классы случайных процессов

Приведём примеры некоторых часто рассматриваемых семейств случайных процессов. Для простоты изложение здесь будут представлены определения этих семейств в несколько упрощённых формах.

1. Гауссовские случайные процессы. Случайный процесс ξ называется *гауссовским*, если все его конечномерные распределения определены как многомерно-нормальные:

$$(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma).$$

Пример гауссовского процесса – винеровский процесс.

2. Стационарные в узком смысле процессы. ξ называется *стационарным в узком смысле*, если его конечномерные распределения инвариантны относительно сдвига времени, т.е. для любых $t_1, \dots, t_n \in T$ и $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})^n$

$$\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_n}(B) = \mathbb{P}_{t_1+h,\dots,t_n+h}(B).$$

3. Стационарные в широком смысле процессы. ξ называется *стационарным в широком смысле* процессом, если $\mathbb{E}|\xi(t)|^2 < \infty$ для любого $t \in T$ (существует конечный второй момент при каждом фиксированном t) и его среднее и ковариация инвариантны относительно сдвига по времени, т.е. для любых $t, s \in T$:

$$\begin{cases} \mathbb{E}\xi(t) = \mathbb{E}\xi(t+h), \\ \operatorname{Cov}\xi(t)\,\xi(s) = \operatorname{Cov}\xi(t+h)\,\xi(s+h). \end{cases}$$

Замечание 1.6. Если стационарный в узком смысле процесс ξ имеет второй момент, то он является стационарным в широком смысле.

Если процесс ξ — гауссовский стационарный в широком смысле процесс, то он является и стационарным в узком смысле.

4. Процессы с независимыми приращениями. $\xi(t)$ называется *процессом с независимыми приращениями*, если для любого набора $t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n \in T$ случайные величины

$$\xi(t_0), \quad \xi(t_1) - \xi(t_0), \quad \dots, \quad \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$$

независимы в совокупности.

5. Процессы с ортогональными приращениями. $\xi(t)$ называется *процессом с ортогональными приращениями*, если для любого набора $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4 \in T$

$$\operatorname{Cov}\big(\xi(t_4) - \xi(t_3)\big)\big(\xi(t_2) - \xi(t_1)\big) = 0.$$

Замечание 1.7. Если процесс с независимыми приращениями ξ имеет второй момент, т.е. $\mathbb{E}|\xi(t)|^2 < \infty$ для любого $t \in T$, то он является и процессом с ортогональными приращениями.

Если ξ — гауссовский процесс с ортогональными приращениями, то он является и процессом с независимыми приращениями.

6. Мартингалы.

Процесс ξ называется *мартингалом*, если для $l \leqslant t \in T$

$$\mathbb{P}(\xi_t \mid \{\xi_s, \ s \leqslant l\}) \overset{\text{п.н.}}{=} \xi_l.$$

Это мартингальное свойство можно интерпретировать следующим образом: наилучшим среднеквадратичным прогнозом будущего значения мартингала является его текущее значение. Мартингалом является, например, винеровский процесс.

2 Марковский момент

2.1 Определение и основные свойства

Определение 2.1. Семейство σ-алгебр $\{\mathscr{A}_t\}_{t\in T}$ такое, что $\mathscr{A}_t \subseteq \mathscr{A}$ и оно монотонно возрастает относительно t:

$$\mathscr{A}_s \subseteq \mathscr{A}_t \quad \text{при} \quad s \leqslant t,$$

называется *фильтрацией.*

Семейство $\mathscr{A}_t$ интерпретируется как множество всех событий, которые могут произойти к моменту времени t.

Обозначим через $\mathscr{A}_\infty$ σ-алгебру, порождённую семейством $\{\mathscr{A}_t\}$:

$$\mathscr{A}_\infty = \sigma\Big(\bigcup_{t\in T} \mathscr{A}_t\Big).$$

Пусть ξ — некоторый случайный процесс. Порождаемую ξ фильтрацию будем обозначать как

$$\mathscr{A}_t^\xi = \sigma(\xi_s,\ s \leqslant t).$$

Если $\xi = (\xi_1, \dots)$ — случайная последовательность, то $T = \mathbb{N}$ и

$$\mathscr{A}_t^\xi = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_t).$$

Определение 2.2. Случайная величина $\tau = \tau(\omega)$, принимающая значения на множестве $T \cup \{+\infty\}$, называется *марковским моментом* относительно фильтрации $\{\mathscr{A}_t\}$, если для всех $t \in T$:

$$\{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{A}_t.$$

Марковский момент τ можно интерпретировать как момент наступления некоторого событие, о факте возникновении которого можно узнать, не зная того, что будет происходить после этого события. Марковские моменты называют также *случайными величинами, не зависящими от будущего.*

Определение 2.3. Марковский момент τ, с вероятностью 1 принимающий лишь значения из T:

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1,$$

называют *моментом остановки.*

Пример 2.4. Пусть $s \in T$ — некоторый фиксированный момент времени. Тогда $\tau = s$ — марковский момент.

Действительно,

$$\{\tau \leqslant t\} = \{s \leqslant t\} = \begin{cases} \varnothing, & t < s; \\ \Omega, & t \geqslant s. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{A}_t.$$

Пример 2.5 (*момент первого достижения множества*). Пусть ξ — некоторый случайный процесс, $G \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Определим случайную величину

$$\tau = \min(\{t \in T \colon \xi(t) \in G\} \cup \{+\infty\}).$$

Тогда τ — марковский момент относительно фильтрации $\{\mathscr{A}_t^\xi\}$.

Покажем это для дискретного случая, когда ξ представляет собой случайную последовательность. Тогда

$$\{\tau \leqslant m\} = \bigcup_{t=1}^{m} \{\xi_t \in G\} \in \mathscr{A}_m^\xi,$$

т.к. $\{\xi_t \in G\} \in \mathscr{A}_t^\xi$ и $\mathscr{A}_t^\xi \subseteq \mathscr{A}_m^\xi$.

Заметим, что, например, момент последнего достижения множества G в общем случае не является марковским моментом.

Пример 2.6. (момент n-го достижения множества) Пусть даны случайная последовательность $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ и последовательность множеств $G_1, G_2, \dots \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Определим случайную величину

$$\tau_1 = \min\big(\{k \colon \xi_k \in G_1\} \cup \{+\infty\}\big),$$

а для $n \geqslant 2$

$$\tau_n = \min\big(\{k > \tau_{n-1} \colon \xi_k \in G_n\} \cup \{+\infty\}\big).$$

Случайные величины $\tau_1, \tau_2, \dots$ являются марковскими моментами относительно фильтрации $\{\mathscr{A}_t^\xi\}$. Для того, чтобы показать это, нужно доказать включение

$$\{\tau_m \leqslant t\} \in \mathscr{A}_t^\xi.$$

Произведём доказательство по индукции. Для τ_1

$$\{\tau_1 \leqslant t\} = \bigcup_{i=1}^{t} \{\xi_i \in G_1\} \in \mathscr{A}_t^\xi.$$

При $n \geqslant 2$ и $t < n$, очевидно, $\{\tau_n \leqslant t\} = \varnothing \in \mathscr{A}_t^\xi$. Для $n \geqslant 2$ и $t \geqslant n$:

$$\{\tau_n \leqslant t\} = \bigcup_{i=n}^{t} \{\xi_i \in G_n\} \cap \{\tau_{n-1} \leqslant i-1\} \in \mathscr{A}_t^\xi,$$

т.к. $\{\xi_i \in G_n\} \in \mathscr{A}_i^\xi$, а $\{\tau_{n-1} \leqslant i-1\} \in \mathscr{A}_{i-1}^\xi$ по предположению индукции.

Заметим, что при $G_1 = G_2 = \dots = G$ марковский момент τ_n представляет собой моментом n-ого достижения процессом ξ множества G.

Утверждение 2.7 (***Свойства марковских моментов***).
1) Если τ и σ — марковские моменты относительно некоторой фильтрации $\{\mathscr{A}_t\}$, то и

$$\max\{\tau, \sigma\} \quad \text{и} \quad \min\{\tau, \sigma\}$$

являются марковскими моментами относительно $\{\mathscr{A}_t\}$.

2) Если $\tau_1, \tau_2, \dots$ — последовательность марковских моментов такая, что при каждом фиксированном элементарном исходе $\omega \in \Omega$

$$\tau_1(\omega) \leqslant \tau_2(\omega) \leqslant \dots,$$

то случайная величина

$$\tau = \lim_{k \to \infty} \tau_k$$

является марковским моментом.

Доказательство.

1) Т.к. алгебры замкнуты относительно операций объединения и пересечения, то

$$\big\{\max\{\tau, \sigma\} \leqslant t\big\} = \{\tau \leqslant t\} \cap \{\sigma \leqslant t\} \in \mathscr{A}_t,$$
$$\big\{\min\{\tau, \sigma\} \leqslant t\big\} = \{\tau \leqslant t\} \cup \{\sigma \leqslant t\} \in \mathscr{A}_t.$$

2) В силу условия монотонности $\{\tau_n\}$ при фиксированном $t \in T$:

$$\{\tau_1 \leqslant t\} \supseteq \{\tau_2 \leqslant t\} \supseteq \dots$$

Поэтому

$$\{\tau \leqslant t\} = \{\lim_{k\to\infty} \tau_k \leqslant t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{\tau_k \leqslant t\} \in \mathscr{A}_t \qquad \blacksquare$$

2.2 Связанные с марковскими моментами σ-алгебры

Определение 2.8. $\mathscr{A}_\tau$ называется связанной с марковским моментом τ σ-алгеброй, если она содержит все множества A такие, что:

1) $A \in \mathscr{A}_\infty = \sigma\big(\bigcup_{t\in T} \mathscr{A}_t\big)$,
2) $A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{A}_t$ для любого $t \in T$.

Утверждение 2.9. *$\mathscr{A}_\tau$ образует σ-алгебру.*

Доказательство. Покажем, что $\mathscr{A}_\tau$ является σ-алгеброй по определению, т.е. обладает следующими свойствами:

1) Покажем, что $\Omega \in \mathscr{A}_\tau$. Т.к. $\Omega \in \mathscr{A}_\infty$ и $\Omega \cap \{\tau \leqslant t\} = \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{A}_t$, то $\Omega \in \mathscr{A}_\tau$.

2) Покажем, что $A \in \mathscr{A}_\tau \implies A^{\mathrm{c}} \in \mathscr{A}_\tau$. Пусть $A \in \mathscr{A}_\tau$. Т.к. $\mathscr{A}_\infty$ является σ-алгеброй и $A \in \mathscr{A}_\infty$, то $A^{\mathrm{c}} \in \mathscr{A}_\infty$. Далее,

$$A^{\mathrm{c}} \cap \{\tau \leqslant t\} = (\Omega \setminus A) \cap \{\tau \leqslant t\} =$$

$$= \Omega \cap \{\tau \leqslant t\} \setminus A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{A}_t.$$

3) Покажем, что $A_1, A_2, \ldots \mathscr{A}_\tau \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}_\tau$. Пусть $A_1, A_2, \ldots \mathscr{A}_\tau$. Тогда $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}_\infty$ и

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cap \{\tau \leqslant t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap \{\tau \leqslant t\}) \in \mathscr{A}_t.$$

Следовательно, $\mathscr{A}_\tau$ является σ-алгеброй по определению. ■

Утверждение 2.10. *Марковский момент τ измерим относительно $\mathscr{A}_\tau$.*

Доказательство. Нужно показать, что $\{\tau \leqslant l\} \in \mathscr{A}_\tau$ для любого $l \in T$. Покажем это по определению $\mathscr{A}_\tau$:

1) $\{\tau \leqslant l\} \in \mathscr{A}_l \subseteq \mathscr{A}_\infty$.

2) $\{\tau \leqslant l\} \cap \{\tau \leqslant t\} = \big\{\tau \leqslant \min\{l, t\}\big\} \in \mathscr{A}_{\min\{l,t\}} \subseteq \mathscr{A}_t$. ■

Утверждение 2.11. *Если τ и σ — марковсие моменты, и $\tau(\omega) \leqslant \sigma(\omega)$ для любого элементарного исхода $\omega \in \Omega$, то $\mathscr{A}_\tau \subseteq \mathscr{A}_\sigma$.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathscr{A}_\tau$. Покажем, что $A \in \mathscr{A}_\sigma$:

1) $A \in \mathscr{A}_\infty$.

2) Т.к. $\tau \leqslant \sigma$, то $\{\tau \leqslant t\} \subseteq \{\sigma \leqslant t\}$. Следовательно,

$$A \cap \{\sigma \leqslant t\} = (A \cap \{\tau \leqslant t\}) \cap \{\sigma \leqslant t\} \in \mathscr{A}_t,$$

т.к. $A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{A}_t$. Значит $A \in \mathscr{A}_\sigma$ по определению. ∎

3 Марковские цепи

3.1 Марковские процессы

Определение 3.1. ξ называется *марковским процессом*, если его «будущее» значение зависят от «прошлого» только через «настоящее», т.е. выполняется *марковское свойство*:

$$\mathbb{P}\{\xi(t+d) \in B \mid \xi(s),\ s \leqslant t\} \stackrel{\text{п.н.}}{=} \mathbb{P}\{\xi(t+d) \in B \mid \xi(t)\}$$

для любых $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),\ \ t \in T \quad$ и $\quad d > 0.$

Марковское свойство выполняется для широкого класса процессов. Например, винеровский и пуассоновский процессы — это марковские процессы.

Марковский процесс с $T \subseteq \mathbb{Z}$ называют *марковской последовательностью*; если, к тому же, не более чем счётно и множество возможных значений $\mathcal{E}$ процесса, то ξ называют *марковской цепью.*

В зависимости от мощности множества T и множества значений $\mathcal{E}$ этот тип процессов могут именовать различными способами. Часто пользуются следующим разделением: если множество T непрерывно, то ξ называют *марковским процессом*; если T счётно - то *марковской последовательностью*; если счётны и T, и $\mathcal{E}$, то ξ называют *марковской цепью.*

3.2 Определение и основные свойства марковских последовательностей

Пусть $T = \mathbb{Z}^+$, так что $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots)$ — случайная последовательность.

Определение 3.2. Случайная последовательность $\xi = \{\xi_n\}$ называется *марковской последовательностью*, если всех $n \geqslant 0$ и $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}\{\xi_{n+1} \in B \mid \xi_n, \xi_{n-1}, \dots\} \stackrel{\text{п.н.}}{=} \mathbb{P}\{\xi_{n+1} \in B \mid \xi_n\}. \tag{1}$$

В силу свойства (1) видно, что при исследовании марковских последовательностей особую роль играют переходные вероятности на один шаг вперёд:

$$\mathbb{P}\{\xi_{n+1} \in B \mid \xi_n = x\}.$$

Мы будем рассматривать лишь *однородные* марковские последовательности, для которых значение переходной вероятности не зависит от n:

$$P(x;B) = \mathbb{P}\{\xi_{n+1} \in B \bigm| \xi_n = x\} = \mathbb{P}\{\xi_1 \in B \bigm| \xi_0 = x\}. \qquad (2)$$

Распределения первого элемента последовательности ξ_0 называют *начальным распределением* процесса:

$$\pi(B) = \mathbb{P}(\xi_0 \in B).$$

Набор функций (π, P) полностью определяет вероятностные свойства однородной марковской последовательности ξ, поскольку все конечномерные распределения выражаются через них. Например, для $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})^{n+1}$

$$\mathbb{P}\{(\xi_0,\dots,\xi_n) \in B\} = \int_{\mathbb{R}} \pi(dx_0) \int_{\mathbb{R}} P(x_0;dx_1)\dots$$
$$\dots \int_{\mathbb{R}} I_A(x_0,\dots,x_n) P(x_{n-1},dx_n).$$

Утверждение 3.3. *Пусть $\pi(B)$ — вероятность на $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$, $P(x;B)$ — функция, измеримая по x относительно $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ при фиксированном $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ и являющаяся вероятностной мерой по B при фиксированном x.*

Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ и однородная марковская последовательность $\xi = (\xi_0,\xi_1,\dots)$ на нём такая, что начальное распределение ξ совпадает с π, а переходная вероятность совпадает с P:

$$\mathbb{P}(\xi_0 \in B) = \pi(B),$$

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} \in B | \xi_n = x) = P(x;B) \quad \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Примем в качестве $(\Omega,\mathscr{A})$ измеримое пространство числовых последовательностей $(\mathbb{R}^\infty,\mathscr{B}(\mathbb{R}^\infty))$. Тогда элементарные исходы $\omega \in \Omega$ представимы в виде:

$$\omega = (x_0,x_1,x_2,\dots).$$

Определим вероятность на этом пространстве. Положим для $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{n+1})$:

$$\mathbb{P}(\omega = (x_0,x_1,\dots)\colon (x_0,\dots,x_n) \in B) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \pi(dx_0) \int_{\mathbb{R}} P(x_0; dx_1) \dots \int_{\mathbb{R}} P(x_{n-1}; dx_n) I_A(x_0, \dots, x_n).$$

Легко видеть, что определённая таким образом вероятность удовлетворяет условиям согласованности и однозначно продолжается на всю σ-алгебре $\mathscr{B}(\mathbb{R}^\infty)$.

Определим случайную последовательность $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots)$ на $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ по правилу:

$$\xi_n(\omega) = x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

т.е. в качестве значения процесса ξ в момент времени n берётся n-ая координата элементарного исхода ω.

Покажем, что процесс ξ является марковским, т.е. для любого множества $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ выполняется равенство:

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} \in B \mid \xi_n) \overset{\text{п.н.}}{=} \mathbb{P}(\xi_{n+1} \in B \mid \xi_0, \dots, \xi_n)$$

По определению условной вероятности:

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} \in B \mid \xi_0, \dots, \xi_n) = \mathbb{E}(I_{\{\xi_{n+1} \in B\}} \mid \xi_0, \dots, \xi_n).$$

Следовательно, для любого множества $A \in \sigma(\xi_0, \dots, \xi_n)$

$$\int_A \mathbb{P}(\xi_{n+1} \in B \mid \xi_0, \dots, \xi_n) d\mathbb{P} =$$

$$= \mathbb{E}\big(I_A \mathbb{E}(I_{\{\xi_{n+1} \in B\}} \mid \xi_0, \dots, \xi_n)\big) =$$

(так как I_A измерима по $\sigma(\xi_0, \dots, \xi_n)$, то I_A можно занести под знак внутреннего условного $\mathbb{E}$)

$$= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(I_{\{\xi_{n+1} \in B\}} I_A \mid \xi_0, \dots, \xi_n)\big) =$$

($\mathbb{E}$ от условного $\mathbb{E}$ даёт безусловное $\mathbb{E}$)

$$= \mathbb{E}(I_{\{\xi_{n+1} \in B\}} I_A) = \mathbb{P}(\xi_{n+1} \in B, (\xi_0, \dots, \xi_n) \in A) =$$

(по определению $\mathbb{P}$ в нашем вероятностном пространстве)

$$= \int \pi(dx_0) \int P(x_0; dx_1) \dots$$

$$\dots \int P(x_{n-1}; dx_n) \int P(x_n; dx_{n+1}) I_B(x_{n+1}) I_A(x_0, \dots, x_n) =$$

(т.к. I_A не зависит от x_n, то его можно вынести за знак внутреннего интеграла)

$$= \int \pi(dx_0) \int P(x_0; dx_1) \dots$$

$$\dots \int P(x_{n-1}; dx_n) I_A(x_0, \dots, x_n) \int P(x_n; dx_{n+1}) I_B(x_{n+1}) =$$

($\int P(x_n; dx_{n+1}) I_B(x_{n+1}) = P(x_n; B)$)

$$= \int \pi(dx_0) \int P(x_0; dx_1) \int P(x_{n-1}; dx_n) I_A(x_0, \dots, x_n) P(x_n; B) =$$

$$= \int_A P(\xi_n; B) d\mathbb{P}.$$

Итак,

$$\int_A \mathbb{P}(\xi_{n+1} \in B | \xi_0, \dots, \xi_n) d\mathbb{P} = \int_A P(\xi_n; B) d\mathbb{P},$$

что, в силу произвольности $A \in \sigma(\xi_0, \dots, \xi_n)$ и измеримости случайных величин $\mathbb{P}(\xi_{n+1} \in B | \xi_0, \dots, \xi_n)$ и $P(\xi_n; B)$ по $\sigma(\xi_0, \dots, \xi_n)$, означает:

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} \in B \mid \xi_0, \dots, \xi_n) \overset{\text{п.н.}}{=} P(\xi_n; B). \tag{3}$$

Производя аналогичные преобразования, получим

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} \in B \mid \xi_n) \overset{\text{п.н.}}{=} \mathbb{P}(\xi_n; B). \tag{4}$$

Объединяя (3) и (4), приходим к марковскому свойству для ξ:

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} \in B \mid \xi_0, \dots, \xi_n) \overset{\text{п.н.}}{=} \mathbb{P}(\xi_{n+1} \in B \mid \xi_n),$$

т.е. ξ — марковская последовательность.

Однородность полученной марковской цепи:

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} \in B | \xi_n) \overset{\text{п.н.}}{=} \mathbb{P}(\xi_1 \in B | \xi_0) \quad (n = 0, 1, \dots),$$

можно доказать аналогично (3) исходя из свойств условного математического ожидания. ■

Последовательности, построенные исходя из заданных начального распределения π и переходной вероятности P, называют марковскими последовательностями, *порождёнными* парой (π, P).

При счётном множестве значений $\mathcal{E}$ вместо переходной вероятности, заданной в форме (2), обычно рассматривают эквивалентную ей матрицу переходных вероятностей $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{E}}$, где

$$p_{ij} = P(i; \{j\}) = \mathbb{P}\{\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i\}$$

определяет вероятность перейти за один шаг из состояния i в состояние j.

В дальнейшем мы ограничемся рассмотрением лишь марковских цепей, так что множество возможных значений $\mathcal{E}$ будет всегда счётным. Будем считать без ограничения общности, что $\mathcal{E} = \mathbb{N}$.

3.3 Переходная вероятность за n шагов. Уравнение Колмогорова–Чэпмена

Введём обозначение для матрицы переходных вероятностей на n шагов:

$$P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})_{i,j\in\mathcal{E}},$$

где

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(\xi_n = j \mid \xi_0 = i).$$

Заметим, что для однородных цепей

$$P^{(n)} = P^n,$$

поэтому возможно представление

$$P^{(k+l)} = P^{(k)}P^{(l)}.$$

Следовательно, для любых $i, j \in \mathcal{E}$ справедливо равенство

$$p_{ij}^{(k+l)} = \sum_{y\in\mathcal{E}} p_{iy}^{(k)} p_{yj}^{(l)}. \tag{5}$$

Это равенство называют *уравнением Колмогорова–Чэпмена.* Оно является важным инструментом при исследовании вероятностных свойств марковских цепей и будет нами неоднократно явно и неявно применяться.

Заметим, что уравнение Колмогорова–Чэпмена в интегральной форме при выполнении некоторых дополнительных условий справедливо и для общего случая марковских процессов с непрерывным временем и несчётным $\mathcal{E}$.

3.4 Предельные, эргодические и стационарные распределения

Определение 3.4. Набор коэффициентов $\{\pi_i\}_{i\in\mathcal{E}}$ называется *стационарным распределением* марковской цепи ξ, если

$$\pi_i \geqslant 0, \quad \sum_{i\in\mathcal{E}} \pi_i = 1$$

и для любого $j \in \mathcal{E}$:

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathcal{E}} \pi_i p_{ij}.$$

Такое название для стационарных распределений следует из следующего его свойства. Возьмём в качестве начального распределения марковской цепи его стационарное распределение $\{\pi_i\}$. Тогда, согласно уравнению Колмогорова–Чэпмена (5):

$$\mathbb{P}(\xi_1 = i) = \sum_{j \in \mathcal{E}} \pi_j p_{ji} = \pi_i.$$

По индукции легко получить, что это равенство верно для любого n

$$\mathbb{P}(\xi_n = i) = \pi_i.$$

Получается, распределение такой марковской цепи не зависит от времени n, а значит однородная марковская цепь со стационарным распределением в качестве начального распределения является стационарной в узком смысле.

Определение 3.5. Набор коэффициентов $\{\pi_i\}_{i \in \mathcal{E}}$ такой, что

$$\pi_i \geqslant 0, \quad \sum_{i \in \mathcal{E}} \pi_i = 1,$$

образует *предельное распределение* марковской цепи ξ, если существуют не зависящие от j пределы $\lim_{n\to\infty} p_{ji}^{(n)}$ и

$$\lim_{n\to\infty} p_{ji}^{(n)} = \pi_i.$$

Если, к тому же, $\pi_i > 0$ для всех i, то $\{\pi_i\}$ называют *эргодическим распределением.*

Марковские процессы, у которых существует эргодическое распределение, называют *эргодическими.*

Основной вопрос, который мы будет изучать в дальнейшем — это предельные свойства марковских цепей. Для разрешения этого вопроса мы должны прежде всего произвести классификацию марковских цепей по свойствам их переходной вероятности.

3.5 Классификация состояний марковских цепей на классы сообщающихся состояний и циклические подклассы

Определение 3.6. Состояние j называется *достижимым* из i (обозначение: $i \to j$), если существует m такое, что:

$$p_{ij}^{(m)} > 0.$$

Состояния i и j называются *сообщающимися* (обозначение: $i \leftrightarrow j$), если $i \to j$ и $j \to i$.

Отношение $i \leftrightarrow j$ является симметричным, рефлексивным и транзитивным.

Определение 3.7. Состояние i называется *существенным*, если существует $m \geqslant 1$ такое, что:

$$p_{ii}^{(m)} > 0.$$

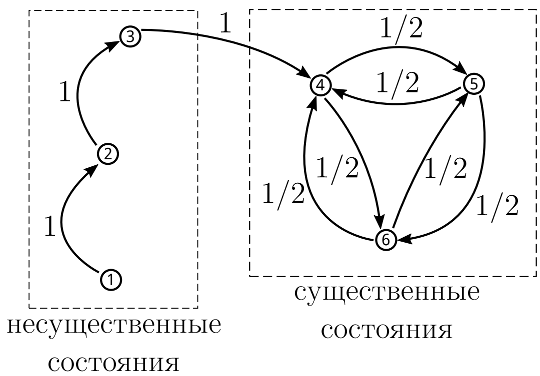


Рис. 3: Пример существенных и несущественных состояний марковской цепи.

См. рис. 3 для иллюстрации понятий несущественных состояний. Несущественные состояния могут быть исключены при исследовании предельных свойств марковских цепей, т.к. цепь, раз попав в несущественное состояние, более в него не возвращается. В связи с этим будем далее считать, что $\mathcal{E}$ содержит только существенные состояния.

Определение 3.8. Множество $E \subseteq \mathcal{E}$ называется *классом сообщающихся состояний* (или просто *классом*), если для любых

$i, j \in E$

$$i \leftrightarrow j,$$

и для любых $i \in E$ и $j \in \mathcal{E}$:

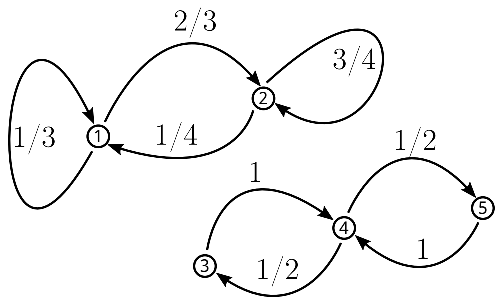
$$i \leftrightarrow j \quad \Longrightarrow \quad j \in E.$$

Классы сообщающихся состояний также называют *неразложимыми классами*. Цепь, множество существенных состояний которой состоит лишь из одного класса, называют *неразложимой* (или *неприводимой*).

Множество существенных состояний разбивается на конечное или счётное множество классов $E_1, E_2, \ldots$. При этом хотя переход между различными классами и возможен, но выйдя из одного класса, процесс в него более не вернётся.

Пример 3.9. Для иллюстрации рассмотрим цепь, состоящую из двух классов с матрицей переходных вероятностей:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$



В этой цепи присутствуют два класса:

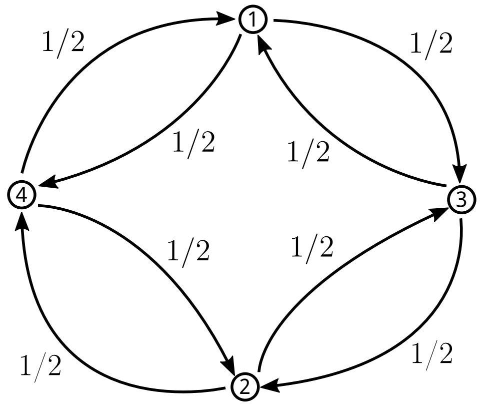
$$E_1 = \{1, 2\}, \quad E_2 = \{3, 4, 5\}.$$

3.5.1 Разбиение классов на циклические подклассы.

В некоторых случаях классы возможно поделить на *циклические подклассы*. Проиллюстрируем смысл понятия циклических подклассов следующим примером.

Пример 3.10. Рассмотрим марковскую цепь следующего вида:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\
2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\
3 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\
4 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0
\end{array}
$$



Видно, что множество состояний цепи $E = \{1, 2, 3, 4\}$ разбивается на два подкласса вида $C_0 = \{1, 2\}$ и $C_1 = \{3, 4\}$, обладающие свойством цикличности: за один шаг процесс из C_0 непременно переходит в C_1, а из C_1 — в C_0.

Пусть далее E — это некоторый фиксированный класс.

Определение 3.11. Состояние j имеет *период* $d(j)$, если:

1) $p_{jj}^{(n)} > 0$ только для $n = md(j)$, $m = 0, 1, 2, \dots$.

2) $d(j)$ есть наибольшее число, для которого выполняется 1).

Если $p_{jj}^{(n)} = 0$ при любом $n \geqslant 1$, то полагаем период $d(j) = 0$.

Утверждение 3.12. *Все состояния класса E имеют один и тот же период:*

$$d(i) = d(j) \quad \forall i, j \in E.$$

Доказательство. Пусть $i, j \in E$. Т.к. $i \leftrightarrow j$, то существуют k и l такие, что $p_{ij}^{(k)} > 0$, $p_{ji}^{(l)} > 0$ — мы можем перейти за k шагов из i в j, а потом за l шагов обратно. Поэтому, согласно уравнению Колмогорова–Чэпмена (5)

$$p_{ii}^{(k+l)} \geqslant p_{ij}^{(k)} p_{ji}^{(l)} > 0.$$

Следовательно, по определению периода состояния, $k + l$ должно делиться на $d(i)$, т.е. возможна запись вида:

$$(k + l) \bmod d(i) = 0.$$

Пусть $n > 0$ такое, что оно не делится на $d(i)$:

$$n \bmod d(i) \neq 0.$$

Тогда и

$$(n + k + l) \bmod d(i) \neq 0,$$

что по определению $d(i)$ это означает

$$p_{ii}^{(n+k+l)} = 0.$$

С другой стороны,

$$p_{ii}^{(n+k+l)} \geqslant p_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(l)}.$$

Получается $p_{jj}^{(n)} = 0$. Мы пришли к такому результату: если $p_{jj}^{(n)} > 0$, то n должно делится на $d(i)$:

$$p_{jj}^{(n)} > 0 \quad \Longrightarrow \quad n \bmod d(i) = 0.$$

Положим теперь $n = d(j)$. Тогда

$$p_{jj}^{(d(j))} > 0 \quad \Longrightarrow \quad d(j) \bmod d(i) = 0,$$

а значит

$$d(i) \leqslant d(j).$$

Аналогично получим $d(j) \leqslant d(i)$, следовательно $d(j) = d(i)$. ■

Определение 3.13. Периодом класса E (обозначение: $d(E)$) называется период его состояний:

$$d(E) = d(i), \quad i \in E.$$

Т.к. согласно утверждению 3.12 периоды всех состояний класса совпадают, то понятие периода класса определено корректно.

Определение 3.14. Если $d(i) = 1$, то состояние i называется *апериодичным.*

Будем далее предполагать, что $d(E) \geqslant 1$. Для краткости обозначим $d = d(E)$. Зафиксируем некоторое состояние $i_0 \in E$ и рассмотрим следующие подклассы:

$$C_0 = \left\{ j \in E \colon p_{i_0 j}^{(n)} > 0 \quad \Longrightarrow \quad n \bmod d = 0 \right\},$$

$$\vdots$$

$$C_{d-1} = \left\{ j \in E \colon p_{i_0 j}^{(n)} > 0 \quad \Longrightarrow \quad n \bmod d = d-1 \right\}.$$

Из определения этих множеств видно, что

$$C_i \cap C_j = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

и

$$E = C_0 + \dots + C_{d-1}.$$

Утверждение 3.15. *Пусть* $\xi_n \in C_p$. *Тогда* $\xi_{n+1} \in C_{(p+1) \bmod d}$.

Доказательство. Зафиксируем $i_0 \in E$. Пусть

$$\xi_n = i \in C_p, \quad \xi_{n+1} = j.$$

Тогда $p_{ij} > 0$. Пусть m такое, что:

$$p_{i_0 i}^{(m)} > 0.$$

Согласно уравнению Колмогорова–Чэпмена (5)

$$p_{i_0 j}^{(m+1)} \geqslant p_{i_0 i}^{(m)} p_{ij} > 0,$$

откуда получаем

$$j \in C_{(p+1) \bmod d}. \qquad \blacksquare$$

Из приведённых выше рассуждений следует, что матрица переходных вероятностей неразложимой цепи имеет блочную структуру.

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} C_0 & C_1 & \dots & C_{d-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} C_0 \\ C_1 \\ \dots \\ C_{d-1} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

С каждым подклассом можно связать новую марковскую цепь с матрицей переходных вероятностей $(p_{ij}^{(d)})_{i,j \in C_p}$, которая будет неразложимой и апериодичной.

Полученную классификацию можно представить в виде диаграммы

Исходя из этой классификации заключаем, что при исследовании вопросов о предельных свойствах переходных вероятностей $p_{ij}^{(n)}$ можно ограничиться рассмотрением лишь апериодических неразложимых цепей.

3.6 Классификация состояний марковской цепи по асимптотическим свойствам переходных вероятностей $p_{ii}^{(n)}$

Определение 3.16. Пусть

$$f_{ij}^{(k)} = \mathbb{P}_i\{\xi_k = j,\ \ \xi_l \neq j,\ \ 1 \leqslant l \leqslant k-1 \ \big|\ \xi_0 = i\}.$$

Величину $f_{ij}^{(k)}$ можно интерпретировать как вероятность впервые попасть из состояния i в состояние j на k-ом шаге. Величину $f_{ii}^{(k)}$, соответственно, называют вероятностью первого возвращения в состояние i через k шагов.

Определение 3.17. Пусть

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}.$$

f_{ij} интерпретируется как вероятность того, что марковский процесс перейдёт из состояния i в состояние j за конечное число шагов.

Исходя из значения f_{ii} состояние i относят к одному из двух типов.

Определение 3.18. Состояние i называется *возвратным*, если $f_{ii} = 1$, и *невозвратным*, если $f_{ii} < 1$.

Каждое возвратное состояние можно отнести к одному из двух подтипов в зависимости от конечности или бесконечности среднего времени возвращения.

Определение 3.19. Возвратное состояние i называется *положительным*, если

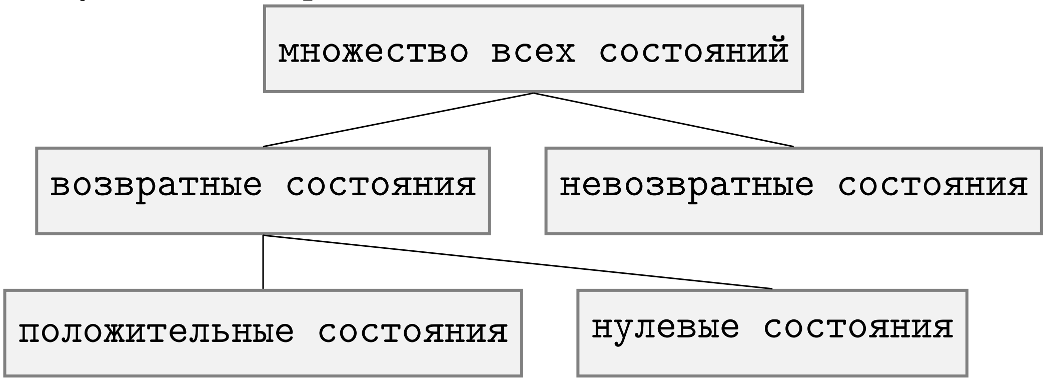
$$\mu_i^{-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}\right)^{-1} > 0,$$

и *нулевым*, если

$$\mu_i^{-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} \right)^{-1} = 0.$$

Положительному возвратному состоянию соответствует конечное среднее время возвращения, а нулевому — бесконечное.

Таким образом, состояния цепи можно классифицировать согласно следующей диаграмме:



Несложно увидеть, что выполняется

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}. \tag{6}$$

Это представление для вероятности перехода на n шагов будет в дальнейшем использоваться при доказательстве некоторых утверждений.

3.6.1 Свойства возвратных состояний.

Лемма 3.20.
1) Состояние i возвратно тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty.$$

2) Если j возвратно и $j \leftrightarrow i$, то состояние i тоже возвратно.

Доказательство.

1) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$. Покажем, что из этого следует невозвратность состояния i. Согласно (6) верно представление:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)} =$$

(поменяем порядок суммирования)

$$= \sum_{k,n:\ 1\leqslant k\leqslant n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \sum_{n=k}^{\infty} p_{ii}^{(n-k)} =$$

(замена вида $n \Leftarrow n-k$)

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} =$$

($\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} = f_{ii}$)

$$= f_{ii} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = f_{ii} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}\right)$$

Мы получили равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = f_{ii} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}\right),$$

следовательно

$$f_{ii} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}}$$

Поэтому, если $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$, то $f_{ii} < 1$. Это означает невозвратность состояния i по определению. Следовательно, в одну сторону утверждение доказано.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$. Покажем, что тогда i — возвратно. Аналогично предыдущим рассуждениям можно показать выполнение равенства:

$$\sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)} = \sum_{k=1}^{N} f_{ii}^{(k)} \left(1 + \sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)}\right).$$

Отсюда следует:

$$f_{ii} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \geqslant \sum_{k=1}^{N} f_{ii}^{(k)} = \frac{\sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)}}{1 + \sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)}} \to 1, \quad N \to \infty.$$

Т.к. f_{ii} от N не зависит, то

$$f_{ii} = 1,$$

а значит состояние i возвратно по определению.

2) Т.к. $i \leftrightarrow j$, то существуют s и t такие, что $p_{ij}^{(s)}, p_{ji}^{(t)} > 0$. Тогда для любого n
$$p_{ii}^{(s+n+l)} \geqslant p_{ij}^{(s)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(l)}.$$
Поэтому, если $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, что, согласно пункту 1, означает возвратность состояния i. ■

Аналогично Лемме 3.1, выведем следующие свойства асимптотического поведения $p_{ij}^{(n)}$.

Лемма 3.21. *Если состояние j невозвратно, то для любого состояния i*
$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty,$$
а значит
$$p_{ij}^{(n)} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (6):
$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$
Согласно этому представлению можно записать:
$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} =$$
(поменяем порядок суммирования аналогично доказательству леммы 3.20)
$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = f_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} \leqslant$$
(т.к. $f_{ij} \leqslant 1$)
$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}. \tag{7}$$
Из невозвратности состояния j и согласно лемме 3.20
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty.$$

Вместе с неравенством (7) это означет

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty, \tag{8}$$

что и требовалось доказать.

Справедливость асимптотического поведения переходной вероятности

$$p_{ij}^{(n)} \to 0,$$

легко увидеть исходя из (8), т.к. общий член сходящегося ряда должен стремиться к нулю. ■

Лемма 3.22.

1) Пусть состояние j является апериодичным ($d(j) = 1$) возвратным состоянием и $i \leftrightarrow j$. Тогда

$$p_{ij}^{(n)} \to \frac{1}{\mu_j} = \begin{cases} > 0, & \text{если } j \text{ — положительное состояние}, \\ = 0, & \text{если } j \text{ — нулевое состояние}, \end{cases}$$

где

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}.$$

2) Пусть i и j принадлежат разным классам. Тогда

$$p_{ij}^{(n)} \to \frac{f_{ij}}{\mu_j}.$$

Доказательство. Используя некоторые результаты из математического анализа, можно показать, что

$$p_{jj}^{(n)} \to \frac{1}{\mu_j}. \tag{9}$$

Положим $p_{jj}^{(s)} = 0$ при $s < 0$. Тогда, согласно (6), верно представление

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

По теореме о мажорируемой сходимости:

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \lim_n p_{jj}^{(n-k)} =$$

$$= \frac{1}{\mu_j} \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}.$$

Следовательно, мы доказали пункт 2 леммы:

$$p_{ij}^{(n)} \to \frac{f_{ij}}{\mu_j}.$$

Если j — возвратное состояние и $i \leftrightarrow j$, то можно показать, что $f_{ij} = 1$, откуда следует пункт 1 леммы. ■

Рассмотрим асиптотическое поведение переходных вероятностей в случае периодических состояний.

Лемма 3.23. *Пусть состояние j возвратно с периодом $d = d(j) > 1$.*

1) Пусть $i \leftrightarrow j$ и $i \in C_p$, где C_p — циклический подкласс. Пусть $j \in C_{p+a}$ $\;(a = 0, 1, \ldots, d-1)$. Тогда

$$p_{ij}^{(nd+a)} \to \frac{d}{\mu_j}.$$

2) Пусть i — произвольное состояние (возможно, $i \not\leftrightarrow j$). Тогда

$$p_{ij}^{(nd+a)} \to \Big(\sum_{r=0}^{\infty} f_{ij}^{(rd+a)} \Big) \frac{d}{\mu_j}, \quad a = 0, 1, \ldots, d-1.$$

Доказательство.

1) Рассмотрим случай $a = 0$. Пусть $\tilde{n} = nd$. Относительно цепи $\tilde{\xi}_n = \xi_{nd}$ с матрицей переходных вероятностей $\tilde{P} = P^{(d)}$ состояние j является апериодичным. Следовательно, согласно лемме 3.22 и в силу $\tilde{f}_{jj}^{k} = f_{jj}^{(kd)}$

$$p_{ij}^{(nd)} = \tilde{p}_{ij}^{(n)} \to \Big(\sum_{k=1}^{\infty} k \tilde{f}_{jj}^{(k)} \Big)^{-1} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} k f_{jj}^{(kd)} \Big)^{-1} =$$

$$= \Big(\frac{1}{d} \sum_{k=1}^{\infty} k d f_{jj}^{(kd)} \Big)^{-1} = d \Big(\sum_{\substack{k:\ k=nd, \\ n=1,2,\ldots}} k f_{jj}^{(k)} \Big)^{-1} =$$

(т.к. $f_{jj}^{(i)} = 0$ при $i \bmod d \neq 0$, то можно дополнить сумму такими слагаемыми)

$$= d \Big(\sum_{k=1}^{\infty} k f_{jj}^{(k)} \Big)^{-1} = \frac{d}{\mu_j},$$

что доказывает утверждение леммы для $a = 0$.

Предположим, что для $a = r$ лемма доказана, и покажем, что она верна и для $a = r + 1$. Согласно уравнению Колмогорова–Чэпмена

$$p_{ij}^{(nd+r+1)} = \sum_{l \in \mathcal{E}} p_{il} p_{lj}^{(nd+r)} \to \sum_{l \in \mathcal{E}} p_{il} \frac{d}{\mu_j} = \frac{d}{\mu_j}.$$

2) Зафиксируем некоторое a. Полагая $p_{jj}^{(k)} = 0$ при $k < 0$, можно записать

$$p_{ij}^{(nd+a)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(nd+a-k)}.$$

Т.к. период состояния j равен d, то $p_{jj}^{(nd+a-k)} \neq 0$ только при $k - a = rd$, $r = 0, 1, 2, \ldots$. Произведём замену переменной вида $k \Leftarrow rd + a$:

$$p_{ij}^{(nd+a)} = \sum_{r=0}^{nd+a} f_{ij}^{(rd+a)} p_{jj}^{((n-r)d)} = \sum_{r=0}^{\infty} f_{ij}^{(rd+a)} p_{jj}^{((n-r)d)}.$$

Перейдя теперь к пределу при $n \to \infty$ и воспользовавшись результатами пункта 1), получим требуемый результат. ■

Из лемм 3.21 и 3.22 непосредственно вытекает следующий результат о предельном поведении вероятностей $p_{ij}^{(n)}$

Теорема 3.24. *Пусть марковская цепь неразложима и апериодична. Тогда:*

1) если все состояния нулевые или невозвратные, то для любых состояний $i, j \in \mathcal{E}$:

$$p_{ij}^{(n)} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

2) если все состояния положительны, то для любых состояний $i, j \in \mathcal{E}$:

$$p_{ij}^{(n)} \to \frac{1}{\mu_j} > 0 \quad (n \to \infty).$$

3.6.2 Случай конечной марковской цепи.

Для марковскиой цепи ξ с конечным множеством состояний $\mathcal{E}$ многие свойства оказываются эквивалентными. Приведём это утверждение без доказательства.

Теорема 3.25. *Для марковской цепи ξ с конечным множеством возможных состояний $\mathcal{E}$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) Марковская цепь неразложима и апериодична;

2) Все состояния цепи положительные возвратные;

3) Марковская цепь эргодична;

4) Существует n_0 такое, что

$$\min_{i,j} p_{ij}^{(n)} > 0 \quad \forall n \geqslant n_0.$$

3.7 О существовании предельных и стационарных распределений

В этом пункте мы рассмотрим признаки существования предельных и стационарных распределений.

Теорема 3.26. *Пусть марковская цепь ξ такая, что для всех $j \in \mathcal{E}$ существуют пределы*

$$\lim_n p_{ij}^{(n)} = \pi_j,$$

и их значения не зависят от исходного состояния i.

Тогда:

1) $\sum_{i\in\mathcal{E}} \pi_i \leqslant 1, \quad \sum_{i\in\mathcal{E}} \pi_i p_{ij} = \pi_j$.

2) или все $\pi_j = 0$, или $\sum_{j\in\mathcal{E}} \pi_j = 1$.

3) если все $\pi_j = 0$, то стационарное распределение не существует; если $\sum_{j\in\mathcal{E}} \pi_j = 1$, то набор $\{\pi_i\}$ образует единственное стационарное распределение.

Доказательство.

1) По лемме Фату

$$\sum_{j\in\mathcal{E}} \pi_j = \sum_{j\in\mathcal{E}} \lim_n p_{kj}^{(n)} \leqslant \liminf_n \sum_{j\in\mathcal{E}} p_{kj}^{(n)} = 1 \quad (k \in \mathcal{E}).$$

Поэтому по уравнению Колмогорова–Чэпмена (5):

$$\sum_{i\in\mathcal{E}} \pi_i p_{ij} = \sum_{i\in\mathcal{E}} \left(\lim_n p_{ki}^{(n)}\right) p_{ij} \leqslant$$

$$\leqslant \liminf_n \sum_{i\in\mathcal{E}} p_{ki}^{(n)} p_{ij} = \liminf_n p_{kj}^{(n+1)} = \pi_j.$$

Таким образом, для любых состояний i и j

$$\sum_{i\in\mathcal{E}} \pi_i p_{ij} \leqslant \pi_j.$$

Покажем, что здесь можно поставить знак равенства. Предположим, что существует состояние j_0 такое, что:

$$\sum_{i\in\mathcal{E}} \pi_i p_{ij_0} < \pi_{j_0}.$$

Тогда

$$\sum_{j\in\mathcal{E}} \pi_j > \sum_{j\in\mathcal{E}} \left(\sum_{i\in\mathcal{E}} \pi_i p_{ij} \right) = \sum_{i\in\mathcal{E}} \pi_i \sum_{j\in\mathcal{E}} p_{ij} = \sum_{i\in\mathcal{E}} \pi_i.$$

Мы пришли к противоречию, значит такого j_0 не существует и

$$\sum_{i\in\mathcal{E}} \pi_i p_{ij_0} = \pi_j \quad \forall j \in \mathcal{E}.$$

2) Из пункта 1 можно получить по индукции, что

$$\sum_{i\in\mathcal{E}} \pi_i p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \forall j \in \mathcal{E}. \tag{10}$$

Заметим, что значение π_j не зависит от n. Поэтому перейдя в (10) к пределу по n, получим

$$\pi_j = \lim_n \sum_{i\in\mathcal{E}} \pi_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in\mathcal{E}} \pi_i \lim_n p_{ij}^{(n)} = \Big(\sum_{i\in\mathcal{E}} \pi_i \Big) \pi_j.$$

Вычтем из левой части правую:

$$\pi_j \left(1 - \sum_{i\in\mathcal{E}} \pi_i \right) = 0 \quad \forall j \in \mathcal{E}.$$

Следовательно, либо $\sum_i \pi_i = 1$, либо $\pi_j = 0$ для всех j.

3) Пусть $\{q_i\}_{i\in\mathcal{E}}$ — некоторое стационарное распределение данной марковской цепи. Для стационарных распределений верно соотношение

$$\sum_{i\in\mathcal{E}} q_i p_{ij}^{(n)} = q_j.$$

Перейдём к пределу по n:

$$\sum_{i \in \mathcal{E}} q_i \pi_j = q_j.$$

Т.к. $\sum_i q_i = 1$, то получаем для всех j

$$\pi_j = q_j.$$

Поэтому, если $\pi_j = 0$ для всех состояний j, то стационарных распределений у марковской цепи нет. Если $\sum_i \pi_i = 1$, то $\{\pi_i\}$ — единственное стационарное распределение. ∎

Теорема 3.27. *У марковской цепи ξ существует единственное стационарное распределение тогда и только тогда, когда во множестве её значений $\mathcal{E}$ существует ровно один класс, причём положительный возвратный.*

Доказательство. Обозначим через N число положительных возвратных классов и рассмотрим различные варианты значений N.

1) Пусть $N = 0$. Тогда все состояния либо невозвратные, либо возвратные нулевые. Следовательно, для любых i, j

$$\lim_n p_{ij}^{(n)} = 0.$$

Согласно теореме 3.26 это означает, что у марковской цепи не существует стационарных распределений.

2) Пусть $N = 1$ и обозначим через C единственный апериодический (т.е. $d(C) = 1$) положительный возвратный класс. Согласно лемме 3.22 для любых $i \in \mathcal{E}$ и $j \in C$:

$$p_{ij}^{(n)} \to \frac{1}{\mu_j} > 0, \quad n \to \infty.$$

Если $j \notin C$, то j невозвратно и

$$p_{ij}^{(n)} \to 0.$$

Положим для $j \in \mathcal{E}$

$$q_j = \begin{cases} 1/\mu_j > 0, & j \in C, \\ 0, & j \notin C. \end{cases}$$

Тогда по теореме 3.26 такой набор $\{q_j\}$ образует единственное стационарное распределение.

3) Пусть $N = 1$, C — соответствующий положительный возвратный класс с периодом $d = d(C) > 1$. Обозначим через $C_0, \dots, C_{d-1}$ циклические подклассы класса C.

Согласно лемме 3.23 для некоторого подкласса C_k и $i, j \in C_k$

$$p_{ij}^{(nd)} \to \frac{d}{\mu_j} > 0. \tag{11}$$

Каждый из подклассов C_k образует относительно матрицы переходных вероятностей на d шагов $P^{(d)} = (p_{ij}^{(d)})$ возвратный апериодический класс. Соответственно, если мы рассмотрим процесс η с множеством значений $\mathcal{E}_\eta = C_k$ и матрицей переходных вероятностей $P_\eta = (p_{ij}^{(d)})_{i,j \in C_k}$, то согласно теореме 3.26 набор $(d/\mu_j)_{j \in C_k}$ образует единственное стационарное распределение для процесса η. Из этого, в частности, следует, что

$$\sum_{j \in C_k} \frac{d}{\mu_j} = 1, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{j \in C_k} \frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{d}. \tag{12}$$

Положим для $j \in \mathcal{E}$

$$q_j = \begin{cases} 1/\mu_j, & j \in C = C_0 + \dots + C_{d-1}, \\ 0, & j \notin C. \end{cases} \tag{13}$$

и покажем, что для исходной марковской цепи ξ набор (q_j) образует стационарное распределение. Для любого состояния $i \in C$, согласно уравнению Колмогорова–Чэпмена,

$$p_{ii}^{(nd)} = \sum_{j \in C} p_{ij}^{(nd-1)} p_{ji}.$$

Отсюда, из (11) и по лемме Фату

$$\frac{d}{\mu_i} = \lim_n p_{ii}^{(nd)} \geqslant \sum_{j \in C} \liminf_n p_{ij}^{(nd-1)} p_{ji} = \sum_{j \in C} \frac{d}{\mu_j} p_{ji},$$

откуда приходим к неравенству

$$\frac{1}{\mu_i} \geqslant \sum_{j \in C} \frac{p_{ji}}{\mu_j}. \tag{14}$$

Покажем, что здесь можно поставить знак равенства. По (12)

$$\sum_{i \in C} \frac{1}{\mu_i} = \sum_{k=0}^{d-1} \Big(\sum_{i \in C_k} \frac{1}{\mu_i} \Big) = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{1}{d} = 1.$$

Предположим, что в (14) существует состояние i_0 такое, что

$$\frac{1}{\mu_{i_0}} > \sum_{j \in C} \frac{1}{\mu_j} p_{ji_0}.$$

Но тогда

$$\sum_{i \in C} \frac{1}{\mu_i} > \sum_{i \in C} \sum_{j \in C} \frac{1}{\mu_j} p_{ji} = \sum_{j \in C} \frac{1}{\mu_j}.$$

Мы пришли к противоречию. Следовательно, таких состояний i_0 не существует и

$$\frac{1}{\mu_i} = \sum_{j \in C} \frac{1}{\mu_j} p_{ij},$$

т.е. $\{q_j\}$ является стационарным распределением цепи по определению. Согласно теореме 3.26 набор $\{q_j\}$ образует единственное стационарное распределение.

4) Пусть $N > 1$. Обозначим эти N положительных классов как $C^1, \ldots, C^N$, а соответствующие этим классам стационарные распределения как

$$Q^k = \{q_j^k\}_{j \in C^k} \quad (k = 1, \ldots, N),$$

где

$$q_j^k = \begin{cases} 1/\mu_j > 0, & j \in C^k; \\ 0, & j \notin C^k. \end{cases}$$

Тогда для любых неотрицательных чисел $a_1, \ldots, a_N$ таких, что

$$a_1 + \cdots + a_N = 1,$$

верно (здесь для кракости записи рассматриваются матричные умножения вектор-строк Q^k на матрицы P)

$$(a_1 Q^1 + \cdots + a_N Q^N) P = a_1 Q^1 P + \cdots + \cdots + a_N Q^N P =$$

(т.к. Q^i — стационарное распределение, то $Q^i P = Q^i$)

$$= a_1 Q^1 + \cdots + a_N Q^N.$$

Следовательно, набор $a_1 Q^1 + \cdots + a_N Q^N$ образует стационарное распределение для рассматриваемой марковской цепи. Таким образом, при $N > 1$ существует бесконечное число различных стационарных распределений. ∎

Рассмотрим условия существования предельного распределения.

Теорема 3.28. *Для того, чтобы у марковской цепи ξ существовало предельное распределение необходимо и достаточно, чтобы во множестве всех состояний $\mathcal{E}$ существовал в точности один апериодичный положительный возвратный класс E такой, что*

$$f_{ij} = 1 \quad \forall j \in E,\ i \in \mathcal{E}.$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть у марковской цепи сущесвует предельное распределение $\{\pi_i\}$. Тогда по теореме 3.26 это предельное распределение будет единственным стационарным. Следовательно, по теореме 3.27 у марковской цепи ξ существует ровно один возвратный положительный класс E.

Покажем, что E апериодичный, т.е. что

$$d = d(E) = 1.$$

Предположим противное, т.е. что:

$$d > 1.$$

Обозначим через $C_0, \dots, C_{d-1}$ соответсвующие циклические подклассы. Пусть $i \in C_0,\ j \in C_1$. Тогда, согласно лемме 3.22

$$p_{ij}^{(nd+1)} \to \frac{d}{\mu_j} > 0, \quad p_{ij}^{(nd)} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

т.е. $p_{ij}^{(n)}$ не имеет предела при $n \to \infty$. Мы пришли к противоречию, значит предположение $d > 1$ неверно. Следовательно, $d(E) = 1$ и E — апериодический класс.

Покажем теперь, что

$$f_{ij} = 1.$$

Согласно лемме 3.22

$$p_{ij}^{(n)} \to \frac{f_{ij}}{\mu_j}.$$

Однако, $p_{ij}^{(n)} \to \pi_j$ согласно условиям теоремы. Значит значение f_{ij} не зависит от i и

$$f_{ij} = f_{jj} = 1.$$

Достаточность. Пусть E — единственный апериодический положительный возвратный класс и

$$f_{ij} = 1 \quad \forall j \in E, i \in \mathcal{E}.$$

Согласно лемме 3.22

$$p_{ij}^{(n)} \to \begin{cases} \frac{f_{ij}}{\mu_j}, & j \in E, i \in \mathcal{E}, \\ 0, & j \notin E, i \in \mathcal{E}. \end{cases}$$

Раз $f_{ij} = 1$, то существует не зависящий от i предел

$$\lim_n p_{ij}^{(n)} = \pi_j.$$

Т.к. $\pi_j = 1/\mu_j$ при $j \in E$ и E является положительным классом, то

$$\pi_j > 0, \quad j \in E.$$

Согласно теореме 3.26 это означает, что

$$\sum_{i \in E} \pi_i = 1,$$

т.е. $\{\pi_i\}$ образует предельное распределение цепи. ∎

3.7.1 Случай конечной марковской цепи.

Приведём следующее утверждение о взаимосвязи различных свойств конечных цепей без доказательства.

Теорема 3.29. *Пусть дана конечная марковская цепь ξ. Для утверждений:*

(1) ξ — эргодична;

(2) ξ — неразложимая, апериодичная, положительная возвратная;

(3) У ξ существует предельное распределение;

(4) У ξ существует ровно один апериодичный положительный возвратный класс.

(5) У ξ существует единственное стационарное распределение;

(6) У ξ существует ровно один положительный возвратный класс;

верны следующие импликационные отношения:

$$\Big((1) \Longleftrightarrow (2)\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big((3) \Longleftrightarrow (4)\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big((5) \Longleftrightarrow (6)\Big).$$

4 Процессы с непрерывным временем

4.1 Примеры измеримых выборочных пространств

В пункте 1.1 было дано определение понятия случайного процесса ξ с данной областью определения T как измеримого отображения вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ на выборочное пространство $(\chi, \mathscr{B}_\chi, \mathbb{P}_\xi)$, где $\mathscr{B}_\chi$ — σ-алгебра, порождённая цилиндрическими множествами над χ.

В случае случайных процессов с дискретным временем, когда T не более чем счётно, цилиндрической σ-алгебры оказывается достаточно для описания всех интересующих исследователя событий. В случае процессов с непрерывным временем цилиндрической σ-алгебры без дополнительных условий оказывается недостаточно. Например, если $T = [a, b] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ и $\chi = \mathbb{R}^T$ ($\mathbb{R}^T$ — множество всех фукнций, определённых на T), то цилиндрическая σ-алгебра может не содержать таких событий, как

$$A = \{\xi(t) = 0, \quad \forall t \in T\}, \quad B = \{\sup_{t \in T} \xi(t) < C\}$$

и т.п. С другой стороны, если положить $\chi = C(T)$ (т.е. положить в качестве χ множество всех непрерывных функций на T), то события A и B уже окажутся измеримыми.

В связи с этим представляет интерес рассмотрение более узких выборочных пространств. Чаще остальных рассматриваются следующие пространства функций:

1) $\xi = \mathbb{R}^T$ — множество всех функций на T.

2) $\xi = C(T)$ — множество всех непрерывных функций на T.

3) $\xi = D(T)$ — множество функций без разрывов второго рода. Рассматривают также варианты $D_+(T)$ и $D_-(T)$ — множества функций, непрерывных справа или слева, соответственно.

Обычно, для случайных процессов возможно построение эквивалентных им модификаций из пространств $C(T)$ или $D(t)$ — тогда при анализе рассматривают лишь эти модификации процессов из пространств $C(T)$ или $D(T)$. В общем случае условия, при которых возможно достаточное «упрощение» вида траекторий случайного процесса, называются *условиями регулярности*.

4.2 Условия регулярности процессов

Определение 4.1. Случайный процесс ξ называется *регулярным*, если можно описать всю его траекторию значениями $\xi(t)$ лишь на счётном множестве моментов времени t.

Если у процесса ξ существует эквивалентная ему непрерывная модификация, то он регулярен. Рассмотрим несколько критериев существования непрерывных модификаций. Для простоты записи будем далее предполагать, что $T = [0,1]$ (подходящим преобразованием аргумента t от $[0,1]$ легко перейти к произвольному случаю $[a,b]$).

Теорема 4.2 (*критерий Колмогорова*). *Пусть ξ — случайный процесс с выборочным измеримым пространством $(\mathbb{R}^T, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}^T)$. Если найдутся $a > 0,\ b > 0,\ c < \infty$ такие, что*

$$\mathbb{E}|\xi(t+h) - \xi(t)|^a \leqslant c|h|^{1+b} \quad \forall t,\ t+h \in T = [0,1],$$

то ξ имеет непрерывную модификацию.

Теорему 4.2 можно рассматривать как следствие теоремы 4.3.

Теорема 4.3. *Пусть для случайного процесса ξ выполняется:*

$$\mathbb{P}(|\xi(t+h) - \xi(t)| > \varepsilon(h)) \leqslant q(h) \quad \forall t,\ t+h \in T = [0,1],$$

где $\varepsilon(h),\ q(h)$ — возрастающие чётные функции от h такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon(2^{-n}) < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n q(2^{-n}) < \infty.$$

Тогда ξ имеет непрерывную модификацию.

Доказательство. Будем приближать процесс ξ непрерывными процессами ξ_n, представляющими собой ломанные прямые. Зададим точки

$$t_r^{(n)} = r2^{-n} \quad \text{для} \quad r = 0, 1, \ldots, 2^n.$$

Пусть $t \in [t_r^{(n)}, t_{r+1}^{(n)}]$. Для точки из этого отрезка определим значение функции ξ_n следующим образом:

$$\xi_n(t) = \xi(t_r^{(n)}) + 2^n(t - t_r^{(n)})(\xi(t_{r+1}^{(n)}) - \xi(t_r^{(n)})).$$

Пусть

$$z_r^{(n)} = \max_{t\in[t_r^{(n)}, t_{r+1}^{(n)}]} |\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)|.$$

Из определения процессов ξ_n видно (см. рис. 4), что

$$|\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)| \leqslant \left|\xi(t_{2r+1}^{(n+1)}) - \frac{1}{2}\big(\xi(t_{2r}^{(n+1)}) + \xi(t_{2r+2}^{(n+1)})\big)\right| \leqslant \frac{\alpha+\beta}{2},$$

где

$$\alpha = |\xi(t_{2r+1}^{(n+1)}) - \xi(t_{2r}^{(n+1)})|,$$

$$\beta = |\xi(t_{2r+1}^{(n+1)}) - \xi(t_{2r+2}^{(n+1)})|.$$

Следовательно,

$$z_r^{(n)} \leqslant \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

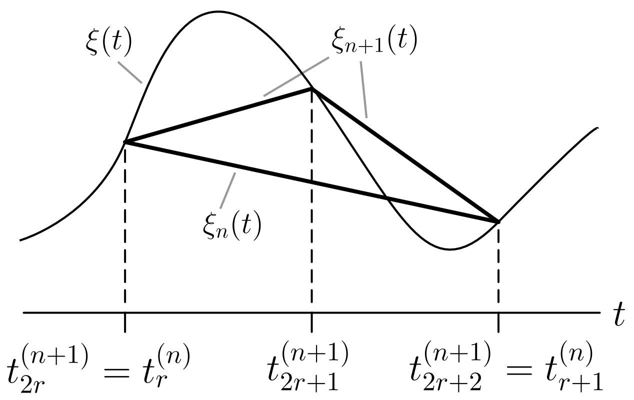


Рис. 4: Приближение процесса ξ ломанными прямыми ξ_n.

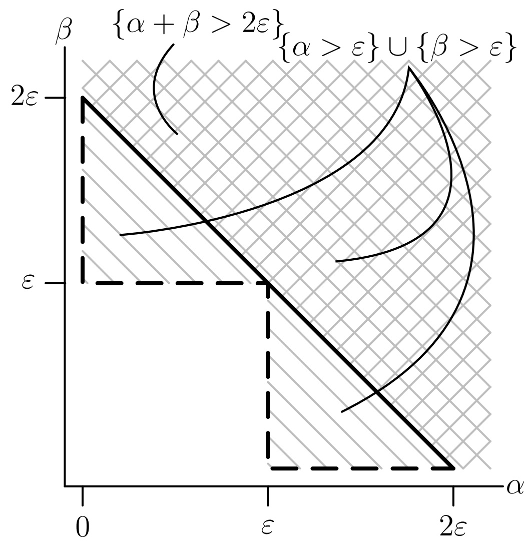


Рис. 5: Оценивание $\{\alpha+\beta > 2\varepsilon\}$ множеством $\{\alpha > \varepsilon\} \cup \{\beta > \varepsilon\}$, где $\varepsilon = \varepsilon(2^{-n-1})$.

(т.к. α и β не зависят от t). Поэтому

$$\mathbb{P}\big(z_r^{(n)} > \varepsilon(2^{-n-1})\big) \leqslant \mathbb{P}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} > \varepsilon(2^{-n-1})\right). \qquad (15)$$

Т.к. (см. рис. 5)

$$\{\alpha+\beta > 2\varepsilon\} \subseteq \{\alpha > \varepsilon\} \cup \{\beta > \varepsilon\},$$

то (15) можно оценить сверху:

$$\mathbb{P}\big(z_r^{(n)} > \varepsilon(2^{-n-1})\big) \leqslant \mathbb{P}\big(\alpha > \varepsilon(2^{-n-1})\big) + \mathbb{P}\big(\beta > \varepsilon(2^{-n-1})\big) \leqslant$$
$$\leqslant 2q(2^{-n-1}).$$

Для T при некотором n верно разбиение:

$$T = [0,1] = \sum_{r=0}^{2^n-1} [t_r^{(n)}, t_{r+1}^{(n)}],$$

поэтому из доказанного неравенства для элементов разбиения

$$\mathbb{P}\big(\max_{t\in[t_r^{(n)},t_{r+1}^{(n)}]} |\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)| > \varepsilon(2^{-n-1}))\big) \leqslant 2q(2^{-n-1})$$

мы получим неравенство для всего отрезка

$$\mathbb{P}\big(\max_{t\in[0,1]} |\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)| > \varepsilon(2^{-n-1})\big) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{r=0}^{2^n-1} \{z_r^{(n)} > \varepsilon(2^{-n-1})\}\right) \leqslant 2^{n+1}q(2^{-n-1}).$$

В силу критерия Бореля–Кантелли (см. лемму 8.1 в приложении) из условия теоремы $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n q(2^{-n}) < \infty$ следует, что для п.в. элементарных исходов $\omega \in \Omega$ $\exists n_0(\omega)$ $\forall n > n_0(\omega)$:

$$\max_{t\in[0,1]} |\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)| \leqslant \varepsilon(2^{-n-1}).$$

Отсюда для некоторого $m > n$ легко получить, что

$$\max_{t\in[0,1]} |\xi_m(t) - \xi_n(t)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \max_{t\in[0,1]} |\xi_k(t) - \xi_{k-1}(t)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon(2^{-k}) \to 0,$$

причём сходимость происходит равномерно по $t \in T$, т.к. правая часть неравенства не зависит от t. Из этого следует, что последовательность ξ_n фундаментальна для п.в. $\omega \in \Omega$, а значит при почти любом фиксированном элементарном исходе $\omega \in \Omega$ существует

$$\eta(t) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(t),$$

причём $\xi_n(t) \to \eta(t)$ равномерно по t. Равномерная сходимость вместе с непрерывностью процессов ξ_n означает непрерывность предельного процесса η.

Мы построили непрерывный процесс η и осталось показать, что он эквивалентен исходному процессу ξ, а значит является его непрерывной модификацией. По определению процессов ξ_n для всех $t = t_r^{(n)}$ верно равенство

$$\xi_{n+k}(t) = \xi(t) \quad \forall k \geqslant 0,$$

а значит и

$$\eta(t) = \xi(t).$$

Если $t \neq t_r^{(n)}$ для любых n и r, то можно построить последовательность r_n такую, что

$$t_{r_n}^{(n)} \to t, \quad 0 < t - t_{r_n}^{(n)} < 2^{-n}$$

и

$$\mathbb{P}(|\xi(t_{r_n}^{(n)}) - \xi(t)| > \varepsilon(2^{-n})) \leqslant q(2^{-n}).$$

В силу критерия Бореля–Кантелли это означает, что

$$\xi_{r_n}^{(n)}(t_{r_n}^{(n)}) \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi(t) \quad (n \to \infty).$$

С другой стороны

$$\xi(t_{r_n}^{(n)}) = \eta(t_{r_n}^{(n)}) \to \eta(t).$$

Следовательно, $\xi(t) \overset{\text{п.н.}}{=} \eta(t)$. ∎

Подбирая подходящим образом функции ε и q, а также воспользовавшись неравенством Чебышёва, можно показать, что теорема 4.2 является следствием теоремы 4.3.

Следующий результат, представленный без доказательства, указывает условия, при котором существует модификация процесса ξ в пространстве $D(T)$ — множестве функций без разрывов 2-го рода.

Теорема 4.4 (*Колмогорова–Ченцова*). *Если при некоторых $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $b > 0$ и для всех $t \in T$, $h_1 \geqslant 0$, $h_2 \geqslant 0$ таких, что*

$$h_1 \leqslant t \leqslant 1 - h_2,$$

выполняется

$$\mathbb{E}|\xi(t)-\xi(t-h_1)|^{\alpha}|\xi(t+h_2)-\xi(t)|^{\beta} < c(h_1+h_2)^{1+b},$$

то у процесса ξ существует модификация в $D(T)$.

В общем случае не всегда возможно построение модификаций в пространствах $C(T)$ и $D(T)$. Тем не менее даже для таких «плохих» процессов возможно построение модификаций, в некотором смысле определяемых лишь счётным множеством точек.

Определение 4.5. Процесс ξ называется *сепарабельным*, если существует всюду плотное в T счётное множество S такое, что:

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_{\substack{u\to t,\\ u\in S}} \xi(u) \geqslant \xi(t) \geqslant \liminf_{\substack{u\to t,\\ u\in S}} \xi(u) \quad \forall t\in T\Big) = 1.$$

Это свойство эквивалентно тому, что для любого интервала $I \subset T$

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{u\in I\cap S}\xi(u) = \sup_{u\in I}\xi(u),\ \inf_{u\in I\cap S}\xi(u) = \inf_{u\in I}\xi(u)\Big) = 1.$$

Дубу принадлежит теорема, утверждающая, что любой случайный процесс имеет сепарабельную модификацию.

4.3 Виды непрерывности случайных процессов

Условие непрерывности всех траекторий процесса, обычно, является излишне жёстким. В теории случайных процессов рассматриваются b более мягкие свойства, характеризующие непрерывность. В дальнейшем мы будем пользоваться следующими двумя типами непрерывности.

Определение 4.6. Случайный процесс ξ называется *стохастически непрерывным*, если при всех $t \in T$

$$\xi(t+h) \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi(t) \quad (h \to 0),$$

т.е.

$$\mathbb{P}(|\xi(t+h)-\xi(t)| > \varepsilon) \to 0 \quad (h\to 0).$$

Очевидно, процессы с непрерывными траекториями являются стохастически непрерывными. Более того, даже процессы с разрывными траекториями будут стохастически непрерывными в фиксированной точке $t_0 \in T$, если вероятность разрыва в этой точке равна нулю.

Определение 4.7. Процесс ξ называется *непрерывным в среднем порядка* r, если для любой точки $t \in T$

$$\mathbb{E}|\xi(t+h) - \xi(t)|^r \to 0 \quad (h \to 0).$$

Непрерывный в среднем порядка 2 процесс называют *непрерывным в среднеквадратичном.*

4.4 Процессы с независимыми приращениями

Пусть $T = [0, \infty)$.

Определение 4.8. ξ называется *процессом с независимыми приращениями*, если для любого набора моментов времени $t_0 < t_1 < \dots < t_n \in T$ случайные величины $\xi(t_0)$, $\xi(t_1) - \xi(t_0)$, $\dots$, $\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ независимы.

Процесс с независимыми приращениями называется *однородным*, если распределение случайной величины $\xi(t_0 + h) - \xi(t_0)$ не зависит от t_0.

Мы рассмотрим связь между процессами с независимыми приращениями и понятием безгранично делимого распределения

Определение 4.9. Распределение случайной величины ξ называется *безгранично делимым*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ величину ξ можно представить в виде суммы n независимых одинаково распределённых случайных величин:

$$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n.$$

Если $\varphi(\lambda)$ — характеристическая функция случайной величины ξ, то указанное свойство эквивалентно тому, что для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $\sqrt[n]{\varphi(\lambda)}$ вновь является характеристической функцией некоторой случайной величины.

Замечание 4.10. Из определения ясно, что у однородного процесса с независимыми приращениями ξ распределение случайной величины $\xi(t)$ для некоторого фиксированного $t \in T$ безгранично делимо. Это следует из представления для любого n:

$$\xi(t) = \xi_1 + \cdots + \xi_n,$$

где $\xi_k = \xi(kt/n) - \xi((k-1)t/n)$ — независимы и распределены как $\xi(t/n)$.

Приведём примеры некоторых бесконечно делимых распределений.

Пример 4.11 (*нормальное распределение*). Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Характеристическая функция нормальной случайной величины имеет вид

$$\varphi(\lambda) = \exp\left\{i\lambda\mu - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Очевидно,

$$\sqrt[n]{\varphi(\lambda)} = \exp\left\{i\lambda\frac{\mu}{n} - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2n}\right\},$$

что соответствует нормальному распределению $\mathcal{N}\left(\mu/n, \sigma^2/n\right)$. Таким образом, нормальное распределение бесконечно делимо.

Пример 4.12 (*распределение Пуассона*). Пусть $\xi \sim P(\lambda)$. Тогда характеристическая функция

$$\varphi(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}.$$

Следовательно,

$$\sqrt[n]{\varphi(\lambda)} = \exp\left\{\frac{\lambda}{n}\left(e^{it} - 1\right)\right\},$$

что соответствует распределению Пуассона $P(\frac{\lambda}{n})$. Значит, распределение Пуассона является бесконечно делимым.

Следующая теорема выявляет связь между бесконечно делимыми распределениями и случайными процессами с независимыми приращениями.

Теорема 4.13. *Пусть ξ — стохастически непрерывный однородный процесс с независимыми приращениями. Пусть $\varphi_t(\lambda) = \mathbb{E}e^{i\lambda\xi(t)}$ — характеристическая функция случайной величи-*

ны $\xi(t)$*. Обозначим* $\varphi(\lambda) = \varphi_1(\lambda)$*. Тогда*

$$\varphi_t(\lambda) = \varphi(\lambda)^t$$

и $\varphi(\lambda) \neq 0$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\xi(0) = 0$. При некотором фиксированном $t \in T$ случайную величину $\xi(t)$ можно представить в виде суммы n независимых случайных величин:

$$\xi(t) = \sum_{j=1}^{n} \big(\xi(t_j) - \xi(t_{j-1})\big),$$

где $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$. Выбирем $t_0,\ t_1, \dots,\ t_n$ так, чтобы:

$$\xi(t) = \Big(\xi\Big(\frac{1}{n}\Big) - \xi(0)\Big) + \Big(\xi\Big(\frac{2}{n}\Big) - \xi\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) + \dots$$
$$\dots + \Big(\xi\Big(\frac{[tn]}{n}\Big) - \xi\Big(\frac{[tn]-1}{n}\Big)\Big) + \Big(\xi(t) - \xi\Big(\frac{[tn]}{n}\Big)\Big).$$

Здесь $\xi(t)$ представлена в виде суммы $[tn]+1$ независимых слагаемых. Заметим, что

$$\varphi_{1/n}(\lambda) = (\varphi_{1/n}(\lambda)^n)^{1/n} = \varphi_1(\lambda)^{1/n},$$

т.к. $\varphi_{1/n}(\lambda)^n$ соответствует сумме приращений ξ на отрезках $[0, 1/n],\ [1/n, 2/n], \dots [(n-1)/n, n]$, которая в силу независимости приращений даст $\xi(1) - \xi(0) = \xi(1)$. В соответствии с такой записью, характеристическая функции случайной величины $\xi(t)$ принимает вид

$$\varphi_t(\lambda) = \Big(\varphi_{\frac{1}{n}}(\lambda)\Big)^{[tn]} \varphi_{t-[tn]/n}(\lambda) = \varphi(\lambda)^{[tn]/n} \varphi_{t-[tn]/n}(\lambda). \tag{16}$$

Легко видеть, что $t - [tn]/n \to 0, \quad n \to \infty$. Т.к. $\xi(0) = 0$, то $\xi(x) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ при $x \to 0$ в силу стохастической непрерывности процесса. Для случайной величины $\xi(0) = 0$ характеристическая функция $\varphi_0(\lambda) = 1$, а значит

$$\varphi_{t-[tn]/n}(\lambda) \to 1 \quad (n \to \infty).$$

Очевидно, $\varphi(\lambda)^{[tn]/n} \to \varphi(\lambda)^t$, поэтому из (16) приходим к

$$\varphi_t(\lambda) \to \varphi(\lambda)^t \quad (n \to \infty).$$

Но так как здесь ни левая, ни правая части от n не зависят, то можно утверждать, что
$$\varphi_t(\lambda) = \varphi(\lambda)^t.$$

Т.к. для любого $\lambda \in \mathbb{R}$
$$\varphi_t(\lambda) \to 1 \quad (t \to 0),$$
то и
$$\varphi(\lambda)^t = \varphi_t(\lambda) \to 1 \quad (t \to 0),$$
что возможно только если
$$\varphi(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$
∎

Теорема 4.14. *Пусть $\varphi(\lambda)$ — характеристическая функция безграничной делимого распределения. Тогда существует стохастически непрерывный однородный случайный процесс с независимыми приращениями ξ такой, что характеристическая функция случайной величины $\xi(1)$ совпадает с $\varphi(\lambda)$:*
$$\mathbb{E} e^{i\lambda\xi(1)} = \varphi(\lambda).$$

Доказательство. Так как $\varphi(\lambda)$ — характеристическая функция безгранично делимого распределения, то $\sqrt[n]{\varphi(\lambda)}$ тоже является характеристической функцией. Следовательно, предел
$$\varphi^t(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \varphi^{\frac{[tn]}{n}}(\lambda)$$
является характеристической функцией как непрерывный в точке $\lambda = 0$ предел последовательности характеристических функций.

Построим требуемый случайный процесс с независимыми приращениями ξ, задав его конечномерные распределения с помощью характеристических функций. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \in T$ — произвольный набор моментов времени. Положим
$$\mathbb{E} \exp\Big\{i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi(t_j)\Big\} = \prod_{j=1}^{n} \varphi\Big(\sum_{l=j}^{n} \lambda_l\Big).$$

Это определение постулирует независимость случайных величин $\xi(t_j) - \xi(t_{j-1})$. Полученное конечномерное распределение согласовано. Поэтому по теореме Колмогорова существует случайный процесс ξ с заданным распределением. По определению этот процесс является к тому же однородным процессом с независимыми приращениями.

Осталось показать, что полученный процесс ξ стохастически непрерывен.

При $h \to 0$

$$\mathbb{E}e^{i\lambda(\xi(t+h)-\xi(t))} = \varphi(\lambda)^h \to \varphi_0(\lambda),$$

где

$$\varphi_0(\lambda) = \begin{cases} 1, & \varphi(\lambda) \neq 0; \\ 0, & \varphi(\lambda) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Т.к. $\varphi(\lambda) \neq 0$ в окрестности точки $\lambda = 0$ как характеристическая функция, то $\varphi_0(\lambda)$ равна 1 в окрестности точки $\lambda = 0$.

Итак, $\varphi_0(\lambda)$ непрерывна в нуле и является пределом последовательности характеристических функций. Следовательно, $\varphi_0(\lambda)$ — характеристическая функция. Из непрерывности характеристических функций и из (17) следует, что

$$\varphi_0(\lambda) = 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Значит, $\varphi_0(\lambda)$ является характеристической функцией случайной величины, тождественно равной нулю, что означает

$$\xi(t+h) - \xi(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad (h \to 0). \qquad \blacksquare$$

Теорема 4.15. *Для любого однородного стохастически непрерывного процесса с независимыми приращениями возможно построение модификации из пространства $D(T)$, т.е. можно построить модификацию, траектории которой не имеют разрывов 2-го рода.*

Доказательство. Для простоты рассмотрим лишь случай, когда у рассматриваемого процесса ξ существует второй момент, т.е. $\mathbb{E}\xi(1)^2 < \infty$. Это предположение эквивалентно существованию второй производной характеристической функции φ. Тогда для достаточно малых $h > 0$

$$\mathbb{E}(\xi(t) - \xi(t-h))^2 = -\varphi_h''(0) = -(\varphi(\lambda)^h)''\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= -(h\varphi(\lambda)^{h-1}\varphi'(\lambda))'\Big|_{\lambda=0} = -\big(h(h-1)\varphi(\lambda)^{h-2}(\varphi'(\lambda))^2 +$$

$$+ h\varphi(\lambda)^{h-1}\varphi''(\lambda)\big)\Big|_{\lambda=0} = -h(h-1)(\varphi'(0))^2 - h\varphi''(0) \leqslant C|h|, \tag{18}$$

где C — некоторая константа. Тогда в силу независимости приращений

$$\mathbb{E}|\xi(t+h_2)-\xi(t)|^2|\xi(t)-\xi(t-h_1)|^2 =$$
$$= \mathbb{E}|\xi(t+h_2)-\xi(t)|^2\,\mathbb{E}|\xi(t)-\xi(t-h_1)|^2 \leqslant$$

(в силу (18))

$$\leqslant C^2h_1h_2 \leqslant C^2(h_1+h_2)^2.$$

Таким образом, для процесса ξ выполняются условия критерия Колмогорова–Ченцова, из которого и следует требуемый результат. ■

4.5 Винеровский процесс. Свойства траекторий

Определение 4.16. Однородный процесс с независимыми приращениями ξ называется *винеровским*, если распределение $\xi(1) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Параметр μ винеровского процесса называют коэффициентом *сноса*, а $\sigma > 0$ — коэффициентом *диффузии*.

Для любых $t < u \in T$

$$\xi(u)-\xi(t) \sim \mathcal{N}(\mu(u-t), \sigma^2(u-t)).$$

Характеристическая функция случайной величины $\xi(1)$ имеет вид

$$\varphi(\lambda) = \exp\left\{i\lambda\mu - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Соответственно, для $\xi(t)$ получаем

$$\varphi_t(\lambda) = \varphi(\lambda)^t = \exp\left\{i\lambda\mu t - \frac{\sigma^2\lambda^2 t}{2}\right\}.$$

Определение 4.17. Винеровский процесс, у которого $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ и, соответственно,

$$\varphi_t(\lambda) = \mathbb{E}\exp\{i\lambda\xi_0(t)\} = \exp\left\{-\frac{t\lambda^2}{2}\right\},$$

называют *стандартным винеровским процессом.*

Если ξ_0 — стандартный винеровский процесс, то преобразование

$$\xi(t) = \sigma\xi_0(t) + \mu t$$

приведёт к винеровскому процессу с коэффициентом сноса μ и коэффициентом диффузии σ. Обратно, если ξ — винеровский процесс с параметрами μ и σ, то преобразование

$$\xi_0(t) = \frac{\xi(t) - \mu t}{\sigma}$$

приводит к процессу, распределённому согласно стандартному винеровскому закону.

Теорема 4.18. *Существует непрерывная модификация винеровского процесса ξ.*

Доказательство. Для простоты записи будем считать, что ξ — стандартный винеровский процесс. Тогда

$$\xi(t+h) - \xi(t) \sim \mathcal{N}(0, h), \quad \text{и} \quad \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{\sqrt{h}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Известно, что у стандартной нормальной случайной величины X четвёртый момент $\mathbb{E}X^4 = 3$. Поэтому,

$$\mathbb{E}(\xi(t+h) - \xi(t))^4 = h^2 \mathbb{E}\xi(1)^4 = 3h^2,$$

т.е. винеровский процесс ξ удовлетворяет критерию Колмогорова существования непрерывной модификации (см. теорему 4.2). ■

В силу доказанного утверждения, обычно, рассматриваются лишь непрерывные варианты винеровского процесса, так что считают, что его траектории принадлежат пространству непрерывных функций $C(T)$.

Определение 4.19. Стандартный винеровский процесс с непрерывными траекториями обозначают как w.

Теорема 4.20. *Винеровский процесс ξ в любой точке $t \in T$ п.н. не дифференцируем:*

$$\mathbb{P}(\exists \xi'(t)) = 0 \quad (t \in T).$$

Доказательство. Будем для простоты записи рассматривать лишь стандартный винеровский процесс w. В силу однородности процесса достаточно доказать его недифференцируемость в точке $t = 0$.

Обозначим через A событие, заключающееся в существовании у w дифференциала в точке $t = 0$. Предположим, что

$$\mathbb{P}(A) > 0, \tag{19}$$

т.е. с положительной вероятностью существует производная

$$w'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{w(t)}{t}.$$

Тогда должен существовать и предел

$$\lim_{k \to \infty} \frac{w(2^{-k+1}) - w(2^{-k})}{2^{-k}} = 2w'(0) - w'(0) = w'(0).$$

Покажем, что это не так. Приращения

$$w(2^{-k+1}) - w(2^{-k}) \sim \mathcal{N}(0, 2^{-k})$$

и независимы при разных k. Значит, k-ое приращение с положительной вероятностью превосходит значение $\sqrt{2^{-k}}$. Следовательно, последовательность независимых событий

$$B_k = \Big\{ w(2^{-k+1}) - w(2^{-k}) > \sqrt{2^{-k}} \Big\}$$

обладает тем свойством, что

$$\mathbb{P}(B_k) = 1 - \Phi(1),$$

а значит

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_k) = \infty.$$

По критерию Бореля–Кантелли (см. лемму 8.1 в приложении) это означает, что п.н. произойдёт бесконечно много событий из последовательности (B_k), т.е.

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_{k \to \infty} \frac{w(2^{-k+1}) - w(2^{-k})}{\sqrt{2^{-k}}} > 1 \Big) = 1.$$

Аналогично получаем, что

$$\mathbb{P}\Big(\liminf_{k \to \infty} \frac{w(2^{-k+1}) - w(2^{-k})}{\sqrt{2^{-k}}} < -1 \Big) = 1.$$

Тогда

$$\mathbb{P}\Bigg(\Big\{ \limsup_{k \to \infty} \frac{w(2^{-k+1}) - w(2^{-k})}{2^{-k}} = \infty \Big\} \bigcap$$

$$\bigcap\left\{\liminf_{k\to\infty}\frac{w(2^{-k+1})-w(2^{-k})}{2^{-k}}=-\infty\right\}\Bigg)=1,$$

т.е. с вероятностью 1 не существует предела последовательности

$$\lim_{k\to\infty}\frac{w(2^{-k+1})-w(2^{-k})}{2^{-k}}.$$

Мы пришли к противоречию с предположением (19), следовательно,

$$\mathbb{P}(A)=0,$$

т.е. с вероятностью 1 траектория процесса $w(t)$ не дифференциируема в точке $t=0$. ■

Верен и более сильный результат — с вероятностью 1 не сущесвует ни одной точки, в которой траектория винеровского процесса ξ была бы дифференциируема:

$$\mathbb{P}\left(\exists t\in T\colon \exists\omega'()\right)=0.$$

Заметим, что для винеровского процесса выполняется свойство параболы. Например, если w — стандартный винеровский процесс, то для любой константы $c>0$ процесс

$$\frac{w(ct)}{\sqrt{c}}$$

снова обладает стандартным винеровским распределением.

4.5.1 Закон повторного логарифма для винеровских процессов

Если рассмотреть 2 кривые, задающиеся формулой

$$y=\pm\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}},$$

то можно заметить, что траектории стандартного винеровского процесса «заполняют» область между этими кривыми, но не выходят за их пределы вблизи в окрестности точки $t=0$ (см. рис. 6). Утверждения о подобном асимтотическом поведении процесса при $t\to 0$ и $t\to\infty$ принято называть *законами повторного логарифма.* Приведём их формулировки для винеровского процесса без доказательства.

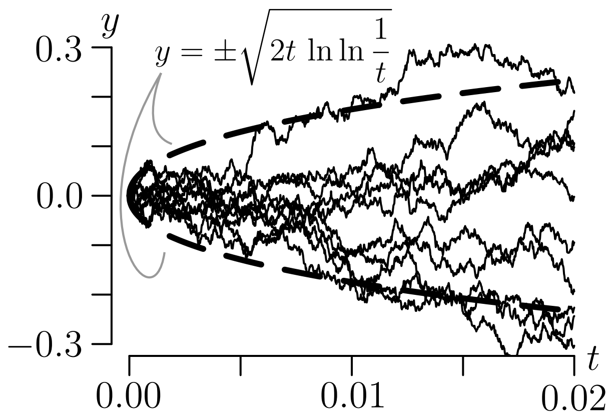


Рис. 6: Иллюстрация асимптотического поведения винеровского процесса при $t \to 0+$ на примере симуляции 10 его траекторий

Теорема 4.21 (*закон повторного логарифма*). *Для стандартного винеровского процесса w верны следующие асимптотические соотношения при $t \to +\infty$:*

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_{t\to+\infty} \frac{w(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1\Big) = 1,$$

$$\mathbb{P}\Big(\liminf_{t\to+\infty} \frac{w(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1\Big) = 1.$$

Теорема 4.22 (*локальный закон повторного логарифма*). *Для стандартного винеровского процесса w верны следующие асимптотические соотношения при $t \to 0$:*

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_{t\to 0} \Big(w(t)\Big/\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}\Big) = 1\Big) = 1,$$

$$\mathbb{P}\Big(\liminf_{t\to 0} \Big(w(t)\Big/\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}\Big) = -1\Big) = 1.$$

5 Описание класса стохастически непрерывных однородных процессов с независимыми приращениями

5.1 Обобщённые пуассоновские процессы

Определение 5.1. Однородный процесс с независимыми приращениями ξ, определённый на $T = [0, +\infty)$, называется *пуассоновским*, если его приращения имеют пуассоновское распределение:

$$\xi(t) - \xi(0) \sim P(t\mu).$$

Параметр $\mu > 0$ называется *интенсивностью пуассоновского потока.*

5.1.1 Свойства пуассоновского процесса

В силу свойств пуассоновского распределения, $\xi(t)$ при каждом t принимает п.н. только целые неотрицательные значения. О вероятности изменения значения процесса можно судить исходя из следующего асимптотического поведения его приращений:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\xi(t+h) - \xi(t) = 0) = 1 - \mu h + O(h^2),\\
&\mathbb{P}(\xi(t+h) - \xi(t) = 1) = \mu h + O(h^2),\\
&\mathbb{P}(\xi(t+h) - \xi(t) > 1) = O(h^2).
\end{aligned} \tag{20}$$

Из (20) видно, что пуассоновский процесс является стохастически непрерывным, а значит, согласно критерию Колмогорова–Ченцова (см. теорему 4.4), для пуассоновских процессов возможно построение модификации в $D(T)$. Поэтому обычно при анализе рассматриваются лишь модификации пуассоновского процесса с траекториями без разрывов 2-го рода. Отметим некоторые свойства пуассоновского процесса:

1) Траектории представляют собой неубывающие функции:

$$\xi(t) \leqslant \xi(l) \quad \forall t \leqslant l.$$

2) С вероятностью 1 процесс ξ возрастает скачками величины 1.

3) Скачки процесса происходят на счётном множестве моментов времени. Поэтому можно построить последовательность моментов остановки $\{a_i\}$, где a_i — момент i-го возрастания процесса ξ.

5.1.2 Построение обобщённого пуассоновского процесса.

Построим обобщение пуассонвского процесса, основанное на изменении 2-го свойства — размер каждого скачка станет случайной величиной.

Пусть ξ — некоторый пуассоновский процесс с параметром интенсивности μ, $\{\zeta_i\}$ — последовательность независимых, одинаково распределённых случайных величин с неотрицательными значениями и характеристической функцией $\beta(\lambda)$. Определим процесс ζ:

$$\zeta(t) = \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_{\xi(t)}.$$

Траектории процесса ζ получается из траекторий ξ путём замены первого единичного скачка на скачок величины ζ_1, второго единичного скачка на скачок величины ζ_2 и т.д.

Т.к. по построению случайные величины $\xi(t)$ и $\{\zeta_i\}$ независимы, то значение характеристической функции процесса ζ в момент $t \in T$ можно получить по формуле полной вероятности:

$$\mathbb{E}e^{i\lambda\zeta(t)} = \mathbb{E}\mathbb{E}(e^{i\lambda\zeta(t)} \mid \xi(t)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{i\lambda\zeta(t)} \mid \xi(t) = k)\mathbb{P}(\xi(t) = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\xi(t) = k)\mathbb{E}e^{i\lambda(\zeta_1 + \cdots + \zeta_k)} =$$

(в силу независимости $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ характеристическая функция суммы $e^{i\lambda(\zeta_1+\cdots+\zeta_k)}$ равна $(\beta(\lambda))^k$)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t}(\beta(\lambda))^k = e^{-\mu t + \beta(\lambda)\mu t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t\beta(\lambda))^k}{k!} e^{-\mu t\beta(\lambda)} =$$

(т.к. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t\beta(\lambda))^k}{k!} e^{-\mu t\beta(\lambda)} = 1$)

$$= e^{\mu t(\beta(\lambda)-1)}.$$

Определение 5.2. Процесс ξ, распределение которого в точке $t \in T$ определяется характеристической функцией

$$\varphi_t(\lambda) = e^{\mu t(\beta(\lambda)-1)},$$

где $\mu \geqslant 0$ и $\beta(\lambda)$ — характеристическая функция случайной величины с неотрицательными значениями, называется *обобщённым пуассоновским процессом.*

Параметр μ определяет интенсивность возникновения скачков, а характеристическая функция $\beta(\lambda)$ определяет распределение их величин. В дальнейшем мы будем рассматривать *обобщённый пуассоновский процесс со сносом*:

$$\tilde{\zeta}(t) = \zeta(t) + at,$$

где $\zeta(t)$ — обобщённый пуассоновский процесс, a — коэффициент сноса. Заметим, что обобщённый пуассоновский процесс является стохастически непрерывным однородным процессом с независимыми приращениями.

5.2 Описание класса стохастически непрерывных однородных процессов с независимыми приращениями

Как было показано в пункте 4.4, между стохастически непрерывными однородными процессами с независимыми приращениями и безгранично делимыми распределениями существует взаимно однозначное соответствие. Мы воспользуемся этой связью чтобы показать, что класс стохастически непрерывных однородных процессов с независимыми приращениями можно рассматривать как замыкание класса всех обобщённых пуассоновских процессов со сносом.

Обозначим через $\mathscr{L}$ класс характеристических функций безгранично делимых распределений.

Лемма 5.3. *Класс $\mathscr{L}$ замкнут относительно операций умножения и предельного перехода, если предел является характеристической функцией.*

Доказательство.

1) Докажем замкнутость относительно операции умножения. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{L}$. Тогда, согласно определению безграничной делимости распределения, $\sqrt[n]{\varphi_1}$ и $\sqrt[n]{\varphi_2}$ тоже являются характеристическими функциями при любом $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\sqrt[n]{\varphi_1 \varphi_2} = \sqrt[n]{\varphi_1}\,\sqrt[n]{\varphi_2}$$

является характеристической функцией, а значит $\varphi_1\varphi_2 \in \mathscr{L}$.

2) Пусть $\varphi_k \in \mathscr{L}$, $\varphi_k \to \varphi$ и φ — характеристическая функция. Тогда для любого n

$$\sqrt[n]{\varphi_k} \to \sqrt[n]{\varphi} \quad (k \to \infty),$$

где $\sqrt[n]{\varphi}$ непрерывна в нуле. Следовательно, $\sqrt[n]{\varphi}$ является характеристической функцией, а значит $\varphi \in \mathscr{L}$. ■

Определение 5.4. Множество $\mathscr{L}_\Pi$ характеристических функций вида

$$\ln \varphi(\lambda) = i\lambda a + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(e^{i\lambda b_k} - 1),$$

где $a \geqslant 0$, $b_k \geqslant 0$, $c_k \geqslant 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$, называется *пуассоновским классом.*

Легко видеть, что $\mathscr{L}_\Pi \subseteq \mathscr{L}$. Элементами класса $\mathscr{L}_\Pi$ являются характеристические функции обобщённых пуассоновских распределений со сносом a и интенсивностью c_k скачков величины b_k. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(e^{i\lambda b_k} - 1) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbb{E}(e^{i\lambda\zeta} - 1) = \mu(\beta(\lambda) - 1),$$

где $\beta(\lambda)$ — характеристическая функция случайной величины, принимающей значение b_k с вероятностью $c_k \Big/ \sum_{k=1}^{\infty} c_k$.

Утверждение 5.5. *Пусть φ — характеристическая функция. Функция $\varphi \in \mathscr{L}$ тогда и только тогда, когда*

$$\varphi = \lim_n \varphi_n, \quad \varphi_n \in \mathscr{L}_\Pi.$$

Доказательство.

Достаточность. Пусть существует такая последовательность характеристических функций $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in \mathscr{L}_\Pi$, что $\varphi = \lim_n \varphi_n$. По определению для φ_n верно представление

$$\ln \varphi_n = -i\lambda a^{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(n)}(e^{i\lambda b_k^{(n)}} - 1).$$

Легко видеть, что $\sqrt[m]{\varphi_n} \in \mathscr{L}_\Pi$ для любого $m \in \mathbb{N}$. В силу непрерывности функции $\sqrt[m]{\cdot}$ будет выполняться сходимость $\sqrt[m]{\varphi_n} \to \sqrt[m]{\varphi}$. Поэтому, т.к. $\sqrt[m]{\varphi}$ к тому же непрерывна в нуле, то $\sqrt[m]{\varphi}$ является характеристической функцией. Следовательно, $\varphi \in \mathscr{L}$.

Необходимость. Пусть $\varphi \in \mathscr{L}$. Тогда $\varphi(\lambda) \neq 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, а значит существует $\ln\varphi$, причём

$$n(\sqrt[n]{\varphi(\lambda)} - 1) \to \ln\varphi,$$

что можно получить, например, по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi^x(\lambda) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\varphi(\lambda)^x - 1)'_x}{(x)'_x} = \lim_{x\to 0} \varphi(\lambda)^x \ln\varphi(\lambda) = \ln\varphi(\lambda).$$

С другой стороны, по определению характеристических функций:

$$\sqrt[n]{\varphi(\lambda)} - 1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda x} - 1) dF_n(x), \tag{21}$$

где $F_n(x)$ — функция распределения случайной величины, соответствующей характеристической функции $\sqrt[n]{\varphi(\lambda)}$. Интергал от непрерывной функции, стоящий справа в (21), можно рассматривать как интеграл Римана–Стилтьеса. Т.е. для F_n существует разбиение вещественной оси на счётное число интервалов $\Delta_k^{(n)}$ таких, что для $x_k^{(n)} \in \Delta_k^{(n)}$ и $r_n < cn^{-2}$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda x} - 1) dF_n(x) = \sum_k (e^{i\lambda x_k^{(n)}} - 1)\mathbb{P}_n(\Delta_k^{(n)}) + r_n,$$

где $\mathbb{P}_n(\Delta)$ — вероятность интервала Δ, соответствующая F_n. Следовательно,

$$\ln\varphi(\lambda) = \lim_n n(\varphi(\lambda)^{1/n} - 1) =$$
$$= \lim_n \Big(n \sum_k (e^{i\lambda x_k^{(n)}} - 1)\mathbb{P}_n(\Delta_k^{(n)}) + O(n^{-1}) \Big).$$

Т.е. если

$$\varphi_n(\lambda) = e^{n(\sqrt[n]{\varphi(\lambda)} - 1)},$$

то $\varphi(\lambda) = \lim_n \varphi_n(\lambda)$ и $\varphi_n(\lambda) \in \mathscr{L}_\Pi$. ∎

Теорема 5.6 (*Леви–Хинчина*). *$\varphi(\lambda) \in \mathscr{L}$ тогда и только тогда, когда функция $\psi(\lambda) = \ln \varphi(\lambda)$ представима в виде*

$$\psi(\lambda) = i\lambda a + \int \left(e^{i\lambda x} - 1 - \frac{i\lambda x}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} d\Psi(x),$$

где $\Psi(x)$ — неубывающая функция ограниченной вариации (т.е. функция распределения с точностью до положительного множителя). При этом предполагается, что подинтегральная функция доопределена по непрерывности в точке $x = 0$, т.е. считаем, что она равна $-\frac{\lambda^2}{2}$ в точке $x = 0$.

В формулировке теоремы Леви–Хинчина Ψ представляет собой *спектральную функцию* процесса с независимыми приращениями. В частности, если $\Psi(\{0\}) = \sigma^2 > 0$, то бесконечно делимое распределение соответствует винеровскому процессу с параметрами $(0, \sigma^2)$.

6 Стохастические интегралы от процессов с конечным вторым моментом

В этой главе будут рассматриваться свойства комплекснозначных случайных процессов вида:

$$\xi(t) = \eta(t) + i\zeta(t) \quad (t \in T),$$

где $\eta(t)$ — вещественная часть процесса, а $\zeta(t)$ — его мнимая часть. Для удобства записи будем считать, что $\mathbb{E}\xi(t) = 0$. Мы будем рассматривать процессы с конечным вторым моментом:

$$\mathbb{E}|\xi(t)|^2 < \infty \quad \forall t \in T.$$

Будем предполагать, что $T = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, либо $(-\infty, b]$, либо $[a, \infty)$.

6.1 Свойства ковариационных функций процессов с конечными вторыми моментами

Определение 6.1. *Автоковариационной функцией* процесса называется величина

$$r(t, u) = \mathbb{E}(\xi(t) - \mathbb{E}\xi(t))\overline{(\xi(u) - \mathbb{E}\xi(u))}.$$

Автоковариационную функцию будем в дальнейшем сокращённо называть *ковариационной*. В силу предположения $\mathbb{E}\xi(t) = 0$ ковариационную функцию возможно записывать в более короткой форме:

$$r(t, u) = \xi(t)\overline{\xi(u)}.$$

Для процессов с конечным вторым моментом ковариационная функция всегда существует и конечна, т.к.

$$|r(t, u)|^2 \leqslant \mathbb{E}|\xi(t)|^2\mathbb{E}|\xi(u)|^2 < \infty.$$

Перечислем основные свойства ковариационной функции:

1) (*самосопряжённость*) $r(t, u) = \overline{r(u, t)}$.

2) $r(t, t) \geqslant 0$.

3) (*неотрицательная определённость*) Для любого набора моментов времени $t_1, \ldots, t_n \in T$ и чисел $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r(t_k, t_j) z_k \overline{z_j} \geqslant 0.$$

Справедливость свойства 3) легко показать следующей цепочкой равенств:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r(t_k, t_j) z_k \overline{z_j} = \mathbb{E}\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi(t_k)\overline{\xi(t_j)} z_k \overline{z_j}\} =$$

$$= \mathbb{E}\Big\{\sum_{k=1}^{n} \xi(t_k) z_k \overline{\sum_{j=1}^{n} \xi(t_j) z_j}\Big\} = \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} \xi(t_k) z_k\right|^2 \geqslant 0. \qquad (22)$$

Оказывается, свойство неотрицательной определённости является характеристическим свойством класса ковариационных функций.

Теорема 6.2. *Комплекснозначная функция $r(t, u)$ является ковариационной функцией некоторого процесса с конечным вторым моментом тогда и только тогда, когда она удовлетворяет свойству неотрицательной определённости.*

Доказательство.

Необходимость. См. (22).

Достаточность. Покажем, что если функция $r(t, u)$ удовлетворяет свойству неотрицательной определённости, то она является ковариационной функцией некоторого процесса.

Построим подходящий процесс ξ, определяя его через конечномерные распределения. Зададим характеристическую функцию конечномерного распределения для заданных моментов времени $t_1, \ldots, t_n \in T$ следующим образом:

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r(t_k, t_j) z_k z_j\right), \quad z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}.$$

Характеристическая функция $\varphi(z_1, \ldots, z_n)$ соответствует n-му нормальному вектору с нулевым средним и ковариационной матрицей $\big(r(t_k, t_j)\big)_{k,j=1}^{n}$. Очевидно, определённые таким образом конечномерные распределения будут согласованы. Тогда из теоремы Колмогорова следует существование случайного процесса с ковариационной функцией, совпадающей с $r(t, u)$. ■

Из этой теоремы легко видеть, что класс ковариационных функций замкнут относительно операций сложения, умножения, предельного перехода. Например, если $r_1(t, u)$ и $r_2(t, u)$ — две ковариационные функции, то функция $r_1 + r_2$ — неотрицательно определена, а значит, согласно теореме 6.2, тоже является ковариационой функцией.

6.2 Связь между непрерывностью автоковариационной функции и непрерывностью процесса

Естественной формой сходимости для процессов с конечным вторым моментом является сходимость в среднеквадратичном, чему соответствует понятие непрерывности процесса в среднеквадратичном.

Теорема 6.3. *Процесс с конечным вторым моментом ξ непрерывен в среднеквадратичном в точке t_0 тогда и только тогда, когда его ковариационная функция $r(t,u)$ непрерывна в точке (t_0,t_0).*

Доказательство.

Достаточность. Пусть $r(t,u)$ непрерывна в точке (t_0,t_0). Докажем непрерывность процесса ξ в среднеквадратичном по определению. Имеем:

$$\mathbb{E}|\xi(t_0+h)-\xi(t_0)|^2 = \mathbb{E}(\xi(t_0+h)-\xi(t_0))\overline{(\xi(t_0+h)-\xi(t_0))} =$$
$$= \mathbb{E}\xi(t_0+h)\overline{\xi(t_0+h)} - \mathbb{E}\xi(t_0+h)\overline{\xi(t_0)} -$$
$$- \mathbb{E}\xi(t_0)\overline{\xi(t_0+h)} + \mathbb{E}\xi(t_0)\overline{\xi(t_0)} =$$
$$= r(t_0+h,t_0+h) - r(t_0+h,t_0) - r(t_0,t_0+h) + r(t_0,t_0) \to 0.$$

Необходимость. Пусть ξ непрерывен в среднеквадратичном в точке t_0. Тогда

$$|r(t_0+h,t_0+k) - r(t_0,t_0)| = |\mathbb{E}\xi(t_0+h)\overline{\xi(t_0+k)} - \mathbb{E}\xi(t_0)\overline{\xi(t_0)}| =$$

(добавим $\pm\xi(t_0)$ в первый множитель первого слагаемого)

$$= |\mathbb{E}(\xi(t_0+h)-\xi(t_0))\overline{\xi(t_0+k)} + \mathbb{E}\xi(t_0)\overline{\xi(t_0+k)} - \mathbb{E}\xi(t_0)\overline{\xi(t_0)}| =$$

(аналогично, добавим $\overline{\pm\xi(t_0)}$ во второй множитель первого слагаемого)

$$= |\mathbb{E}(\xi(t_0+h)-\xi(t_0))\overline{(\xi(t_0+k)-\xi(t_0))} + \mathbb{E}(\xi(t_0+h)-\xi(t_0))\overline{\xi(t_0)} +$$
$$+ \mathbb{E}\xi(t_0)\overline{(\xi(t_0+k)-\xi(t_0))}| \leqslant \mathbb{E}|\xi(t_0+h)-\xi(t_0)||\xi(t_0+k)-\xi(t_0)| +$$
$$+ \mathbb{E}|\xi(t_0+h)-\xi(t_0)||\xi(t_0)| + \mathbb{E}|\xi(t_0)||\xi(t_0+k)-\xi(t_0)| \leqslant$$

(применим неравенство Шварца)

$$\leqslant \sqrt{\mathbb{E}|\xi(t_0+h)-\xi(t_0)|^2}\sqrt{\mathbb{E}|\xi(t_0+k)-\xi(t_0)|^2}+$$
$$+\sqrt{\mathbb{E}|\xi(t_0+h)-\xi(t_0)|^2}\sqrt{\mathbb{E}|\xi(t_0)|^2}+$$
$$+\sqrt{\mathbb{E}|\xi(t_0)|^2}\sqrt{\mathbb{E}|\xi(t_0+k)-\xi(t_0)|^2} \to 0 \quad (h,k\to 0). \qquad \blacksquare$$

Теорема 6.4. *Если ковариационная функция $r(t,u)$ непрерывна на диагонале $t=u$, то она непрерывна для всех $(t,u)\in T^2$.*

Доказательство. Пусть $(t,u)\in T^2$. Покажем, что ковариационная функция r непрерывна в точке (t,u) при условии её непрерывности в точках (t,t) и (u,u). Произведя преобразования, аналогичные приведённым в доказательстве теоремы 6.3, получим:

$$|r(t+h,u+k)-r(t,u)| \leqslant \ldots \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\mathbb{E}|\xi(t_0+h)-\xi(t_0)|^2}\sqrt{\mathbb{E}|\xi(t_0+k)-\xi(t_0)|^2}+$$
$$+\sqrt{\mathbb{E}|\xi(t_0+h)-\xi(t_0)|^2}\sqrt{\mathbb{E}|\xi(t_0)|^2}+$$
$$+\sqrt{\mathbb{E}|\xi(t_0)|^2}\sqrt{\mathbb{E}|\xi(t_0+k)-\xi(t_0)|^2}.$$

Согласно теореме 6.3 процесс ξ непрерывен в среднеквадратичном в точках (t,t) и (u,u). Следовательно,

$$|r(t+h,u+k)-r(t,u)| \to 0 \quad (h,k\to 0). \qquad \blacksquare$$

6.3 Стохастические интегралы в среднем квадратичном

Пусть $T=[a,b]$. Пусть $g(t)$ — некоторая неслучайная функция. В этом параграфе мы введём понятие стохастических интегралов двух видов:

$$\mathscr{I}_1 = \int_a^b g(t)\xi(t)dt \quad \text{— интеграл типа Римана}$$

и

$$\mathscr{I}_2 = \int_a^b g(t)d\xi(t) \quad \text{— интеграл типа Римана–Стилтьеса.}$$

В этой формальной записи в интеграле типа $\mathscr{I}_1$ случайность находится в подинтегральном выражении, а в интеграле типа $\mathscr{I}_2$ подинтегральное выражение представляет собой неслучайную функцию, но само интегрирование производится по дифференциалу от случайной функции ξ.

Пусть $\tilde{t}_n = (t_0, \dots, t_n)$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$Ж

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b,$$

а $\Delta(\tilde{t}_n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(t_i - t_{i-1})$ — диаметр этого разбиения. Рассмотрим две частичные суммы, соответсвующие интегралам вида $\mathscr{I}_1$ и $\mathscr{I}_2$:

$$S_1(\tilde{t}_n) = \sum_{k=1}^{n} g(t_{k-1})\xi(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}),$$

$$S_2(\tilde{t}_n) = \sum_{k=1}^{n} g(t_{k-1})\big(\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})\big).$$

Определение 6.5. Пусть частичная сумма вида $S_1(\tilde{t}_n)$ сходятся в среднеквадратичном смысле к некоторой случайной величине $\mathscr{I}_1$ при $n \to \infty$ и $\Delta(\tilde{t}_n) \to 0$. Если этот предел не зависит от выбора последовательности разбиений $\tilde{t}_n$, то $\mathscr{I}_1$ называется *стохастическим интегралом типа Римана* и обозначается как

$$\int_a^b g(t)\xi(t)dt.$$

Аналогичным образом определяется интеграл вида $\mathscr{I}_2$.

Определение 6.6. Пусть частичные суммы вида $S_2(\tilde{t}_n)$ сходятся в среднеквадратичном смысле к некоторой случайной величине $\mathscr{I}_2$ при $n \to \infty$ и $\Delta(\tilde{t}_n) \to 0$. Если этот предел не зависит от выбора последовательность разбиений $\tilde{t}_n$, то $\mathscr{I}_2$ называется *стохастическим интегралом типа Римана–Стильеса* и обозначается:

$$\int_a^b g(t)d\xi(t)$$

Опишем критерии существования таких интегралов. Заметим, что в силу предположения $\mathbb{E}\xi(t) = 0$

$$\mathbb{E}S_1 = 0, \quad \mathbb{E}S_2 = 0.$$

Теорема 6.7. *Пусть ξ — непрерывный в среднеквадратичном смысле процесс с конечным вторым моментом, определённый на $T = [a, b]$.*

Если неслучайная функция $g(t)$ такова, что существует интеграл Римана

$$\mathbb{Q}_1 = \int_a^b \int_a^b g(t)\overline{g(u)}r(t,u)dtdu,$$

то тогда существует стохастический интеграл типа Римана

$$\int_a^b g(t)\xi(t)dt.$$

Доказательство.

Пусть $\tilde{t}_n = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ и $\tilde{u}_n = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ — некоторые последовательности разбиений отрезка $[a, b]$ такие, что

$$\Delta(\tilde{t}_n) \to 0, \quad \Delta(\tilde{u}_n) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Тогда

$$\mathbb{E}S_1(\tilde{t}_n)\overline{S_1(\tilde{u}_m)} =$$

$$= \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n} g(t_{i-1})\xi(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \sum_{j=1}^{m} \overline{g(u_{j-1})\xi(u_{j-1})}(u_j - u_{j-1}) =$$

(занесём $\mathbb{E}$ под знак суммирования)

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(t_{i-1})\overline{g(u_{j-1})}r(t_{i-1}, u_{j-1})(t_i - t_{i-1})(u_j - u_{j-1}).$$

Мы получили, что $\mathbb{E}S_1(\tilde{t}_n)\overline{S_1(\tilde{u}_m)}$ представляет собой частичную сумму типа Римана для интеграла $\mathbb{Q}_1$. Т.е. при $n, m \to \infty$

$$\mathbb{E}S_1(\tilde{t}_n)\overline{S_1(\tilde{u}_m)} \to \mathbb{Q}_1 = \int_a^b \int_a^b g(t)\overline{g(u)}r(t,u)dtdu.$$

По критерию сходимости в среднеквадратичном (см. лемму 8.2 в приложении) это означает, что существует предел последовательности $\mathscr{I}_1$ частичных сумм $S_1(\tilde{t}_n)$.

Заметим, что смесь любых других последовательностей разбиений будет сходится к тому же пределу $\mathscr{I}_1$, т.к. подпоследовательности сходящейся последовательности сходятся к одной и той же величине. Следовательно, $\mathscr{I}_1$ является указанным стохастическим интегралом типа Римана по определению. ■

Следствие 6.8. Из доказательства теоремы видно, что $\mathbb{E}\mathscr{I}_1 = 0$ и $\mathbb{E}|\mathscr{I}_1|^2 = \mathbb{Q}_1$.

Теорема 6.9. *Пусть ξ — непрерывный в среднеквадратичном процесс с конечным вторым моментом, определённый на $T = [a, b]$.*

Если неслучайная функция $g(t)$ такова, что существует интеграл Римана–Стилтьеса

$$\mathbb{Q}_2 = \int_a^b \int_a^b g(t)\overline{g(u)} d_{t,u} r(t, u),$$

то существует стохастический интеграл типа Римана–Стилтьеса

$$\mathscr{I}_2 = \int_a^b g(t) d\xi(t).$$

Доказательство. Заметим, что доказательство в аналогично доказательству теоремы 6.7. Пусть $\tilde{t}_n$ и $\tilde{u}_n$ — последовательности разбиений отрезка $T = [a, b]$ такие, что

$$\Delta(\tilde{t}_n) \to 0, \quad \Delta(\tilde{u}_n) \to 0, \quad (n \to \infty).$$

Тогда

$$\mathbb{E}S_2(\tilde{t}_n)S_2(\tilde{u}_m) =$$
$$= \mathbb{E} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} g(t_{i-1})\overline{g(u_{j-1})} r(t_i, u_j) - r(t_i, u_{j-1}) -$$
$$- r(t_{i-1}, u_j) + r(t_{i-1}, u_{j-1}))$$

представляет собой частичную сумму интеграла $\mathbb{Q}_2$. Следовательно,

$$\mathbb{E}S_2(\tilde{t}_n)S_2(\tilde{u}_m) \to \mathbb{Q}_2 = \int_a^b \int_a^b g(t)\overline{g(u)} d_{t,u} r(t, u).$$

По критерию сходимости в среднеквадратичном приходим к тому, что существует среднеквадратичный предел $\mathscr{I}_2$ последовательности $S_2(\tilde{t}_n)$, причём $\mathscr{I}_2$ не зависит от выбора разбиения. Следовательно, $\mathscr{I}_2$ является стохастическим интегралом типа Римана–Стилтьеса. ■

Следствие 6.10. Из доказательства теоремы видно, что $\mathbb{E}\mathscr{I}_2 = 0$ и $\mathbb{E}|\mathscr{I}_2|^2 = \mathbb{Q}_2$.

Замечание 6.11. Легко видеть, что стохастические интегралы обладают некоторыми свойствами обычных интегралов.

Например:

$$\int_a^b \xi(t)dt + \int_b^c \xi(t)dt = \int_a^c \xi(t)dt.$$

Пусть c_1 и c_2 — некоторые константы. Тогда

$$\int_a^b (c_1\xi_1(t) + c_2\xi_2(t))dt = c_1 \int_a^b \xi_1(t)dt + c_2 \int_a^b \xi_2(t)dt.$$

Если $g(t)$ имеет ограниченную и непрерывную производную $g'(t)$, а ковариационная функция $r(t,u)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b g(t)d\xi(t) = g(b)\xi(b) - g(a)\xi(a) - \int_a^b \xi(t)g'(t)dt.$$

7 Спектральное представление стационарных в широком смысле процессов

7.1 Процессы с ортогональными приращениями

Пусть $T = R,\ R^+$ или $[a, b]$; ξ — процесс такой, что $\mathbb{E}\xi(t) = 0$ и для любых $t, u \in T$
$$\mathbb{E}|\xi(t) - \xi(u)|^2 < \infty.$$

Определение 7.1. ξ называется процессом с *ортогональными приращениями*, если для любых наборов $t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4 \in T$
$$\mathbb{E}(\xi(t_4) - \xi(t_3))\overline{(\xi(t_2) - \xi(t_1))} = 0.$$

Зафиксируем некоторый момент времени $t_0 \in T$ и определим функцию
$$F(t) = F_{t_0}(t) = \begin{cases} \mathbb{E}|\xi(t) - \xi(t_0)|^2, & t \geqslant t_0; \\ -\mathbb{E}|\xi(t) - \xi(t_0)|^2, & t < t_0. \end{cases}$$
Заметим, что при $u \leqslant t \in T$
$$\mathbb{E}|\xi(t) - \xi(u)|^2 = F(t) - F(u). \tag{23}$$
Покажем это. Пусть, например, $u \leqslant t_0 \leqslant t$. Тогда
$$\mathbb{E}|\xi(t) - \xi(u)|^2 = \mathbb{E}(\xi(t) - \xi(u))\overline{(\xi(t) - \xi(u))} =$$
(добавим $\pm\xi(t_0)$ в оба множителя)
$$= \mathbb{E}\big((\xi(t) - \xi(t_0)) + (\xi(t_0) - \xi(u))\big)\overline{\big((\xi(t) - \xi(t_0)) + (\xi(t_0) - \xi(u))\big)} =$$
(раскроем скобки)
$$= \mathbb{E}(\xi(t) - \xi(t_0))\overline{(\xi(t) - \xi(t_0))} + \mathbb{E}(\xi(t_0) - \xi(u))\overline{(\xi(t) - \xi(t_0))} +$$
$$+ \mathbb{E}(\xi(t) - \xi(t_0))\overline{(\xi(t_0) - \xi(u))} + \mathbb{E}(\xi(t_0) - \xi(u))\overline{(\xi(t_0) - \xi(u))}$$
(в силу свойства ортогональности приращений 2-е и 3-е слагаемые $= 0$)
$$= F(t) - F(u).$$

Аналогичным образом рассматриваются и два других случая, когда $t_0 \leqslant u \leqslant t$, и когда $u \leqslant t \leqslant t_0$.

Исходя из (23) видно, что функция $F_{t_0}(t)$ при изменении t_0 меняется лишь на постоянное слагаемое. Действительно, для некоторых фиксированных t_0 и t_1

$$F_{t_0}(t) - F_{t_0}(t_0) = F_{t_1}(t) - F_{t_1}(t_0),$$

откуда

$$F_{t_1}(t) = F_{t_0}(t) + F_{t_1}(t_0).$$

Рассмотрим некоторые свойства функции $F_{t_0}(t)$:

1) $F_{t_0}(t)$ ограничена на любом конечном промежутке. Это следует из $\mathbb{E}|\xi(t) - \xi(u)|^2 < \infty$.

2) $F_{t_0}(t)$ не убывает. Это свойство вытекает из (23) и

$$F(t) - F(u) = \mathbb{E}|\xi(t) - \xi(u)|^2 \geqslant 0 \quad \forall t \geqslant u \in T.$$

3) Разность $\xi(t) - \xi(t_0)$ непрерывна в среднеквадратичном в точке t тогда и только тогда, когда $F_{t_0}(t)$ непрерывна в точке t.

Выразим значение ковариационной функции $r(t, u)$ процесса $\xi(t) - \xi(t_0)$ через $F_{t_0}(t)$. Для этого рассмотрим всевозможные случаи взаимного расположения точек u, t и t_0. Пусть $u < t$ и:

1) В случае $u < t_0 < t$:

$$r(t, u) = \mathbb{E}(\xi(t) - \xi(t_0))\overline{(\xi(u) - \xi(t_0))} = 0.$$

2) В случае $t_0 < u < t$:

$$r(t, u) = \mathbb{E}(\xi(t) - \xi(t_0))\overline{(\xi(u) - \xi(t_0))} =$$

(добавим $\pm\xi(u)$ и расскроем скобку)

$$= \mathbb{E}(\xi(t) - \xi(u))\overline{(\xi(u) - \xi(t_0))} + \mathbb{E}|\xi(u) - \xi(t_0)|^2 = F(u).$$

3) В случае $u < t < t_0$ таким же образом получаем

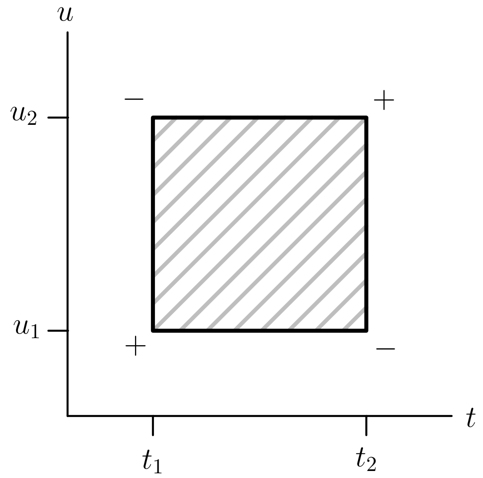
$$r(t, u) = -F(t).$$

Рассмотрев аналогичным образом случай $u > t$, мы придём к общей формуле:

$$r(t, u) = \begin{cases} F(\min(t, u)), & t_0 < u, \quad t_0 < t; \\ -F(\max(t, u)), & u < t_0, \quad t < t_0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{24}$$

7.2 Стохастический интеграл от процесса с ортогональными приращениями

В этом параграфе будет рассматриваться стохастический интеграл типа Римана–Стилтьеса от случайного процесса с ортогональными приращениями.



Без ограничения общности будем предполагать, что функция $F(t)$ непрерывна справа:

$$F(t+0) = F(t) \quad \forall t \in T.$$

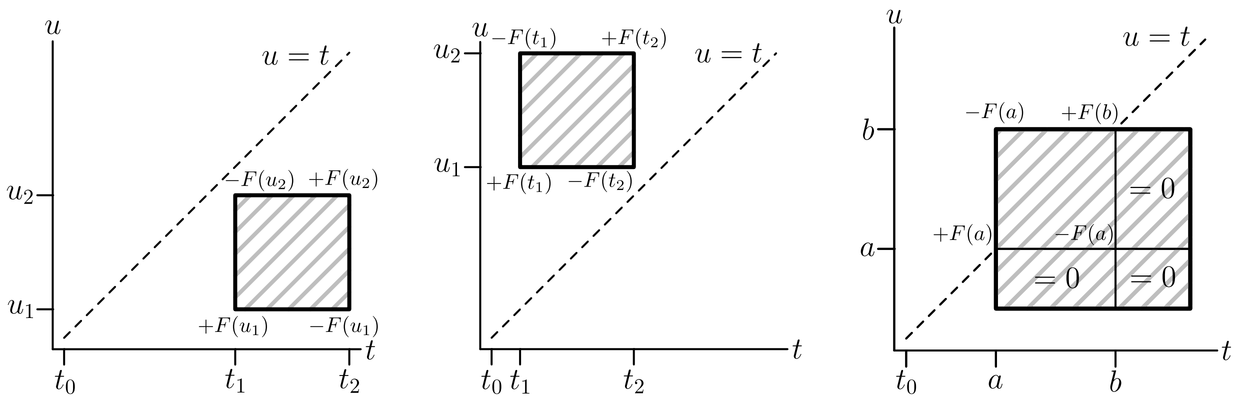
Тогда функция $r(t,u)$, обладающая ограниченной вариацией на каждом конечном интервале и непрерывностью справа по каждому из аргументов, определяет некоторую меру на плоскости. Например, мера прямоугольника $t_1 < t \leqslant t_2,\ \ u_1 < u \leqslant u_2$ равна

$$r(t_2,u_2) - r(t_1,u_2) - r(t_2,u_1) + r(t_1,u_1). \tag{25}$$

Используя представление (24) ковариационной функции $r(t,u)$ через значения функции $F(t)$, можно увидеть, что вся «масса» функции $r(t,u)$ сосредоточена на диагонале $t = u$ (на рис. 7 проиллюстрировано вычисление меры прямоугольника исходя из (24) при различном его расположении относительно диагонали). При этом масса вещественна и положительна, и любой интервал $[t_1,t_2]$ на диагонале обладает массой $F(t_2) - F(t_1)$. В дальнейшем будем считать, что $t_0 = 0$.

Рассмотрим стохастический интеграл типа Римана–Стилтьеса от некоторой детерминированной функции g по ξ:

$$\int_a^b g(t)d\xi(t).$$



(a) Прямоугольник строго ниже диагонали

(b) Прямоугольник строго выше диагонали

(c) Прямоугольник пересекает диагональ

Рис. 7: Вычисление (25) при различном расположении t_1, t_2, u_1, u_2 относительно диагонали

Здесь вместо $\xi(t)$ под знаком дифференциала можно подставить $\xi(t) - \xi(t_0)$, т.к. в частичную сумму интеграла ξ входить лишь в виде приращения:

$$\int_a^b g(t) d\xi(t) = \lim \sum_i g(t_i)(\xi(t_j) - \xi(t_{j-1})).$$

Тогда дисперсия интеграла представима в виде

$$\mathbb{E}\left|\int_a^b g(t) d\xi(t)\right|^2 = \int_a^b \int_a^b g(t)\overline{g(u)} d_{t,u} r(t,u) = \int_a^b |g(t)|^2 dF(t),$$

а ковариация

$$\mathbb{E} \int_a^b g(t) d\xi(t) \int_a^b h(t) d\xi(t) = \int_a^b g(t)\overline{h(t)} dF(t).$$

В качестве критерия существования этого стохастического интеграла можно рассматривать существование интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dF(t) < \infty.$$

7.3 Интеграл Фурье

Пусть функция

$$F(T) = \begin{cases} \mathbb{E}|\xi(t) - \xi(0)|^2, & t \geqslant 0; \\ -\mathbb{E}|\xi(t) - \xi(0)|^2, & t < 0. \end{cases}$$

удовлетворяет

$$F(+\infty) - F(-\infty) < \infty,$$

т.е. её вариация конечна на $\mathbb{R}$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{i\lambda t}|^2 dF(t) < \infty,$$

а значит, согласно критерию существования стохастических интегралов типа Римана–Стилтьеса (теорема 6.9), существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} d\xi(\lambda),$$

называемый интегралом Фурье.

Пусть $\zeta(t)$ — это некоторая случайная функция такая, что

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} d\xi(\lambda).$$

В этом случае интеграл Фурье для случайной функции ζ показывает каким образом её значения складываются из гармонических колебаний с угловой частотой λ и со случайными амплитудой и фазой:

$$d\xi(\lambda) = \underbrace{|d\xi(\lambda)|}_{\text{амплитуда}} \exp\{i \underbrace{\arg d\xi(\lambda)}_{\text{фаза}}\}.$$

Представление для процесса ζ в виде интеграла Фурье называется его спектральным разложением. Процесс ξ называется *спектральным процессом* для ζ.

Рассмотрим некоторые свойства процесса ζ:

1) $\mathbb{E}\zeta(t) = 0 \quad \forall t \in T$.

2) $\mathbb{E}|\xi(t)|^2 = \mathbb{Q}_2 = F(+\infty) - F(-\infty)$.

3) $\mathbb{E}\xi(t)\overline{\xi(u)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(t-u)} dF(\lambda)$ — ковариационная функция $r(t,u)$ процесса ζ зависит только от разности $t-u$, а значит ζ — стационарный в широком смысле процесс.

Определение 7.2. Процесс $\xi(t)$ называется *стационарным в широком смысле*, если
$$\mathbb{E}\xi(t) = const$$
и его ковариационная функция $r(t,u) = \mathbb{E}\xi(t)\overline{\xi(u)}$ зависит только от разности $t-u$.

Для стационарных в широком смысле процессов введём сокращённое обозначение для ковариационной функции:
$$R(t) = r(t+u,u) = \mathbb{E}\xi(t+u)\overline{\xi(u)}.$$

7.4 Свойства ковариационной фукнции стационарного в широком смысле процесса

1) (*самосопряжённость*) $\overline{R(t)} = R(-t)$.

2) $\mathbb{E}|\xi(t)|^2 = R(0)$.

3) $|R(t)| \leqslant R(0)$. Это свойство следует непосредственно из неравенства Шварца:
$$|R(t)|^2 = |\mathbb{E}\xi(t+u)\overline{\xi(u)}|^2 \leqslant \mathbb{E}|\xi(t+u)|^2\mathbb{E}|\xi(u)|^2 = R(0)^2.$$

4) $\xi(t)$ непрерывна в среднеквадратичном тогда и только тогда, когда $R(t)$ непрерывна в точке $t=0$. Это свойство следует из теоремы 6.4.

5) (*неотрицательная определённость*) Для любых наборов $t_1,\ldots,t_n \in T$ и $z_1,\ldots,z_n \in \mathbb{C}$
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R(t_k-t_j)z_k\overline{z_j} \geqslant 0.$$

7.5 Спектральное представление для стационарных в широком смысле процессов

Теорема 7.3 (*Бохнера*). *Комплекснозначная функция $R(t)$ является ковариационной функцией некоторого непрерывного в среднеквадратичном стационарного процесса ξ тогда и только тогда, когда она допускает представление:*
$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}^{i\lambda t} dF(\lambda),$$

где $F(\lambda)$ — вещественная неубывающая и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция.

В этом представлении для ковариации функциия $F(\lambda)$ называется *спектральной функцией* процесса ξ. Если $F(\lambda)$ представима в виде

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu)d\mu,$$

то $f(\mu)$ называется *спектральной плотностью* процесса.

Теорема Бохнера определяет $F(\lambda)$ с точностью до константы. В дальнейшем будет рассматриваться тот вариант $F(\lambda)$, для которого

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = R(0).$$

Заметим, что аналогичное представление для ковариационной функции верно и для случая дискретных случайных процессов. Если $\{\xi_k\}$ — стационарная в широком смысле последовательность, то $R(k) = \mathbb{E}\xi_{k+n}\overline{\xi_n}$ представимо в виде:

$$R(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} dF(\lambda),$$

где $F(\lambda)$ имеет тот же смысл, что и в случае процессов с непрерывным временем.

Будем, как и раньше, предполагать, что

$$\mathbb{E}\xi(t) = 0 \quad \forall t \in T.$$

Теорема 7.4 (*Основная теорема теории стационарных в широком смысле процессов*). *Пусть $T = \mathbb{R}$ и $\xi(t)$ — непрерывный в среднеквадратичном стационарный в широком смысле процесс.*

Тогда существует такой процесс с ортогональными приращениями ζ, что

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} d\zeta(\lambda).$$

Процесс $\zeta(\lambda)$ определяется этим равенством с точностью до аддитивной случайной величины.

Если ζ выбрать таким, что $\zeta(-\infty) = 0$, то

$$\mathbb{E}\zeta(\lambda) = 0, \quad \mathbb{E}|\zeta(\lambda)|^2 = F(\lambda), \quad \mathbb{E}|d\zeta(\lambda)|^2 = dF(\lambda).$$

Доказательство. Для доказательства теоремы мы построим изометрию между двумя гильбертовыми пространствами.

1) Пусть $H(\xi)$ — гильбертово пространство, порождённое случайными величинами $\xi(t),\ t \in \mathbb{R}$.

Элементами этого пространства служат либо линейные комбинации вида:

$$\alpha_1\xi(t_1) + \cdots + \alpha_n\xi(t_n) \quad (\alpha_k \in \mathbb{C}),$$

либо среднеквадратичные пределы последовательностей таких линейных комбинаций. Определим скалярное произведение элементов η_1, $\eta_2 \in H(\xi)$ как

$$(\eta_1, \eta_2) = \mathbb{E}\eta_1\overline{\eta_2}.$$

Соответствующая такому скалярному произведению норма имеет вид

$$\|\eta\|^2_{H(\xi)} = (\eta, \eta) = \mathbb{E}|\eta|^2 \quad \forall \eta \in H(\xi).$$

2) Обозначим через $L_2(F)$ гильбертово пространство всех неслучайных комплексных функций $g(\lambda)$, для которых интеграл Лебега $\int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 dF(\lambda)$ существует и конечен. Из функционального анализа известно, что множество линейных комбинаций функций вида

$$g(\lambda) = e^{i\lambda t}$$

плотно в $L_2(F)$. Введём скалярное произведение элементов g_1, $g_2 \in L_2(F)$ как

$$(g_1, g_2)_{L_2(F)} = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\lambda)\overline{g_2(\lambda)} dF(\lambda)$$

с соответствующей нормой.

3) Поставим в соответствие при фиксированной $t \in \mathbb{R}$ случайной величине $\xi(t) \in H(\xi)$ функцию $e^{it\lambda} \in H(F)$. По теореме Бохнера

$$\mathbb{E}\xi(t)\overline{\xi(u)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}^{it\lambda}\overline{\mathbb{E}^{iu\lambda}} dF(\lambda).$$

Значит, скалярное произведение при изометрии сохраняется.

4) Распространим соответствие на линейные комбинации элементов. Поставим случайной величине

$$\eta = \alpha_1\xi(t_1) + \cdots + \alpha_n\xi(t_n)$$

в соответствие элемент

$$g(\lambda) = \alpha_1 e^{it_1\lambda} + \dots + \alpha_n e^{it_n\lambda}.$$

Аналогично пункту **3)** из теоремы Бохнера следует, что скалярное произведение при изометрии сохраняется:

$$(\eta_1, \eta_2)_{L_2(F)} = (g_1, g_2)_{H(\xi)}.$$

Из этого также следует, что

$$\|\eta_1 - \eta_2\|_{H(\xi)} = \|g_1 - g_2\|_{L_2(F)},$$

т.е. между $H(\xi)$ и $L_2(F)$ установлено взаимно однозначное соответствие, поскольку η_1 не может совпадать с η_2, если не совпадают g_1 и g_2, и наоборот.

5) Пусть есть сходящаяся к $\eta \in H(\xi)$ последовательность элементов $\eta_1, \eta_2, \dots \in H(\xi)$ (линейные комбинации из пункта **4)**) и соответствующая ей последовательность $g_1, g_2, \dots \in L_2(F)$. Тогда

$$(\eta_m, \eta_n) = (g_m, g_n). \tag{26}$$

Из сходимости последовательности $\{\eta_n\}$ следует её фундаментальность. В силу (26) фундаментальна будет и последовательность $\{g_n\}$. Следовательно, $\{g_n\}$ сходится к некоторому элементу $g \in L_2(F)$. Т. о. элементу g ставится в соответствие элемент η.

6) По определению все элементы из $H(\xi)$ являются пределами последовательностей из **5)**. С другой стороны, как упоминалось, $L_2(F)$ также является пределом последовательности линейных комбинаций экспонент. Следовательно, мы получили взаимно однозначное соответствие для всех элементов $H(\xi)$ и $L_2(F)$.

7) Пусть

$$g(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \leqslant 0; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для любого λ_0 функция $g(\lambda - \lambda_0) \in L_2(F)$. Обозначим через $\zeta(\lambda_0)$ процесс из $H(\xi)$, соответствующий $g(\lambda - \lambda_0)$. Заметим, что при $\lambda_0 < \lambda_1$

$$g(\lambda - \lambda_1) - g(\lambda - \lambda_0) = \begin{cases} 1, & \lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, если интервалы (λ_0, λ_1) и (λ_2, λ_3) не пересекаются, то

$$\mathbb{E}\big(\zeta(\lambda_3) - \zeta(\lambda_2)\big)\overline{\big(\zeta(\lambda_1) - \zeta(\lambda_0)\big)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(g(\lambda - \lambda_3) - g(\lambda - \lambda_2)\big)\overline{\big(g(\lambda - \lambda_1) - g(\lambda - \lambda_0)\big)} dF(\lambda) = 0,$$

т.е. $\zeta(\lambda)$ — процесс с ортогональными приращениями.

Положим $\lambda_3 = \lambda_1, \lambda_2 = \lambda_0$, получаем

$$\mathbb{E}|\zeta(\lambda_1) - \zeta(\lambda_0)|^2 = F(\lambda_1) - F(\lambda_0),$$

$$\mathbb{E}|\zeta(\lambda_0)|^2 = F(\lambda_0).$$

Из этого видно, что процесс ζ удовлетворяет дополнительным утверждениям теоремы.

8) Пусть $A > 0$ и

$$-A = \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1} = A$$

— некоторое разбиение интервала $(-A, A)$. Тогда случайная величина

$$\eta = \sum_{j=1}^{n} e^{it\lambda_j}\big(\zeta(\lambda_{j+1}) - \zeta(\lambda_j)\big)$$

имеет вид частичной суммы стохастического интеграла типа Римана–Стилтьеса. Процесс η соответствует функции

$$g(\lambda) = \begin{cases} e^{it\lambda_j}, & \lambda_j < \lambda \leqslant \lambda_{j+1}; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Устремим $A \to \infty$ при $n \to \infty$ так, чтобы диаметр разбиения стремился к нулю:

$$\max_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j) \to 0.$$

Тогда

$$g(\lambda) \to e^{it\lambda} \in L_2(F),$$

$$\eta \to \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} d\zeta(\lambda) \in H(\xi).$$

Но мы знаем, что

$$e^{it\lambda} \in L_2(F)$$

соответствует случайной величине $\xi(t)$, т.е.

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} d\zeta(\lambda). \qquad \blacksquare$$

8 Приложение.

Лемма 8.1 (*Бореля-Кантелли, закон 0 и 1*). *Пусть $\{A_n\}$ — некоторая последовательность событий и пусть*

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Множество A можно интерпретировать как событие, заключающееся в том, что произошло бесконечно много событий из последовательности $\{A_n\}$.

1) Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) < \infty, \quad \text{то} \quad \mathbb{P}(A) = 0.$$

2) Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty$$

и события A_n независимы в совокупности, то

$$\mathbb{P}(A) = 1.$$

Лемма 8.2 (*Критерий среднеквадратичной сходимости*). *Последовательность комплекснозначных случайных величин $\{\xi_k\}$ сходится в среднеквадратичном смысле (к случайной величине ξ) тогда и только тогда, когда числовая последовательность $\mathbb{E}\xi_n\overline{\xi_m}$ сходится (к $\mathbb{E}|\xi|^2$) при $n,\ m \to \infty$.*