На правах рукописи

Сафина Римма Марселевна

ПЕРВАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2015

Работа выполнена в отделе физико-математических и технических наук ГАНУ «Институт прикладных исследований Республики Башкортостан»

Научный руководитель: **Сабитов Камиль Басирович**
доктор физико-математических наук,
профессор, чл.-корр. АН РБ,
директор ГАНУ «Институт прикладных исследований РБ»

Официальные оппоненты: **Репин Олег Александрович**
доктор физико-математических наук, профессор,
зав. кафедрой математической статистики и эконометрики ФГБОУ ВО «Самарский государственный экономический университет»

Уткина Елена Анатольевна
доктор физико-математических наук,
доцент кафедры общей математики
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Ведущая организация: ФГБУН Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН (г.Уфа)

Защита состоится «18» февраля 2016 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35.

Автореферат разослан «____» ___________ 20____г. и размещен на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета: www.kpfu.ru

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10,
кандидат физико-математических наук, доцент Е.К. Липачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одним из основных и важнейших разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными являются краевые задачи для уравнений смешанного типа в силу своей прикладной и теоретической значимости. В связи с этим постановка и изучение краевых задач для таких уравнений является объектом исследований многих ученых. Такая заинтересованность объясняется важными практическими применениями уравнений смешанного типа в таких областях, как магнито- и гидродинамическое течение с переходом через скорость звука, околозвуковая газовая динамика, безмоментная теория оболочек с кривизной переменного знака, теория бесконечно малых изгибаний поверхностей и др., а также теоретической значимостью получаемых результатов. Множество математических моделей массо- и теплообмена в капилярно-пористых средах, пластовых систем, движения малосжимаемой жидкости в канале, окруженной пористой средой, распространения в неоднородной среде электромагнитного поля, формирования температурного поля, движения вязкой и вязкоупругой жидкостей сводятся к исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа.

В работах Ф.Трикоми и С.Геллерстедта было положено начало изучению краевых задач для модельных уравнений смешанного типа, теперь известные как "задача Трикоми"и "задача Геллерстедта".

Дальнейшее развитие теория уравнений смешанного типа получила в работах Ф.И. Франкля, А.В. Бицадзе, К.И. Бабенко, S. Agmon, L. Nirenberg, M.N. Protter, A.K. Aziz, M.Schneider, J.R. Cannon, C.S. Morawetz, J.M. Rassias, Л. Берса, Т.Д. Джураева, В.И. Жегалова, Т.Ш.Кальменова, Г.Д. Каратопраклиева, И.Л. Кароля, Н.Ю. Капустина, Ю.М. Крикунова, А.И. Кожанова, М.А. Лаврентьева, М.Е. Лернера и О.А. Репина, Е.И. Моисеева, А.М. Нахушева, Н.Б. Плещинского, Н.И Попиванова, С.П. Пулькина, Л.С. Пулькиной, О.А. Репина, К.Б. Сабитова, М.С. Салахитдинова и А.К. Уринова, М.М. Смирнова, А.П. Солдатова, Р.С. Хайруллина, М.М. Хачева и др.

Особая заинтересованность к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа стала проявляться после опубликования известной работы Ф.И.Франкля, где впервые было отмечено, что задачи транзвуковой газовой динамики сводятся к этой задаче. К задаче Дирихле для уравнения Чаплыгина, например, сводится задача перехода через звуковой барьер установившихся двумерных безвихревых течений идеального газа в соплах, когда сверхзвуковые волны примыкают к стенкам сопла вблизи минимального сечения.

А.В.Бицадзе доказал некорректность задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева $u_{xx}+(\mathrm{sgny})u_{yy}=0$. После опубликования его работы возникла необходимость поиска смешанных областей, для которых задача Дирихле поставлена корректно.

В дальнейшем, Б.В. Шабатом была изучена задача Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в области $y > -h$, $h > 0$. Гиперболическая часть данной области полностью лежит внутри характеристического треугольника, который построен на отрезке действительной оси $[0, 1]$.

И.Н. Вахания и J.R. Cannon доказали корректность задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в прямоугольных областях при некоторых ограничениях на область гиперболичности.

Критерий единственности решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа первого рода в цилиндрической области установил А.М.Нахушев.

Корректность нелокальной задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в области D, где $D_- = \{0 < -y, x < 1\}$, D_+ – односвязная область, лежащая в полуплоскости $y > 0$, ограниченная отрезком $[0, 1]$ оси x и простой дугой σ с концами в точках $(0, 0)$, $(1, 0)$, была доказана В.И. Жегаловым.

А.П. Солдатовым доказана однозначная разрешимость решения задач типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в смешанной области, ограниченной при $y > 0$ и $y < 0$ соответственно гладкими дугами с общими концами в точках $(0, 0)$ и $(0, 1)$, при этом дуга в гиперболической области (при $y < 0$) лежит внутри характеристического треугольника.

Р.И. Сохадзе изучил первую краевую задачу для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$u_{xx} + yu_{yy} + au_y = 0,$$

где $0 < a < 1$ и $a > 1$ – не целое число, в прямоугольной области $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$ при определенных условиях на α и β.

О.А. Репиным для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом при младшей производной

$$u_{xx} + \mathrm{sgn} y u_{yy} + \frac{2p}{|y|} u_y = 0, \;\; 0 < 2p < 1,$$

в области D, ограниченной полупрямыми $x = 0$ и $x = 1$ с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, расположенными в полуплоскости $y > 0$, и характеристиками $AC : x+y = 0$; $BC : x-y = 1$, выходящими из точек A и B и пересекающимися в точке $C(1/2, -1/2)$, изучена нелокальная краевая задача.

В последние годы в связи с разработкой метода спектрального анализа применительно к уравнениям смешанного типа задача Дирихле изучалась в прямоугольных областях.

К.Б. Сабитов изучил задачу Дирихле для вырождающегося уравнения смешанного типа первого рода

$$\mathrm{sgn} y \cdot |y|^n u_{xx} + x^m u_{yy} - b^2 x^m \mathrm{sgn} y \cdot |y|^m u = 0, \quad n > 0, m = 0, b \geq 0 \qquad (1)$$

в прямоугольной области и полуполосе. Критерий единственности решения, построенного в виде суммы ряда Фурье, установлен на основе спектрального метода решения краевых задач.

Первая граничная задача для двух классов уравнений смешанного типа второго рода

$$u_{xx} + \text{sgny} \cdot |y|^m u_{yy} - b^2 u = 0, \quad 0 < m < 2, \quad b = const \geq 0,$$

$$u_{xx} + y u_{yy} + a u_y - b^2 u = 0, \quad a = const,$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y)|\ 0 < x < 1,\ -\alpha < y < \beta\}$, где a, b, α, β – заданные действительные числа, при этом $\alpha > 0, \beta > 0$, в зависимости от значений параметров m и a изучена К.Б. Сабитовым и А.Х. Трегубовой (Сулеймановой). Критерий единственности решений первой граничной задачи установлен на основании свойства полноты системы собственных функций одномерной спектральной задачи. Решение задачи построено в виде суммы ряда по собственным функциям.

Р.С. Хайруллиным установлен критерий единственности решения задачи Дирихле для уравнения

$$u_{xx} + y u_{yy} + a u_y = 0$$

в прямоугольной области D при $a \leq -1/2$, в этом случае на линии изменения задаются другие условия сопряжения.

К.Б. Сабитов и Э.В. Вагапова с помощью метода спектральных разложений установили критерий единственности решения первой граничной задачи для уравнения (1) в прямоугольной области при всех $n, m > 0$. Решение представлено в виде суммы ряда Фурье – Бесселя.

Задача Дирихле для уравнений в частных производных высоких порядков исследована Е.А. Уткиной. Решение задачи эквивалентно редуцируется к системе уравнений Фредгольма, разрешимость которой устанавливается на основе метода априорных оценок.

Цель и задачи диссертационного исследования. В данной работе изучается первая граничная задача для двух классов уравнений смешанного типа с сингулярным коэффициентом:

$$Su \equiv u_{xx} + (\text{sgn}y) u_{yy} + \frac{k}{x} u_x = 0, \tag{2}$$

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\text{sgn}y)|y|^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{k}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - a^2 u = 0 \tag{3}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y)|0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где k, $a \geq 0$, $0 < m < 2$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа (параметры задачи), в зависимости от значений этих параметров.

Основными задачами исследования являются постановка и доказательство единственности и существования решений первой граничной задачи для уравнений (2) и (3) в прямоугольной области D.

Объектом исследования является первая граничная задача для двух классов уравнений смешанного типа с сингулярным коэффициентом.

Теоретическую и методологическую основу исследования вопросов единственности и существования решений первой граничной задачи для уравнений смешанного типов с сингулярным коэффициентом составляют методы общей теории дифференциальных уравнений в частных производных и спектрального анализа.

Научная новизна исследования. Результаты работы, выносимые на защиту являются новыми.

Основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты.

1) Найдены промежутки изменения параметра k: $k < 1$, $k \neq 0$; $k \geq 1$; $k = 0$, в которых задачи Дирихле и Келдыша для уравнений смешанного типа с сингулярным коэффициентом и Лаврентьева - Бицадзе в прямоугольной области поставлены корректно. В каждом из этих случаев установлены критерии единственности, решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям одномерной спектральной задачи с соответствующим обоснованием сходимости рядов в классе регулярных решений уравнения (2).

2) Установлены промежутки изменения параметров k и m: $k < 1$ и $0 < m < 1$; $k < 1$ и $1 \leq m < 2$; $k \geq 1$ и $0 < m < 1$; $k \geq 1$ и $1 \leq m < 2$, в которых задачи Дирихле и Келдыша для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением и сингулярным коэффициентом в прямоугольной области поставлены корректно. В каждом из этих случаев установлены критерии единственности, доказаны теоремы существования решения задач, которые построены в виде суммы ряда Фурье – Бесселя. Установлены достаточные условия сходимости рядов в классе решений уравнений (3).

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и методы исследования представляют научный интерес и могут быть использованы для дальнейшей разработки теории краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационной работы обсуждались на семинарах лаборатории прикладной математики и информатики отдела физико–математических и технических наук Института прикладных исследований Республики Башкортостан (Стерлитамак, руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор К.Б. Сабитов), кафедры дифференциальных уравнений Казанского (Приволжского) федерального университета (Казань, руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор В.И. Жегалов). Основные результаты работы докладывались на Международной конференции, посвященной 100 - летию со дня рождения Сергея Львовича Соболева "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений"(Новосибирск, 2008), Международной конференции, посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А.Садовничего "Современные проблемы математики, механики и их приложений"(Москва, 2009), Международной научной конференции "Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций"(Казань, 2014), Международной конференции "Дифференциальные уравнения и математическое моделирование" (Улан-Удэ, 2015), Двенадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы"(Казань, 2015).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [9]. При этом статьи [1] – [4] опубликованы в изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов научных исследований.

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 106 наименований. Общий объем диссертации – 109 страниц.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю К.Б. Сабитову за предложенную тематику исследований, ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.

Краткое содержание диссертации

Во введении дается обзор литературы, формулируются постановки задач, приводятся основные результаты.

В первой главе, состоящей из трех параграфов, для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом (2) в прямоугольной области D в зависимости от параметра k изучается первая граничная задача. Методом спектрального анализа установлены критерии единственности и доказаны теоремы существования решений задач для каждого промежутка изменения параметра k.

Рассмотрим уравнение (2) в прямоугольной области D и поставим следующие задачи:

Задача 1.1 (задача Дирихле). Пусть $k < 1$, $k \neq 0$. Требуется определить в области D функцию $u(x, y)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D^+ \cup D^-), \tag{4}$$

$$Su(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D^+ \cup D^-, \tag{5}$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{6}$$

$$u(l, y) = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta, \tag{7}$$

$$u(0, y) = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta, \tag{8}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$, $D^+ = D \cap \{y > 0\}$, $D^- = D \cap \{y < 0\}$.

В силу результатов работ М.В. Келдыша и С.П. Пулькина в классе ограниченных в D решений уравнения при $k \ge 1$ отрезок $x = 0$ границы области D освобождается от граничного условия. В связи с этим предлагается следующая задача с неполными граничными данными, т.е. задача E (по терминологии М.В. Келдыша)

Задача 1.2 (задача Келдыша). Пусть $k \ge 1$. Требуется определить в области D функцию $u(x, y)$, которая удовлетворяет условиям (4) – (7).

Задача 1.3 (задача Дирихле). Пусть $k = 0$. Требуется определить в области D функцию $u(x, y)$, которая удовлетворяет условиям (4) – (8).

Необходимо отметить, что С.П.Пулькиным для уравнения (2) при $k \ge 1$ изучена задача Трикоми в области G, которая ограничена кусочно-гладкой кривой Γ, располагающаяся в первой четверти, с концами в точках $A(1, 0)$ и $B(0, 1)$ и характеристиками $OC : x + y = 0$ и $BC : x - y = 1$, $O(0, 0)$, $C(1/2, -1/2)$, где единственность установлена на основании принципа экстремума, а теорема существования решения этой задачи доказана методом интегральных уравнений. Случай $0 < k < 1$ исследован в работах В.Ф.Волкодавова и его учеников. К.Б. Сабитовым единым методом изучена задача Т для уравнения (2) при всех $k > 0$. В работе К.Б.Сабитова и Р.Р.Ильясова предложен новый способ построения решения задачи Трикоми для уравнения (2) в области G в виде ряда по специальным функциям для значений параметра $0 < k < 1$, когда кривая $\Gamma \equiv \Gamma_0 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0\}$.

Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе, т.е. для уравнения (2) при $k = 0$, в прямоугольной области D при $l = 1$ впервые была изучена в работе J.R.Cannon. Методом Фурье решение построено в виде суммы ортогонального ряда. При условии когда $\varphi(x), \psi(x) \in C^4[0, 1]$ $\psi(0) = \psi''(0) = \psi(1) = \psi''(1) = = \varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(1) = \varphi''(1) = 0$ и число α может принимать значения $\alpha = p/j$, $j = 1, 2, 3$, $p \in \mathbb{N}$ и $\alpha = p/q$, $(p, q) = 1$, $np = mq + r$, $n \in \mathbb{N}$, $m, r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$, $0 \le r < q$, $\min\limits_{0 \le r < q} |\frac{r}{q} - \frac{3}{4}| \ge \delta_q > 0$, $n > \mathbb{N}_q = const > 0$ отмечена сходимость ряда.

В §1.1 исследуется задача Дирихле для уравнения (2) при $k < 1$ и $k \ne 0$, в §1.2 изучается задача Келдыша для уравнения (2) при $k \ge 1$, а §1.3 посвящен изучению первой граничной задачи для уравнения (2) при $k = 0$.

Сначала приведем результаты по задаче Дирихле для уравнения (2) при $k < 1$ и $k \neq 0$. На основе метода спектрального анализа решение задачи (4) – (8) построено в виде суммы ряда Фурье – Бесселя

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y) X_n(x), \tag{9}$$

где

$$u_n(y) = \begin{cases} \triangle^{-1}(n)(\varphi_n(\cos\lambda_n\alpha sh\lambda_n y + \sin\lambda_n\alpha ch\lambda_n y) + \psi_n sh\lambda_n(\beta - y)), y > 0, \\ \triangle^{-1}(n)(\varphi_n \sin\lambda_n(y+\alpha) + \psi_n(sh\lambda_n\beta\cos\lambda_n y - ch\lambda_n\beta\sin\lambda_n y)), y < 0, \end{cases} \tag{10}$$

$$X_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n x), \tag{11}$$

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{l}, \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

$$u_n(\beta) = \int\limits_0^l \varphi(x) x^k X_n(x) dx = \varphi_n, \quad u_n(-\alpha) = \int\limits_0^l \psi(x) x^k X_n(x) dx = \psi_n,$$

μ_n – n - ый корень уравнения $J_{\frac{1-k}{2}}(\mu_n) = 0$, $\mu_n = \lambda_n l$, $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν, при условии, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\triangle(n) = ch\lambda_n\beta\sin\lambda_n\alpha + sh\lambda_n\beta\cos\lambda_n\alpha \neq 0. \tag{12}$$

Допустим условие (12) нарушено при некоторых l, α, β, k и $n = s \in \mathbb{N}$, т.е. $\triangle(s) = 0$, то однородная задача (4) – (8) (где $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u_s(x,y) = \begin{cases} \widetilde{d}_s(sh\lambda_s y ch\lambda_s\beta - sh\lambda_s\beta ch\lambda_s y) X_s(x), \quad y > 0, \\ \widetilde{d}_s(ch\lambda_s\beta\sin\lambda_s y - sh\lambda_s\beta\cos\lambda_s y) X_s(x), \quad y < 0, \end{cases} \tag{13}$$

где $\widetilde{d}_s$ – произвольная постоянная, не равная нулю.

Выражение $\triangle(n)$ представим в виде

$$\triangle(n) = \sqrt{ch 2\lambda_n\beta}\sin(\mu_n\widetilde{\alpha} + \theta_n), \tag{14}$$

где $\widetilde{\alpha} = \frac{\alpha}{l}$, $\theta_n = \arcsin\frac{ch\lambda_n\beta}{\sqrt{ch2\lambda_n\beta}}$. Из (14) видно, что выражение $\triangle(n) = 0$ относительно $\widetilde{\alpha}$ только в том случае, когда

$$\widetilde{\alpha} = \frac{1}{\mu_n}(\pi z - \theta_n), \quad z = 1, 2, ... \ . \tag{15}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 0.1.1. *Если решение задачи (4) – (8) существует, то оно единственно тогда и только тогда, когда выполняются условия (12) при всех* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство единственности решения задачи проводится на основании полноты системы (11) в пространстве $L_2[0, l]$ с весом x^k.

Так как выражение $\triangle(n)$, которое входит в знаменатели формулы (10), имеет счетное множество нулей (15) и $\widetilde{\alpha}$, β, k – любые числа из промежутков задания, то оно может стать достаточно малым при больших n, т.е. возникает так называемая проблема "малых знаменателей". Для того, чтобы обосновать существование решения данной задачи, необходимо показать существование чисел $\widetilde{\alpha}$, β и k, таких, что выражение $\triangle(n)$ отделено от нуля с соответствующей асимптотикой при достаточно больших n.

Справедлива следующая

Лемма 0.1.1. *Если* $\widetilde{\alpha} = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$ *и* $k \neq \frac{1}{p}(4r + q - 4qd)$, $r = 1, ..., q-1$, $d \in \mathbb{N}$, *то существуют постоянные* $C_0 > 0$ *и* $n_0 \in \mathbb{N}$, *такие, что при всех* $n > n_0$ *выполняется оценка*

$$|\triangle(n)| \geq C_0 e^{\lambda_n \beta}. \tag{16}$$

Если для указанных в лемме 0.1.1 чисел $\widetilde{\alpha}$ $\triangle(s) = 0$ при некоторых $n = s = m_1, m_2, ..., m_h$, где $1 \leq m_1 < m_2 < ... < m_h \leq n_0$, m_i, $i = \overline{1, h}$ и h – натуральные числа, то для разрешимости задачи (4) – (8) необходимы и достаточны следующие условия:

$$\psi_s ch \lambda_s \beta - \varphi_s \cos \lambda_s \alpha = 0, \quad s = m_1, m_2, ..., m_h. \tag{17}$$

Решение задачи (4) – (8) в этом случае определяется в виде суммы ряда

$$u(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{m_1-1} + ... + \sum_{n=m_{h-1}+1}^{m_h-1} + \sum_{n=m_h+1}^{+\infty} \right) u_n(y) X_n(x) + \sum_s u_s(x,y), \tag{18}$$

здесь в последней сумме s принимает значения $m_1, m_2, ..., m_h$, функция $u_s(x, y)$ определяется по формуле (13). Если нижний предел больше верхнего, то конечные суммы в (18) следует считать равными нулю.

Теорема 0.1.2. *Пусть функции* $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^4[0, l]$ *и* $\varphi(0) = \psi(0) = \varphi'(0) = \psi'(0) = \varphi''(0) = \psi''(0) = 0$, $\varphi(l) = \psi(l) = \varphi'(l) = \psi'(l) = \varphi''(l) = \psi''(l) = 0$, *и выполнена оценка (16) при* $n > n_0$. *Тогда если* $\triangle(n) \neq 0$ *при всех* $n = \overline{1, n_0}$, *то существует единственное решение задачи (4) – (8) и это решение определяется рядом (9); если* $\triangle(n) = 0$ *при некоторых* $n = m_1, m_2, ..., m_h \leq n_0$, *то задача (4) – (8) разрешима только тогда, когда выполнены условия (17) и решение в этом случае определяется рядом (18).*

В случае **задачи 1.3** решение построено в виде суммы ортогонального ряда:

$$u(x,y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin \lambda_n x, \tag{19}$$

где

$$u_n(y) = \begin{cases} \triangle^{-1}(n)(\varphi_n(\cos\lambda_n\alpha sh\lambda_n y + \sin\lambda_n\alpha ch\lambda_n y) + \psi_n sh\lambda_n(\beta - y)), & y > 0, \\ \triangle^{-1}(n)(\varphi_n \sin\lambda_n(y+\alpha) + \psi_n(sh\lambda_n\beta\cos\lambda_n y - ch\lambda_n\beta\sin\lambda_n y)), & y < 0, \end{cases} \tag{20}$$

$\lambda_n = \pi n/l$, при условии, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\triangle(n) = ch\lambda_n\beta\sin\lambda_n\alpha + sh\lambda_n\beta\cos\lambda_n\alpha \neq 0. \tag{21}$$

Допустим при некоторых l, α, β и $n = s \in \mathbb{N}$: $\triangle(s) = 0$. В этом случае однородная задача 1.3 (где $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_s(x,y) = \begin{cases} \widetilde{d}_s(sh\lambda_s y ch\lambda_s\beta - sh\lambda_s\beta ch\lambda_s y)\sin\lambda_s x, & y > 0, \\ \widetilde{d}_s(ch\lambda_s\beta\sin\lambda_s y - sh\lambda_s\beta\cos\lambda_s y)\sin\lambda_s x, & y < 0, \end{cases}$$

где $\widetilde{d}_s$ – произвольная постоянная, не равная нулю.

Естественно возникает вопрос о нулях выражения $\triangle(n)$. Для этого его преобразуем к виду:

$$\triangle(n) = \sqrt{\operatorname{sh}^2\lambda_n\beta + \operatorname{ch}^2\lambda_n\beta}\,\sin(\lambda_n\alpha + \theta_n) = \sqrt{\operatorname{ch}2\lambda_n\beta}\,\sin(\pi n\widetilde{\alpha} + \theta_n), \tag{22}$$

где $\widetilde{\alpha} = \alpha/l$, $\theta_n = \arcsin\frac{\operatorname{sh}\lambda_n\beta}{\sqrt{\operatorname{ch}2\lambda_n\beta}}$. Из (22) следует, что $\triangle(n) = 0$ только в том случае, когда

$$\widetilde{\alpha} = (\pi z - \theta_n)/\pi n, n, z \in \mathbb{N},$$

т.е. при таких $\widetilde{\alpha}$ нарушается теорема единственности решения задачи (4) – (8) при $k = 0$.

Справедлива следующая

Теорема 0.1.3. *Если решение задачи 1.3 существует, то оно единственно тогда и только тогда, когда выполняются условия (21) при всех $n \in \mathbb{N}$.*

Из формулы (20) видно, что знаменателем дробей является выражение $\triangle(n)$. Поэтому для того, чтобы обосновать существование решения задачи 1.3, помимо условий (21), необходимо показать существование чисел $\widetilde{\alpha}$ и β, таких, что выражение $\triangle(n)$ отделено от нуля.

Установлена справедливость следующих утверждений.

Лемма 0.1.2. *Если $\widetilde{\alpha} \in \mathbb{N}$, то при любом $\beta > 0$ существует постоянная $C_0 = C_0(\beta) > 0$, такая, что при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется оценка*

$$|\triangle(n)| \geq C_0 e^{\lambda_n\beta} > 0.$$

Лемма 0.1.3. *Если $\widetilde{\alpha}$ – любое дробное число, т.е. $\widetilde{\alpha} = \dfrac{p}{q}$, $(p,q) = 1$, $\dfrac{p}{q} \notin \mathbb{N}$, $(q,4) = 1$, то существуют постоянные $\beta_0 = \beta_0(\widetilde{\alpha}) > 0$ и $C_0 = C_0(\widetilde{\alpha},\beta) > 0$,* *такие, что при всех $\beta > \beta_0$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется оценка*

$$|\triangle(n)| \geq C_0 e^{\lambda_n \beta}.$$

Лемма 0.1.4. *Если $\widetilde{\alpha} > 0$ является любым иррациональным алгебраическим числом степени $m \geq 2$, то существуют постоянные $\beta_0 > 0$ и $C_0 > 0$, такие, что при всех $\beta > \beta_0$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняются оценки*

$$|\triangle(n)| \geq C_0 e^{\lambda_n \beta} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}, \ \ m > 2,$$

$$|\triangle(n)| \geq C_0 e^{\lambda_n \beta} \frac{1}{n}, \ \ m = 2,$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число.

Теорема 0.1.4. *Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^3[0, l]$ и $\varphi(0) = \psi(0) = \varphi''(0) = \psi''(0) = 0$, $\varphi(l) = \psi(l) = \varphi''(l) = \psi''(l) = 0$ и выполнены условия лемм 0.1.2 и 0.1.3. Тогда существует единственное решение задачи 1.3 и это решение определяется рядом (19).*

Теорема 0.1.5. *Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^4[0, l]$ и $\varphi(0) = \psi(0) = \varphi''(0) = \psi''(0) = 0$, $\varphi(l) = \psi(l) = \varphi''(l) = \psi''(l) = 0$ и число $\widetilde{\alpha}$ является иррациональным алгебраическим числом степени 2, то существует единственное решение задачи 1.3 и это решение определяется рядом (19).*

Теорема 0.1.6. *Если функции $\varphi(x), \psi(x) \in C^{4+\delta}[0, l]$, $\varepsilon \leq \delta \leq 1$ и $\varphi(0) = \psi(0) = \varphi''(0) = \psi''(0) = 0$, $\varphi(l) = \psi(l) = \varphi''(l) = \psi''(l) = 0$ и число $\widetilde{\alpha}$ является иррациональным алгебраическим числом степени $m > 2$, то существует единственное решение задачи 1.3 и это решение определяется рядом (19).*

Теорема 0.1.7. *Пусть выполнены условия теоремы 0.1.4 и $\triangle(n) \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда для решения задачи 1.3 имеют место оценки*

$$\|u(x, y)\|_{L_2[0,l]} \leq N_{01}(\|\varphi(x)\|_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|_{L_2[0,l]}),$$
$$\|u(x, y)\|_{C(\overline{D})} \leq N_{02}(\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi'(x)\|_{C[0,l]}),$$

где постоянные N_{01} и N_{02} не зависят от $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Глава 2, состоящая из четырех параграфов, посвящена исследованию первой граничной задачи для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением и сингулярным коэффициентом (3) в зависимости от параметров k и m в прямоугольной области D.

Задача 2.1 (задача Дирихле). Пусть $k < 1$, $k \neq 0$ и $0 < m < 1$. Требуется определить в области D функцию $u(x, y)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$u(x, y) \in C^2(D^+ \cup D^-) \cap C^1(D) \cap C(\overline{D}), \tag{23}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D^+ \cup D^-, \tag{24}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{25}$$

$$u(l,y) = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta, \tag{26}$$

$$u(0,y) = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta, \tag{27}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \psi(0) = \varphi(l) = \psi(l) = 0$, $D^+ = D \cap \{y > 0\}, D^- = D \cap \{y < 0\}$.

Задача 2.2 (задача Дирихле). Пусть $k < 1$ и $1 \le m < 2$. Требуется определить в области D функцию $u(x,y)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$u(x,y) \in C^2(D^+ \cup D^-) \cap C(\overline{D}), \tag{28}$$

$$\lim_{y\to 0+0} y^{m-1} u_y(x,y) = -\lim_{y \to 0-0} (-y)^{m-1} u_y(x,y), 0 < x < l, 1 < m < 2, \tag{29}$$

$$\lim_{y\to 0+0} \frac{u_y(x,y)}{\ln y} = -\lim_{y\to 0-0} \frac{u_y(x,y)}{\ln(-y)}, \quad 0 < x < l, \quad m = 1. \tag{30}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D^+ \cup D^-, \tag{31}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{32}$$

$$u(l,y) = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta, \tag{33}$$

$$u(0,y) = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta. \tag{34}$$

Задача 2.3 (задача Келдыша). Пусть $k \ge 1$ и $0 < m < 1$. Требуется определить в области D функцию $u(x,y)$, которая удовлетворяет условиям (23) – (26).

Задача 2.4 (задача Келдыша). Пусть $k \ge 1$ и $1 \le m < 2$. Требуется определить в области D функцию $u(x,y)$, которая удовлетворяет условиям (28) – (33).

Здесь для примера приведем результаты по **задаче 2.3** для уравнения (3) при $k \ge 1$ и $0 < m < 1$, решение которой представлено в виде суммы ряда Фурье – Бесселя

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y) X_n(x), \tag{35}$$

где

$$X_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x),$$

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{l}, \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

$J_\nu(t)$ – функция Бесселя первого рода, μ_n – n - ый корень уравнения $J_{\frac{k-1}{2}}(\mu_n) = 0$,

$$u_n(y) = \begin{cases} \frac{1}{E(n)\sqrt{\alpha\beta}} \left(\varphi_n \sqrt{\alpha y} E_n(\alpha, y) + \psi_n \sqrt{\beta y} M_n(y,\beta)\right) & y > 0, \\ \frac{1}{E(n)\sqrt{\alpha\beta}} \left(\varphi_n \sqrt{-\alpha y} N_n(\alpha, -y) + \psi_n \sqrt{-\beta y} E_n(-y,\beta)\right), & y < 0, \end{cases}$$

где
$$M_n(y,\beta)=I_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_ny^q)-I_{\frac{1}{2q}}(p_ny^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q),$$
$$N_n(\alpha,-y)=\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q)J_{\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q)-\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q)J_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q),$$
$$E_n(\alpha,y)=\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q)I_{\frac{1}{2q}}(p_ny^q)+J_{\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_ny^q),$$
$$E_n(-y,\beta)=I_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q)+J_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q),$$
$$qp_n=\sqrt{a^2+\lambda_n^2},\quad q=(2-m)/2,$$
при условии, что при всех $n\in\mathbb{N}$
$$E(n)=J_{\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)+I_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q)\neq 0. \tag{36}$$

Допустим нарушено условие (36) при некоторых α,β,l,k,m,a и $n=s\in\mathbb{N}$, т.е. $E(s)=0$. В этом случае задача (23) – (26) при $\varphi(x)=\psi(x)\equiv 0$ имеет нетривиальное решение
$$u_s(x,y)=\begin{cases}\frac{E_s(\alpha,y)\sqrt{y}}{J_{\frac{1}{2q}}(p_s\alpha^q)}X_s(x), & y>0,\\ \frac{E_s(-y,\beta)\sqrt{-y}}{I_{\frac{1}{2q}}(p_s\beta^q)}X_s(x), & y<0.\end{cases}$$

Выражение $E(n)$ представим в следующем виде:
$$E(n)=I_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)\gamma(n),$$
где
$$\gamma(n)=J_{\frac{1}{2q}}(\widetilde{\mu_n}\widetilde{\alpha}_q)\frac{K_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)}+\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(\widetilde{\mu_n}\widetilde{\alpha}_q)=\gamma_1(n)+\gamma_2(n),$$
$$\widetilde{\alpha}_q=\alpha_q/l,\quad \alpha_q=\alpha^q/q,\quad \widetilde{\mu_n}=\mu_n\widetilde{p_n},\quad \widetilde{p_n}=\sqrt{1+(al/\mu_n)^2}.$$

Существование нулей $\gamma(n)$ относительно $\widetilde{\alpha}_q$ следует из того, что функции $J_{\frac{1}{2q}}(\widetilde{\mu_n}t)$ и $\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(\widetilde{\mu_n}t)$, $t=\widetilde{\alpha}_q$, являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя
$$y^{''}(t)+\frac{1}{t}y^{'}(t)+\left[\widetilde{\mu_n}^2-\left(\frac{1}{2qt}\right)^2\right]y(t)=0. \tag{37}$$
Отсюда следует, что функции $J_{\frac{1}{2q}}(\widetilde{\mu_n}t)$ и $\gamma(n)$ – также являются линейно независимыми решениями уравнения (37). Согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений нули двух линейно независимых решений уравнения Бесселя строго чередуются, т.е. на интервале между любыми последовательными нулями любого из этих решений содержится ровно один нуль другого решения. Функция $J_{\frac{1}{2q}}(\widetilde{\mu_n}t)$ имеет счетное множество положительных нулей.

Тогда функция $\gamma(n)$ также имеет счетное множество положительных нулей относительно $t=\widetilde{\alpha}_q$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 0.2.1. *Если решение задачи (23) – (26) существует, то оно единственно тогда и только тогда, когда выполняются условия (36) при всех* $n\in\mathbb{N}$.

Так как $\widetilde{\alpha}_q$, β и k – любые числа из промежутков задания, то выражение $E(n)$ при достаточно больших n может стать достаточно малым, т.е. возникает проблема "малых знаменателей". Для решения данной проблемы необходимо показать существование чисел $\widetilde{\alpha}_q$, β и k, таких, что выражение $E(n)$ отделено от нуля при достаточно больших n.

Лемма 0.2.1. *Если* $\widetilde{\alpha}_q=p/t,\ p,t\in\mathbb{N},\ (p,t)=1$ *и выполнено условие* $k\neq\frac{1}{p}\left(4td+3t-4r\right)-2\ ,\ r,\ d\in\mathbb{N}_0$, *то существуют постоянные* $C_0>0$ *и* $n_0\in\mathbb{N}$, *зависящие от* n,m,a *и* α,β, *такие, что при всех* $n>n_0$ *выполняется оценка*

$$|\sqrt{n}\gamma(n)|\geq C_0>0. \tag{38}$$

Если для указанных в лемме 0.2.1 чисел $\widetilde{\alpha}_q$ $E(s)=0$ при некоторых $n=s=$ $=r_1,r_2,...r_h$, где $1\leq r_1<r_2<...<r_h\leq n_0$, r_h и h – натуральные числа, то для разрешимости задачи Келдыша необходимы и достаточны следующие условия:

$$\varphi_s\sqrt{\alpha}J_{\frac{1}{2q}}(p_s\alpha^q)+\psi_s\sqrt{\beta}I_{\frac{1}{2q}}(p_s\beta^q)=0,\quad s=r_1,r_2,...r_h. \tag{39}$$

Решение задачи (23) – (26) в этом случае определяется в виде суммы ряда

$$u(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{r_1-1}+...+\sum_{n=r_{h-1}+1}^{r_h-1}+\sum_{n=r_h+1}^{+\infty}\right)u_n(y)X_n(x)+\sum_s u_s(x,y), \tag{40}$$

здесь в последней сумме s принимает значения $r_1,r_2,...r_h$, функция $u_s(x,y)$ определяются по следующей формуле:

$$u_s(x,y)=\begin{cases}\left[\frac{\varphi_s\sqrt{y}I_{\frac{1}{2q}}(p_sy^q)}{\sqrt{\beta}I_{\frac{1}{2q}}(p_s\beta^q)}+\frac{C_sE_s(\alpha,y)}{J_{\frac{1}{2q}}(p_s\alpha^q)}\right]X_s(x),\quad y>0,\\ \left[\frac{\psi_s\sqrt{-y}J_{\frac{1}{2q}}(p_s(-y)^q)}{\sqrt{\alpha}J_{\frac{1}{2q}}(p_s\alpha^q)}+\frac{C_sE_s(-y,\beta)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_s\beta^q)}\right]X_s(x),\quad y<0,\end{cases}$$

где C_s – произвольные постоянные, конечные суммы в (40) следует считать равными нулю, если нижний предел больше верхнего.

Таким образом, доказана

Теорема 0.2.2. *Пусть функции* $\varphi(x),\psi(x)\in C^4[0,l]$ *и* $\varphi'(0)=\psi'(0)=$ $=\varphi''(0)=\psi''(0)=0$, $\varphi(l)=\psi(l)=\varphi''(l)=\psi''(l)=0$, *и выполнена оценка*

(38) при $n > n_0$. Тогда если $E(n) \neq 0$ при всех $n = \overline{1, n_0}$, то существует единственное решение задачи (23) – (26), и это решение определяется рядом (35); если $E(n) = 0$ при некоторых $n = r_1, r_2, \ldots r_h \leq n_0$, то задача (23) – (26) разрешима только тогда, когда выполняются условия (39) и решение в этом случае определяется рядом (40).

Аналогичные результаты получены для остальных задач 1.2, 2.1, 2.2, 2.4, а именно установлены критерии единственности, решения построены в виде суммы рядов, обоснована сходимость рядов в классе регулярных решений.

Публикации по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК

1. Сафина, Р.М. Критерий единственности решения задачи Дирихле с осевой симметрией для трехмерного уравнения смешанного типа с оператором Бесселя / Р. М. Сафина // Изв. вузов. Математика. — 2014. — № 6. — С. 78 – 83.

2. Сафина, Р.М. Задача Дирихле для уравнения Пулькина в прямоугольной области / Р. М. Сафина // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучн.сер., — 2014. — № 10. — С. 91 – 101.

3. Сафина, Р.М. Задача Келдыша для уравнения Пулькина в прямоугольной области / Р. М. Сафина // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучн.сер., — 2015. — № 3. — С. 53 – 64.

4. Сафина, Р.М. Задача Келдыша для уравнения смешанного типа второго рода с оператором Бесселя / Р. М. Сафина // Дифференциальные уравнения, — 2015. — Т.51, № 10. — С. 1354 – 1366.

Публикации в других изданиях

5. Сафина, Р. М. О постановке задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с оператором Бесселя / Р. М. Сафина // Международная конференция, посвященная 100 - летию С.Л.Соболева "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений"(Новосибирск, 5 - 12 октября 2008 г.): Тез. докладов / Ин - т математики СО РАН. Новосибирск, — 2008. С. — 202.

6. Сафина, Р. М. Решение задачи N для одного B – эллиптического уравнения методом функции Грина / Р. М. Сафина // Материалы международной конференции, посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего. — М: Изд-во "Университетская книга". 2009. — С. 205 – 206.

7. Сафина, Р. М. О задаче Дирихле для уравнения Пулькина в прямоугольной области / Р. М. Сафина // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского: материалы Международной научной конференции "Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций – 2014". — Казань: Изд-во Казан. Ун-та. — 2014. — Т.49 — С. 298–301.

8. Сафина, Р. М. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода с сингулярным коэффициентом / Р. М. Сафина // Материалы Двенадцатой международной Казанской летней научной школы – конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы". – 2015. — Т.51 — С. 249 – 251.

9. Сафина, Р. М. Задача Келдыша для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в прямоугольной области / Р. М. Сафина // Тезисы докладов международной конференции "Дифференциальные уравнения и математическое моделирование". – Улан-Удэ — 2015. — С. 270 – 271.