На правах рукописи

ХАЛИУЛЛИНА АЙГУЛЬ РИМЗИЛОВНА

КОНГРУЭНЦИИ ПОЛИГОНОВ НАД ПОЛУГРУППАМИ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2015

Работа выполнена на кафедре «Высшая математика –1» ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МИЭТ».

Научный руководитель: **Кожухов Игорь Борисович**,
доктор физико-математических наук
профессор

Официальные оппоненты: **Степанова Алёна Андреевна**,
доктор физико-математических наук,
профессор (ФГАОУ ВПО Дальневосточный федеральный университет

Карташова Анна Владимировна,
кандидат физико-математических наук,
доцент (ФГБОУ ВПО Волгоградский государственный социально-педагогический университет)

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Защита состоится 17 декабря 2015 г. в 16:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.081.24 при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, ауд. 1011 2-го корпуса КФУ.
С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» и на сайте kpfu.ru
Автореферат разослан «__» __________ 2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.081.24, к.ф.-м.н., доцент Еникеев А.И.

Общая характеристика работы

Актуальность исследования. Полигоны над полугруппами, т.е. множества, на которых действуют полугруппы, встречаются в разных разделах математики и её приложений. В частности, всякая универсальная алгебра является полигоном над полугруппой своих эндоморфизмов. Аналогичное имеет место для графа, частично упорядоченного множества и т.д. Всякая полугруппа является полигоном над собой. Основные идеи теории полигонов нашли своё отражение в монографии [1].

Следует отметить, что полигон X над полугруппой S можно рассматривать как алгебраическую модель автомата Мура [2], при этом X – множество состояний автомата, а S – множество входных сигналов (см. также гл. 6 в [3]).

Кроме того, полигон над полугруппой является унарной алгеброй, так как умножения на элементы полугруппы можно рассматривать как унарные операции. Обратное также верно: если X – унарная алгебра с множеством унарных операций Σ, то нетрудно построить полугруппу S, над которой X будет являться полигоном (при этом Σ окажется порождающим множеством полугруппы S).

Конгруэнции универсальной алгебры играют важную роль в структурной теории, поскольку конгруэнции – это то же самое, что ядра гомоморфизмов данного полигона в другие. Конгруэнции алгебры A относительно теоретико-множественного включения образуют решётку $\mathrm{Con}A$, являющуюся подрешёткой решётки отношений эквивалентности. Эта решётка несёт большую информацию о строении алгебры. Она имеет определённые связи с решёткой топологий и решёткой квазипорядков алгебры A[4]. Решётки конгруэнций полигонов над полугруппами или, что то же самое,

[1] *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V.* Monoids, acts and categories. W. de Gruyter, Berlin – N.Y., 2000.

[2] *Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С.* Введение в теорию автоматов. М., «Наука», 1985.

[3] *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. М., «Мир», 1985.

[4] *Карташова А.В.* О решётках квазипорядков и топологий алгебр. Фунд. и прикл. иатем., 2008, т. 14, вып. 5, с. 85-92.

решётки конгруэнций унарных алгебр изучались в ряде работ [5,6]. Решётка конгруэнций полигона (унарной алгебры) имеет тесную связь с группой автоморфизмов [7]. Вместе с тем теория конгруэнций полигонов всё ещё находится лишь на начальной стадии развития. Поэтому изучение конгруэнций полигонов представляется актуальной математической задачей.

В работе [8] были описаны полигоны над регулярными рисовскими матричными полугруппами $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ (т.е. вполне 0-простыми полугруппами). Все правые конгруэнции на этих полугруппах были описаны Р.Оэмке [9]. Это можно считать описанием конгруэнций свободного циклического полигона над вполне 0-простой полугруппой. Описание конгруэнций произвольных полигонов над вполне 0-простыми или вполне простыми полугруппами представляется довольно сложной задачей. Поэтому естественно рассматривать частные случаи таких полугрупп. Данная работа делает первый шаг в построении теории конгруэнций полигонов над вполне (0-)простыми полугруппами. А именно, нами получены описания конгруэнций полигонов над группами и над полугруппами правых (левых) нулей.

Подпрямо неразложимые универсальные алгебры, т.е. алгебры, не разлагающиеся в нетривиальное подпрямое произведение алгебр, всегда привлекали внимание математиков. Интерес к ним объясняется теоремой Биркгофа, утверждающей, что любая алгебра изоморфна подпрямому произведению подпрямо неразложимых алгебр. Подпрямо неразложимые полигоны исследовались в [10]. В [11] были описаны подпрямо неразложимые коммутативные автоматы, что дало также описание подпрямо неразло-

[5] *Карташова А.В.* О решётках конгруэнций и топологий унарных алгебр. Чебыш. сб., 2011, т. 12, вып. 2, с. 27-33.

[6] *Птахов Д.О., Степанова А.А.* Решётки конгруэнций полигонов. Дальневост. матем. журнал, 2013, т. 13, No 1, с. 107-115.

[7] *Radeleczki S.* The automorphism group of unary algebras. Math. Pannonica, 1996, v. 7, No 2, p. 253-271.

[8] *Avdeyev A. Yu., Kozhukhov I. B.* Acts over completely 0-simple semigroups. Acta Cybernetica, 2000. V. 14. N. 4. P. 523–531.

[9] *Ohemke R. H.* Congruences and semisiplicity for Rees matrix semigroups. Pacif. J. Math. 1974. T. 54, № 2. P. 143–164.

[10] *Ройз Е.Н.* О подпрямо неразложимых монарах. Межвуз. научн. сб. "Упорядоченные множества и решётки Саратов, 1874, вып. 2, с. 80-84.

[11] *Ésik Z., Imreh B.* Subdirectly irreducible commutative automata. Acta Cybernetica. 1981. V. 5. №. 1. P. 251–260.

жимых коммутативных полугрупп. В диссертации вопрос о подпрямой неразложимости произвольного полигона над полугруппой сводится к вопросу о подпрямой неразложимости его ядра – наименьшего ненулевого подполигона. Исчерпывающая характеризация даётся для полигонов над прямоугольными связками.

Кажется естественным изучение полигонов с заданными условиями на их решётки конгруэнций. Условиям дистрибутивности или модулярности решёток конгруэнций различных универсальных алгебр, а также условиям, когда конгруэнции образуют цепь, посвящено значительное количество статей. Цепные и дистрибутивные кольца и модули – это целое направление теории колец [12,13]). Унары с дистрибутивной, модулярной решёткой конгруэнций и с решёткой конгруэнций, являющейся цепью, полностью описаны в[14]. В работе[15] были описаны полугруппы, у которых левые конгруэнции образуют цепь. Решётки конгруэнций несвязных полигонов над полугруппами изучались в[16]. Пользуясь этими результатами, мы получаем описание полигонов над полугруппами правых или левых нулей, имеющих дистрибутивную, модулярную или линейно упорядоченную решётку конгруэнций.

Понятие полигона над полугруппой аналогично понятию модуля над кольцом, ввиду чего теория полигонов развивается под большим влиянием теории колец и модулей. Инъективные и проективные объекты могут быть определены в любом многообразии универсальных алгебр, а в гомологической теории колец понятия инъективного и проективного модуля занимают центральное место. Аналогично модулям определяются инъективные и проективные полигоны, а также инъективная оболочка и проективное накрытие полигона[17]). Как и в теории колец, инъективная

[12] *Туганбаев А. А.* Строение дистрибутивных колец. Мат. сборник. 2002. Вып. 193. № 5.С. 113–128.

[13] *Туганбаев А. А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца. М., МЦНМО, 2009.

[14] *Егорова Д. П.* Структура конгруэнций унарной алегбры. Межвуз. научн. сб. «Упорядоченные множества и решётки». Саратов, 1978, вып. 5, с. 11–44.

[15] *Kozhukhov I. B.* Left chain semigroups. Semigroup Forum. 1981. V. 222. №. 1. P. 1–8.

[16] *Птахов Д. О., Степанова А. А.* Решётки конгруэнций полигонов. Дальневост. матем. журнал, 2013, т. 13, № 1, с. 107–115.

[17] *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V.* Monoids, acts and categories. Berlin, N.Y.: W. de Gruyter, 2000. 529 p

оболочка существует у любого полигона, а проективное накрытие – нет.

В работе [18] была построена инъективная оболочка произвольного полигона над полугруппой. Инъективные оболочки полигонов над полурешётками групп были построены в [19]. В работе [20] изучались инъективные полигоны над полугруппой левых нулей, а в [21] было получено описание сепарабельных инъективных полигонов и инъективных оболочек произвольных сепарабельных полигонов над полугруппами левых нулей. В диссертации получено описание инъективных и проективных полигонов над группами, полугруппами правых и левых нулей (без предположения о сепарабельности), а также построены инъективная оболочка и проективное накрытие произвольных полигонов над этими полугруппами.

В работах[22,23] изучались полугруппы, все полигоны над которыми аппроксимируются конечными, а также полугруппы, полигоны над которыми аппроксимируются конечными ограниченных в совокупности порядков. Было доказано, что все полигоны над полугруппой S аппроксимируются полигонами из не более двух элементов в том и только том случае, когда S – полурешётка. Исследования диссертации продолжают упомянутые исследования. В частности, доказана равномерная локальная конечность полугрупп, все полигоны над которыми аппроксимируются полигонами из не более, чем n элементов.

Цели настоящей работы заключаются в исследовании свойств полигонов над полугруппами специального вида (группами, полугруппами правых и левых нулей, прямоугольными связками): исследование их решёток конгруэнций, условий инъективности и проективности, неразложимости в подпрямое произведение, финитной аппроксимируемости и т.д.

---

[18] *Berthiaume P.* The injective envelope of S-sets. Canad. Math. Bull., 1967, v. 10, no. 2, p. 261-273.

[19] *Kim J. P., Park Y. S.* Injective hulls of S-systems over a Clifford semigroup. Semigroup Forum, 1991, v. 43, no. 1, p. 19-24.

[20] *Ebrahimi M. M., Mahmoudi M., Moghaddasi Gh.* Injective hulls of acts over left zero semigroups. Semigroup Forum, 2007, v. 75, no. 1, pp. 212-220.

[21] *Moghaddasi Gh.* On injective and subdirectly irreducible S-acts over left zero semigroups. Turk J. Math., 2012, v. 36, p. 359-365.

[22] *Кожухов И. Б.* Условия конечности для подпрямо неразложимых полигонов и модулей. Фунд. и прикл. матем. 1998. Т. 4. № 2. С. 763–767.

[23] *Kozhukhov I. B.* One characteristical property of semilattices. Commun. Algebra, 1997, v. 25, №. 8, p. 2569–2577

Методы исследования. В работе использованы методы алгебраической теории полугрупп, теории полигонов, теории решёток и универсальной алгебры.

Научная новизна и положения выносимые на защиту. В диссертации получены следующие новые результаты, которые выносятся на защиту:

- Описаны конгруэнции полигонов над группами, над полугруппами правых и левых нулей.

- Получены условия инъективности и проективности полигонов над группами, над полугруппами правых и левых нулей.

- Охарактеризованы подпрямо неразложимые полигоны над произвольными полугруппами и описаны подпрямо неразложимые полигоны над прямоугольными связками.

- Доказана равномерная локальная конечность одного класса полугрупп, содержащего полугруппы S, над которыми все правые S–полигоны аппроксимируются полигонами из n или меньшего числа элементов.

- Получены условия модулярности, дистрибутивности решёток конгруэнций полигонов над полугруппами правых или левых нулей, а также условия, при которых решётка конгруэнций является цепью.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения полигонов над полугруппами.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались на научно-исследовательском семинаре "Кольца, модули и матрицы" кафедры высшей алгебры МГУ им. М.В. Ломоносова, на 20-й Всеросс. межвуз. научно-техн. конф. студентов и аспирантов "Микроэлектроника и информатика - 2013" (Москва, МИЭТ, 2013), на 9-й Междунар. алгебр. конф. на Украине (Львов, 2013), на 12-й Междунар. конференции "Алгебра и теория чисел", посв. 80-летию проф. Латышева В.Н. (Тула, 2014), на Междунар. симпозиуме "Абелевы группы", посв. 100-летию со дня рожд. проф. Куликова Л.Я. (Москва, МПГУ, 2014).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 10 работ: ([1] – [10]), из них 4 статьи ([1], [3], [4], [6]) в журналах из списка ВАК.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на 12 параграфов, и списка литературы. Текст диссертации изложен на 96 страницах. Список литературы содержит 48 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** даётся обзор результатов по исследуемым проблемам и кратко формулируются основные результаты диссертации.

Первая глава диссертации посвящена изучению конгруэнций полигонов над полугруппами специального вида (группой, полугруппой правых нулей и полугруппой левых нулей).

Полигоном над полугруппой S (или S-полигоном) называется множество X, на котором задано действие полугруппы S, т.е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при $x \in X$, $s, t \in S$. Если полугруппа S имеет единицу e и для S-полигона X выполняется равенство $xe = x$ при $x \in X$, то полигон X называется *унитарным.*

Следующая теорема сводит описание конгруэнций произвольного полигона над группой к описанию конгруэнций унитарного полигона.

Теорема 1. *(Теорема 1.2) Пусть X – произвольный полигон над группой G, $X = Y \cup A$, $Y = Xe$ (e – единица группы G), $A \cap Y = \varnothing$. Пусть $\varphi : A \to Y$ – отображение такое, что $\varphi(a) = ae$ при всех $a \in A$. Пусть ρ – конгруэнция полигона Y и $\{K_i \,|\, i \in I\}$ – множество классов конгруэнции ρ. Выберем в каждом множестве $\varphi^{-1}(K_i)$ какое-либо подмножество Z_i (возможно, пустое) и разобьём оставшееся множество $\varphi^{-1}(K_i) \setminus Z_i$ на какие-либо подмножества: $\varphi^{-1}(K_i) \setminus Z_i = \bigcup_{j \in J_i} \widetilde{K_{ij}}$. Положим $\widetilde{K_i} = K_i \cup Z_i$,*

$$\widetilde{\rho} = \bigcup_i (\widetilde{K_i} \times \widetilde{K_i}) \cup \bigcup_i \bigcup_{j \in J_i} (\widetilde{K_{ij}} \times \widetilde{K_{ij}}). \qquad (1)$$

Тогда $\widetilde{\rho}$ – конгруэнция полигона X. Кроме того, любая конгруэнция полигона X получается таким образом.

Описание конгруэнций унитарного полигона над группой даёт следующая теорема.

Теорема 2. *(Теорема 1.5) Пусть G – группа, H_i $(i \in I)$ – её подгруппы, $X = \coprod_{i \in I} G/H_i$. Пусть задано отношение эквивалентности σ на множестве индексов I, для каждого $i \in I$ задана подгруппа $H'_i \supseteq H_i$ группы G, для каждой пары $(i,j) \in \sigma$ заданы элементы $a_{ij} \in G$, причём $a_{ji} = a_{ij}^{-1}$, $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ и $H'_j = a_{ij}^{-1} H'_i a_{ij}$. Тогда*

$$\rho = \{(H_i b, H_j c) \,|\, b, c \in G \text{ и } c \in H'_j a_{ij}^{-1} b\} \qquad (2)$$

– конгруэнция полигона X. Кроме того, всякая конгруэнция полигона X имеет вид (2).

Теперь рассмотрим конгруэнции полигонов над полугруппами правых (левых) нулей.

Описание конгруэнций полигонов над данными полугруппами дают следующие ниже теоремы 3 и 4. Пусть X – полигон над полугруппой S, $X = \coprod_{i \in I} X_i$ – его разложение в копроизведение конеразложимых полигонов. Для подмножества $J \subseteq I$ пусть ρ_J обозначает отношение эквивалентности, порождённое парами (xs, ys) при $x \in X_i$, $y \in X_j$, $i, j \in J$, $s \in S$.

Теорема 3. *(Теорема 1.13) Пусть X – полигон над полугруппой правых нулей S, $X = \coprod_{i \in I} X_i$ – его разложение в копроизведение конеразложимых полигонов. Пусть $Y_s = Xs$ $(s \in S)$, σ – отношение эквивалентности с классами X_i. Рассмотрим произвольное отношение эквивалентности τ на множестве I. Пусть $I = \bigcup\{J_\alpha \,|\, \alpha \in \Omega\}$ – разложение множества I на классы отношения эквивалентности τ. Для каждого $\alpha \in \Omega$ возьмём какое-либо отношение эквивалентности ρ'_α на* *множестве* $\bigcup\{X_i \,|\, i \in J_\alpha\}$, *удовлетворяющее условию* $\rho'_\alpha \supseteq \rho_{J_\alpha}$. *Тогда* $\rho = \bigcup\{\rho'_\alpha \,|\, \alpha \in \Omega\}$ – *конгруэнция полигона* X. *И обратно, каждая конгруэнция полигона* X *имеет такой вид.*

Теорема 4. *(Теорема 1.17) Пусть* X – *правый полигон над полугруппой левых нулей* S, $Y = XS$, $A = X \setminus Y$, $\varphi_s : A \to Y$ *(для* $s \in S$*)* – *отображения такие, что* $a\varphi_s = as$ *имеют тот же смысл, что в предыдущей теореме. Возьмём любое отношение эквивалентности* σ *на множестве* Y. *Для* $s \in S$ *пусть* $\sigma\varphi_s^{-1} = \{(a,b)|(a\varphi_s, b\varphi_s) \in \sigma\}$, $\widetilde{\sigma} = \bigcap_{s\in S}\sigma\varphi_s^{-1}$. *Для каждого класса* K *отношения* σ *пусть* $A_K = \bigcap_{s\in S} K\varphi_s^{-1}$ *(это множество может быть пустым). Возьмём для каждого* K *какое-либо подмножество* $A'_K \subseteq A_K$ *и положим* $Z_K = K \cup A'_K$. *Пусть* σ' – *любое отношение эквивалентности на множестве* $A \setminus \bigcup_K A'_K$, *содержащееся в* $\widetilde{\sigma}$. *Тогда* $\rho = \bigcup_K (Z_K \times Z_K) \cup \sigma'$ – *конгруэнция полигона* X. *Кроме того, любая конгруэнция* ρ *полигона* X, *для которой* $\rho|_Y = \sigma$, *устроена таким образом.*

Вторая глава диссертации посвящена изучению подрямо неразложимых полигонов.

Обозначим через Δ_X отношение равенства на множестве X, т.е. $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\}$. Элемент θ полигона X над полугруппой S называется нулём, если $\theta s = \theta$ для всех $s \in S$. Ядро подпрямо неразложимого полигона (т.е. наименьший ненулевой подполигон) обозначим через K. Монолит $\rho_0(X)$ подпрямо неразложимого Определим условия подпрямой неразложимости полигона над произвольными полугруппами в случае когда полигон имеет нуль и не имеет.

Теорема 5. *(Теорема 2.5) Пусть* X – *полигон над полугруппой* S. *Предположим, что* X *имеет единственный нуль* θ, *а также наименьший ненулевой подполигон* K, *причём* $|K| > 2$. *Тогда* X *является подпрямо неразложимым в том и только в том случае, если выполняются условия:*

(a) полигон K *подпрямо неразложим;*

(b) для любых $x, y \in X \setminus \theta$, таких, что $x \neq y$, выполняется хотя бы одно из следующих условий:

(i) $\exists s \in S$ $(xs \neq ys$ & $\theta \in \{xs, ys\})$;

(ii) $x, y \notin K$, $\{xs, ys\} \cap K \neq \emptyset$ *и* $xs \neq ys$ *при некотором* $s \in S$;

(iii) $x \in K$, $y \notin K$, $ys = yt \notin K$, $xs \neq xt$ *при некоторых* $s, t \in S^1$;

(iv) $x \notin K$, $y \in K$, $xs = xt \notin K$, $ys \neq yt$ *при некоторых* $s, t \in S^1$;

(v) $xs \neq ys$ *и* $xs, ys \in K \setminus \{\theta\}$ *при некотором* $s \in S^1$.

При этом если существуют такие элементы $x, y \in X \setminus \{\theta\}$, что $x \neq y$ и $xs = \theta \Leftrightarrow ys = \theta$ при всех $s \in S$, то $\rho_0(X) \subseteq ((K \setminus \{\theta\}) \times (K \setminus \{\theta\})) \cup \Delta_X$, а если таких элементов x, y нет, то $\rho_0(X) = \rho_K = (K \times K) \cup \Delta_X$.

Теорема 6. *(Теорема 2.8) Пусть X – полигон без нуля и K – наименьший подполигон полигона X. Тогда X подпрямо неразложим в том и только в том случае, если K подпрямо неразложим и для любых $x, y \in X$ таких, что $x \neq y$, выполнено одно из следующих условий:*

(i) $xs, ys \in K$ *и* $xs \neq ys$ *при некотором* $s \in S^1$;

(ii) $xs, xt \in K$, $xs \neq xt$, $ys = yt$ *при некоторых* $s, t \in S^1$;

(iii) $ys, yt \in K$, $ys \neq yt$, $xs = xt$ *при некоторых* $s, t \in S^1$.

Что касается полигонов над прямоугольными связками, то для них можно получить условие подпрямой неразложимости в окончательном виде.

Напомним, что *прямоугольной связкой* называется прямое произведение $L \times R$, где L – полугруппа левых нулей, а R – полугруппа правых нулей. Прямоугольную связку можно определить также как полугруппу, удовлетворяющую тождествам $x^2 = x$ и $xyz = xz$ или как полугруппу, удовлетворяющую квазитождеству $xy = yx \to x = y$.

Теорема 7. *(Теорема 2.14) Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$ и $|X| > 2$. Пусть Q и κ_r $(r \in R)$ имеют тот же смысл, что в теореме 2.9. Тогда X подпрямо неразложим в том и только в* *том случае, если $Q = \{q_1, q_2\}$ – двухэлементное множество, а множества $A = \{q_1\kappa_r : r \in R\}$, $B = \{q_2\kappa_r : r \in R\}$ удовлетворяют одному из следующих условий:*

(i) $|A| = |B| = 1$, *скажем,* $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, *и для любых* $x \neq y$ *существует такое* $s \in S$, *что* $\{xs, ys\} = \{a, b\}$;

(ii) $|A| = 2$, $|B| = 1$, *скажем* $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b\}$; $xS \cap A \neq \emptyset$ *при* $x \neq b$ *и для любых* $x, y \neq b$ *если* $x \neq y$ *и* $\{x, y\} \neq A$, *то* $xs \neq ys$ *при некотором* $s \in S$;

(iii) $|A| = 1$, $|B| = 2$ – *условие, двойственное условию (ii).*

Третья глава диссертации посвящена изучению свойств инъективности и проективности полигонов над полугруппами.

Дадим определение инъективности и проективности полигона. Полигон X над полугруппой S называется *инъективным*, если для любого инъективного гомоморфизма $\alpha : A \to B$ и гомоморфизма $\varphi : A \to X$ существует гомоморфизм $\psi : B \to X$ такой, что $\alpha\psi = \varphi$. *Инъективной оболочкой* полигона X называется минимальное инъективное расширение полигона X. Полигон X называется *проективным*, если для любого сюръективного гомоморфизма $\alpha : A \to B$ и гомоморфизма $\varphi : X \to B$ существует гомоморфизм $\psi : X \to A$ такой, что $\psi\alpha = \varphi$. *Проективным накрытием* полигона X называется проективный полигон Y, имеющий сюръективный гомоморфизм $\pi : Y \to X$ такой, что для любого собственного подполигона $Y_1 \subset Y$ ограничение $\pi|_{Y_1}$ не является сюръективным.

Далее были получены условия инъективности и проективности полигона над группой.

Теорема 8. *(Теорема 3.6) Полигон над группой инъективен в том и только том случае, если он имеет нуль.*

Теорема 9. *(Теорема 3.10) Полигон X над группой G проективен в том и только том случае, если $X \cong \coprod_i X_i$, где для каждого $i \in I$ либо $X_i \cong G$, либо $X_i \cong G \cup \{1\}$ (здесь 1 – новая единица, отличная от единицы e группы G).*

Далее, были рассмотрены полигона над полугруппами правых нулей. Ниже приведены условия инъективности и проективности таких полигонов.

Теорема 10. *(Теорема 3.13) Полигон над полугруппой правых нулей является инъективным в том и только том случае, если он содержит нуль.*

Теорема 11. *(Теорема 3.15) Пусть X – полигон над полугруппой правых нулей S и $X = \coprod_{q\in Q} X_q$ – разложение на конеразложимые подполигоны. Пусть $Y = XS$, $Y_q = X_q \cap Y$ при $q \in Q$. Полигон X является проективным в том и только том случае, если выполняются условия:*

(i) $ys = yt \Rightarrow s = t$ при любых $y \in Y$, $s, t \in S$;

(ii) $|X_q \setminus Y_q| \leq 1$ при всех $q \in Q$.

Наконец, условия инъективности и проективности были получены также для полигонов над полугруппами левых нулей.

Теорема 12. *(Теорема 3.17) Пусть X – полигон над полугруппой левых нулей S и $Z = XS$. Полигон X является инъективным в том и только том случае, если для любого $\omega \in Z^S$ существует $x \in X$ такое, что $xs = \omega s$ при всех $s \in S$.*

Теорема 13. *(Теорема 3.19) Полигон X над полугруппой левых нулей S проективен в том и только том случае, если для любых $x, y \in X \setminus XS$ и $s, t \in S$ истинна импликация $xs = yt \Rightarrow x = y \ \wedge \ s = t$.*

Четвертая глава диссертации посвящена изучению полугрупп с финитно аппроксимируемыми полигонами.

Следуя А.Г.Пинусу[24], назовём универсальную алгебру *равномерно локально конечной*, если существует функция $h(t)$ такая, что порядки t-порождённых подалгебр не превышают $h(t)$. Аналогично этому полугруппу можно назвать *равномерно периодической*, если она удовлетворяет тождеству $x^{p+q} = x^p$.

[24] *Pinus A. G.* Inner homomorphisms and positive-conditional terms. Algebra and Logic, 2001. V. 40. N. 2. P. 158–173.

Кожуховым И. Б.[25,26] изучались полугруппы, все полигоны над которыми аппроксимируются полигонами из не более n элементов. Для полугрупп последнего из упомянутых классов удалось доказать их равномерную локальную конечность.

Следующая теорема является известным фактом, но оценки порядков t-порождённых подалгебр, по-видимому, ранее не производились. Нам понадабятся эти оценки для полигонов.

Теорема 14. *(Теорема 4.8) Пусть A – универсальная алгебра конечной сигнатуры. Если A аппроксимируется алгебрами A_i $(i \in I)$ конечных ограниченных в совокупности порядков, то A равномерно локально конечна. При этом если $|A_i| \leq n$ при всех $i \in I$, то подалгебра, порождённая t элементами, имеет не более $\exp(\psi(n) \cdot n^t \cdot \ln n)$ элементов, где $\psi(n)$ – количество неизоморфных алгебр данной сигнатуры порядков, не превосходящих n.*

Пятая глава диссертации посвящена изучению решёток конгруэнций полигонов над полугруппами правых и левых нулей. Точнее изучались условия модулярности, дистрибутивности решётки и условия когда решётка является цепью.

Напомним, что решётка L называется *дистрибутивной*, если $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ для любых $x, y, z \in L$, и *модулярной*, если это равенство выполнено при $x \leq z$. Дадим необходимое для дальнейшего изложения определение. Конгруэнция ρ полигона X называется *сквозной*, если X представим в виде $X = Y \sqcup Z$ и существуют такие элементы $y_1, y_2 \in Y$, $z_1, z_2 \in Z$, что $(y_1, y_2), (z_1, z_2) \notin \rho$, а $(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \rho$.

Центральную роль в дальнейшем будет иметь следующее утверждение.

Предложение 15. *(Предложение 5.2)(лемма 2.4[27]) Если полигон X имеет сквозную конгруэнцию, то решётка $ConX$ не модулярна.*

[25] *Кожухов И. Б.* Условия конечности для подпрямо неразложимых полигонов и модулей. Фунд. и прикл. матем. 1998. Т. 4. № 2. С. 763–767.

[26] *Kozhukhov I. B.* One characteristical property of semilattices. Commun. Algebra. 1997. V. 25. №. 8. P. 2569–2577

[27] *Птахов Д. О., Степанова А. А.* Решётки конгруэнций полигонов. Дальневост. матемем. журнал. 2013, Т. 13. № 1. С. 107–115.

Теперь приведём условия модулярности и дистрибутивности решётки конгруэнций полигонов над полугруппами левых нулей.

Теорема 16. *(Теорема 5.7) Пусть X – полигон над полугруппой левых нулей S, $Y = XS$, $A = X \setminus Y$. Решётка $ConX$ модулярна в том и только том случае, если $|Y| \leq 3$, $|A| \leq 2$ и $aS \cap bS \neq \emptyset$ при $a, b \in A$ и $a \neq b$.*

Теорема 17. *(Теорема 5.10) Пусть X – полигон над полугруппой левых нулей S. Тогда решётка $ConX$ дистрибутивна в том и только том случае, если $|X| \leq 2$ либо $X \cong \{a, 1, 2\}$, где 1 и 2 – нули и $aS \subseteq \{1, 2\}$. При $|X| \leq 2$ решётка $ConX$ является одно- или двухэлементной цепью, а если $X \cong \{a, 1, 2\}$, то решётка $ConX$ является трёхэлементной цепью $\{\Delta, (12), \nabla\}$ при $|aS| = 2$ и прямым произведением двух двухэлементных цепей при $|aS| = 1$ ($ConX = \{\Delta, (12), (a1), \nabla\}$, если считать, что $aS = \{1\}$).*

Условие, когда решётка конгруэнций полигона над полугруппой левых нулей является цепью, представлено в следующей теореме.

Теорема 18. *(Теорема 5.11) Пусть X – полигон над полугруппой левых нулей S. Решётка $ConX$ является цепью в том и только том случае, если $|X| \leq 2$ либо $X \cong \{a, 1, 2\}$, где $aS = \{1, 2\}$.*

Перейдём к конгруэнциям полигонов над полугруппами правых нулей. Здесь изучались аналогичные свойства решёток конгруэнций. Основные результаты исследования приведены ниже.

Теорема 19. *(Теорема 5.16) Пусть X – полигон над полугруппой правых нулей S, $X = \coprod_{i \in I} X_i$ – разложение в копроизведение копрямо неразложимых подполигонов, $Y_i = X_i \cap XS$. Пусть $X_i s = \{y_{is}\}$. При $i \neq j$ построим двудольный граф Γ_{ij}, у которого множество вершин есть $Y_i \cup Y_j$, а рёбрами являются пары (y_{is}, y_{js}) при $s \in S$. Решётка $ConX$ модулярна в том и только том случае, если выполнены условия:*

(i) $|I| \leq 3$;

(ii) $|X_i| \leq 3$ *для любого* $i \in I$;

(iii) если $X_i \neq Y_i$ при некотором i, то $X_j = Y_j$ при всех $j \neq i$;

(iv) для любых $i \neq j$ граф Γ_{ij} связен.

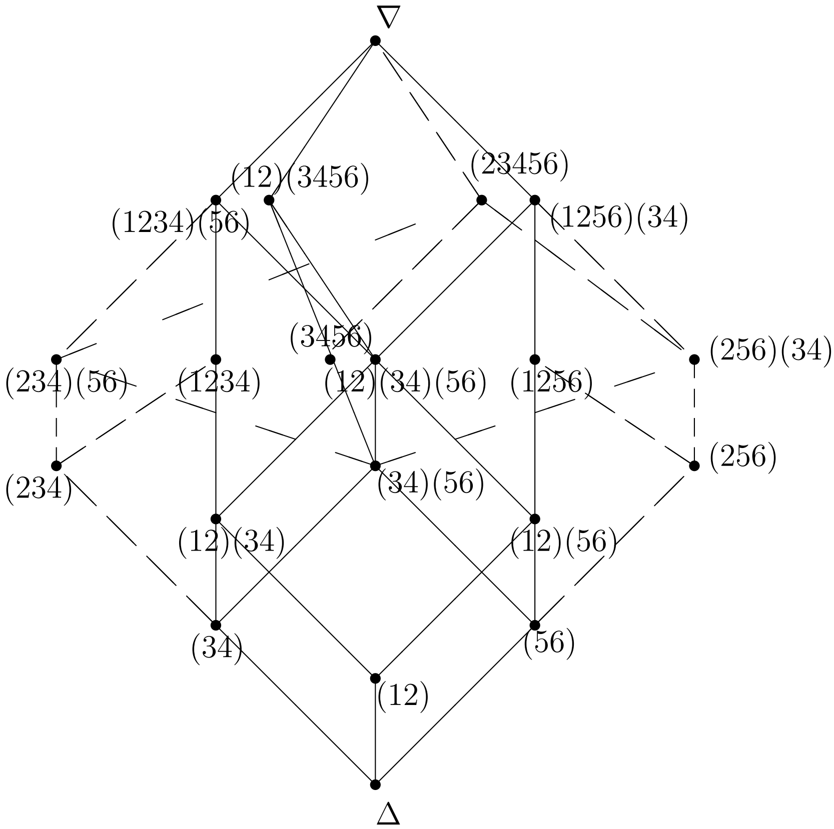

Рис. 1: Решётка конгруэнций Con$X$ в теореме 5.16

Теорема 20. *(Теорема 5.17) Пусть X – полигон над полугруппой правых нулей S, $X = \coprod_{i \in I} X_i$ – разложение в копроизведение копрямо неразложимых подполигонов, $Y_i = X_i \cap XS$. Решётка конгруэнций $ConX$ дистрибутивна в том и только том случае, если выполнены условия:*

(i) $|I| \leq 2$;

(ii) $|X_i| \leq 2$ для каждого $i \in I$;

(iii) если $X = X_1 \sqcup X_2$, то либо $Y_1 = X_1$, либо $Y_2 = X_2$;

(iv) граф Γ_{12} связен.

Следствие 21. *(Следствие 5.18) Пусть X – полигон над полугруппой правых нулей S. Тогда решётка $ConX$ является цепью в том и только* *том случае, если* $|X| \leq 2$ *или* $X \cong \{y, c, d\}$, *где* $yS = \{y\}$, $cS = dS = \{c, d\}$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, профессору Игорю Борисовичу Кожухову за постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] *Халиуллина А. Р.* Конгруэнции полигонов над группами. Известия Сарат. ун-та. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013, т. 13, вып. 4, ч. 2, с. 133–137.

[2] *Халиуллина А. Р.* Конгруэнции полигонов над полугруппами правых нулей. Чебышевский сборник, Тула, 2013, т. 13, вып. 3, с. 142–146.

[3] *Кожухов И. Б., Халиуллина А. Р.* Характеризация подпрямо неразложимых полигонов. Прик. дискр. матем., 2015, № 1, с. 5–16.

[4] *Кожухов И. Б., Халиуллина А. Р.* Полугруппы с финитно аппроксимируемыми полигонами. Математические заметки СВФУ, 2014, т. 21, № 3(83), с. 60–67.

[5] *Кожухов И. Б., Халиуллина А. Р.* Инъективность и проективность полигонов над сингулярными полугруппами. Электронные информационные системы, 2014, № 2(2), с. 45–56.

[6] *Халиуллина А. Р.* Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых и левых нулей. Дальневост. матем. журнал, 2015, т. 15, № 1, с. 102-120.

[7] *Халиуллина А. Р.* Конгруэнции полигонов над группами. Материалы 20-ой Всероссийской межвузовской научно-технической конференции студентов и аспирантов «Микроэлектроника и информатика - 2013», Москва, 2013, с. 148.

[8] *Khaliullina A. R.* Congruence of acts over groups. 9th International Algebraic 'Conference in Ukraine, July 8-13, 2013, L'viv, p. 86

[9] *Халиуллина А. Р.* Конгруэнции правых полигонов над полугруппами правых и левых нулей. Материалы 12-й Междунар. конф. «Алгебра и теория чисел», посв. 80-летию профессора Латышева В.Н., Тула, 2014, с. 139–142.

[10] *Халиуллина А. Р.* Решётки конгруэнций полигонов над полугрппами правых и левых нулей. Материалы Международного симпозиума «Абелевы группы», посв. 100-летию со дня рождения профессора Л. Я. Куликова, Москва, 2014, с. 79–80.