На правах рукописи

Кулешов Артур Владимирович

СВЯЗНОСТИ НА СЕМЕЙСТВАХ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2016

Работа выполнена на кафедре фундаментальной математики ФГАОУ ВО «Балтийский федеральный университет имени И. Канта»

Научный руководитель: **Шевченко Юрий Иванович**,
кандидат физико-математических наук,
доцент, профессор кафедры фундаментальной математики ФГАОУ ВО «Балтийский федеральный университет имени И. Канта»

Официальные оппоненты: **Степанов Сергей Евгеньевич**,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры «Математика»
ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве РФ»

Султанов Адгам Яхиевич,
кандидат физико-математических наук,
доцент, профессор кафедры «Геометрия и математический анализ»
ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет»

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Защита состоится «25» февраля 2016 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Россия, Республика Татарстан, Казань, ул. Кремлевская, 18.

Автореферат разослан «___» __________ 2016 г. и размещен на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета: www.kpfu.ru.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10,
кандидат физико-математических наук, доцент Е.К. Липачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Постановка вопроса и актуальность темы. Теория связностей в главных расслоениях занимает важное место в современной дифференциальной геометрии. Она имеет приложения в различных разделах математики и физики, в частности, в теории поля [4], [12]. Основную роль при реализации связностей на многообразиях, погруженных в однородные или обобщенные пространства, играют оснащения. Исследованию связностей, индуцированных различными оснащениями погруженных многообразий, положено начало в работах Э. Картана, Э. Бортолотти, А.П. Нордена, Г.Ф. Лаптева и др.

Первые применения теории связностей к проективно-дифференциальной геометрии дали Э. Бортолотти [28] и Э. Картан [29]. Э. Бортолотти реализовал проективную связность на оснащенных семействах многомерных плоскостей. В его исследованиях под оснащением семейства понимается сопоставление каждой его m-мерной плоскости L некоторой $(n-m-1)$-мерной плоскости $B_{n-m-1}(L)$, не имеющей общих точек с плоскостью L. Идея, предложенная Картаном, аналогична и состоит в том, что каждой точке поверхности S_m в проективном пространстве P_n сопоставляется $(n-m-1)$-мерная плоскость $C_{n-m-1}(A)$, не пересекающая касательную плоскость $T_m(A)$ данной поверхности. Тогда на оснащенной таким образом поверхности S_m возникает проективная связность, инфинитезимально определяемая проектированием из плоскости $C_{n-m-1}(A)$.

Вообще, под оснащением подмногообразия понимается процесс присоединения к его образующему элементу некоторых дополнительных геометрических образов в объемлющем однородном пространстве. Полученная таким образом связность называется индуцированной заданным оснащением.

А.П. Норденом [15] был разработан метод нормализации, позволяющий на поверхности $S_m \subset P_n$ индуцировать две аффинные связности без кручения — касательную и нормальную. Основной идеей этого метода является сопоставление каждой точке $A \in S_m$ двух плоскостей: $(n-m)$-мерной плоскости $N_{n-m}(A)$, проходящей через точку A и не имеющей с касательной плоскостью $T_m(A)$ поверхности S_m в точке A других общих точек, и $(m-1)$-мерной плоскости $N_{m-1}(A)$, расположенной в касательной плоскости $T_m(A)$ и не проходящей через точку A. Плоскость $N_{n-m}(A)$ называется нормалью 1-го рода, а плоскость $N_{m-1}(A)$ – нормалью 2-го рода. Э.Г. Нейфельд в работе [14] применил метод нормализации Нордена для индуцирования аффинной связности на многообразии всех k-плоскостей n-мерного проективного пространства.

Одновременно с развитием общей теории погруженных многообразий Г.Ф. Лаптев изучал пространства с фундаментально-групповой связностью. Связности в расслоенных пространствах строились им как при помощи отображений бесконечно близких слоев расслоения [9], так и с помощью некоторого объекта, называемого объектом связности [8]. Таким образом, понятие связности, возникшее в дифференциальной геометрии как обобщение понятия параллельного перенесения, позже стало отождествляться с понятием геометрического объекта специального вида. Плодотворность такого подхода была продемонстрирована Л.Е. Евтушиком (см., напр., [5]) при исследовании нелинейных связностей высших порядков.

Наряду с теорией связностей в главных расслоениях создается теория связностей в более общих однородных расслоениях. Связность в однородном расслоении вводится Ю.Г. Лумисте [10], [11] как дифференцируемое распределение, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям.

Многие понятия и утверждения о внутренней геометрии погруженных многообразий естественно формулируются на языке связностей в главных расслоениях, ассоциированных с этими многообразиями. Так, например, работы А.В. Чакмазяна [23], [24] прояснили роль связности в нормальном подрасслоении.

Понятие r-мерного семейства B_r центрированных плоскостей является одним из наиболее интересных обобщений поверхности, распределения плоскостей, гиперполосы и других геометрических образов, теория связностей на которых активно разрабатывается по настоящее время (см., напр., [1], [2], [16], [20], [26], [27]). В силу того, что каждое из этих многообразий можно рассматривать как семейство центрированных плоскостей, имеющее определенный вид, особую актуальность приобретает переход к изучению произвольного гладкого семейства таких фигур. Это дает возможность: 1) построить общую теорию индуцированных связностей на семействах центрированных плоскостей, которая, в частности, позволит объяснить наблюдающиеся случаи совпадения результатов, независимо полученных для различных семейств; 2) обобщить полученные ранее результаты для конкретных семейств на более широкие классы семейств центрированных плоскостей; 3) получить новые результаты, ранее не встречавшиеся в исследованиях, указанных выше.

Понятие семейства центрированных плоскостей сравнительно недавно вошло в сферу геометрических исследований, чем объясняется неустоявшаяся терминология: наряду с термином «центрированная плоскость», используемым в настоящей работе, употребляются синонимы: «плоский элемент», «плоскостной элемент», «линейный элемент» и др. (см., напр., [9]). Следует отметить также, что центрированная плоскость является неполным флагом многомерного проективного пространства, и изучение семейств таких объектов естественным образом включается в теорию многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве [13]. При этом понятие семейства B_r шире близкого к нему понятия семейства плоскостей, оснащенного полем точек, и включает последнее как частный случай.

Среди разнообразных математических конструкций выделяются естественные конструкции, характеризующиеся тем, что они не содержат никаких элементов произвола. Поэтому одной из основных задач в теории связностей является задача нахождения естественной конструкции для связности на погруженном многообразии. Полученную таким образом связность называют внутренней, или связностью, построенной внутренним образом. Такая связность должна определяться (порождаться) самим погруженным многообразием и не требовать привлечения никаких дополнительных структур. С аналитической точки зрения задача построения внутренней связности на погруженном многообразии сводится к построению геометрического объекта, охваченного фундаментальным объектом некоторого порядка данного многообразия.

Когда структура оснащения, индуцирующего заданную связность, выяснена, задача построения связности внутренним образом сводится к построению внутреннего оснащения. Поэтому построение внутренних оснащений является одной из основных задач дифференциальной геометрии погруженных многообразий [18]. Применительно к семействам B_r эта задача далека от своего полного решения. Среди многочисленных частных результатов выделим исследование внутренней геометрии регулярной гиперполосы [21], которая может быть включена в общую теорию семейств B_r как специальное семейство центрированных гиперплоскостей (гиперплоских элементов по терминологии [3]). Поэтому приобретает актуальность задача распространения конструкций, реализованных для гиперполос, на максимально широкие классы семейств гиперплоских элементов, еще не изученные с точки зрения задачи внутреннего оснащения.

Цель диссертационной работы. Целью настоящей работы является построение общей теории фундаментально-групповых связностей на семействах центрированных плоскостей в проективном пространстве.

Основные задачи диссертационного исследования:

1. Разработать универсальный способ индуцирования связностей в главных расслоениях, ассоциированных с произвольным семейством центрированных плоскостей;

2. Дать геометрическую характеристику индуцированных связностей, их пучков и связок;

3. Изучить объекты кривизны построенных связностей;

4. Исследовать связности на семействах специального вида;

5. Построить внутренние связности.

Методы исследования. Результаты диссертационного исследования получены с использованием метода Картана – Лаптева [6], [7], [19], [22].

Научная новизна результатов. Все результаты, полученные в ходе диссертационного исследования, являются новыми.

Положения, выносимые на защиту.

1. Построена трехпараметрическая связка $\Gamma(\xi,\,\eta,\,\zeta)$ многопараметрических пучков индуцированных фундаментально-групповых связностей, а также однопараметрические связки пучков центропроективных $\Gamma_1(\xi)$ и аффинно-групповых $\Gamma_2(\eta)$ подсвязностей на семействе центрированных плоскостей в проективном пространстве. Из каждого пучка этой связки выделены связности, также образующие трехпараметрическую связку.

2. Описаны параллельные перенесения оснащающих плоскостей в пучках построенных связок и выявлены особенности этих перенесений в зависимости от типа пучка.

3. Дана геометрическая характеристика линейных подсвязностей при помощи центральных проектирований.

4. Показано, что объекты кривизны фундаментально-групповых связностей различных типов выражаются через тензоры подвижности, что позволило выявить зависимость между специализацией оснащения семейства и вырождением этих тензоров.

5. Выяснена структура оснащения грассманова расслоения на поверхности в проективном пространстве, индуцирующая пучок фундаментально-групповых связностей, ассоциированных с данным грассмановым расслоением. Показано, что задание аффинной связности на поверхности позволяет выделить связность из этого пучка.

6. Решена задача построения внутреннего оснащения и внутренних связностей на семействе $\mathbb{B}$ гиперплоских элементов.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретическое значение. Полученные в ней результаты и разработанные методы исследования могут быть использованы при изучении связностей на конкретных семействах фигур в однородных и обобщенных пространствах. Теория, разработанная в диссертации, может быть использована в качестве специальных и факультативных курсов для магистрантов и аспирантов, а также для написания курсовых, дипломных и магистерских работ в Балтийском федеральном университете имени И. Канта.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались автором и обсуждались на геометрических семинарах Балтийского федерального университета им. И. Канта (научный руководитель — к.ф.-м.н., доцент Ю.И. Шевченко, 2008 – 2015 гг.), а также на следующих всероссийских и международных конференциях, семинарах, симпозиумах: **1**. VII Всероссийская молодежная научная школа-конференция “Лобачевские чтения – 2008” (г. Казань, 1 – 3 декабря, 2008 г.); **2**. Геометрический семинар Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, 7 декабря 2010 г.); **3**. XLIX Международная научная студенческая конференция “Студент и научно-технический прогресс” (г. Новосибирск, 16 – 20 апреля, 2011 г.); **4**. Международный геометрический семинар имени Г.Ф. Лаптева “Лаптевские чтения” (г. Пенза, 14 – 17 сентября, 2011 г.); **5**. X Всероссийская молодежная научная школа-конференция “Лобачевские чтения – 2011” (г. Казань, 31 октября – 4 ноября, 2011 г.); **6**. Семинар по теории дифференциально-геометрических структур (г. Москва, 12 – 16 декабря 2011 г., руководитель — д.ф.-м.н., профессор Л.Е. Евтушик); **7**. Конференция с международным участием “Геометрия многообразий — 2012” (г. Улан-Удэ, 20 – 23 июня, 2012 г.); **8**. Международная конференция “AGMP–8” (г. Брно, Чехия, 12 – 14 сентября, 2012 г.), **9**. XI Всероссийская молодежная научная школа-конференция “Лобачевские чтения – 2012” (г. Казань, 1 – 6 ноября, 2012 г.); **10**. XII Всероссийская молодежная научная школа-конференция “Лобачевские чтения – 2013” (г. Казань, 24 – 29 октября, 2013 г.); **11**. Международный геометрический семинар имени Г.Ф. Лаптева “Лаптевские чтения – 2013” (г. Пенза, 11 – 15 сентября, 2013 г.); **12**. Международная конференция “Дни геометрии в Новосибирске” (Новосибирск, 16 –19 августа, 2015 г.); **13**. Международный геометрический семинар имени Г.Ф. Лаптева “Лаптевские чтения – 2015” (г. Пенза, 9 – 12 сентября, 2015 г.).

Публикации. Основные научные результаты, включенные в диссертационную работу, опубликованы в 19 публикациях автора. Их список приведен в конце автореферата. Из них три статьи опубликованы в журналах, включенных в список ВАК (выделены жирным шрифтом).

Вклад автора в разработку проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. Все опубликованные работы сделаны без соавторов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения (исторический обзор, общая характеристика работы, краткое содержание работы), трех глав и списка использованной литературы, включающего 83 наименования. Полный объем работы — 110 страниц машинописного текста.

Автор выражает искреннюю признательность и благодарность своему научному руководителю Ю.И. Шевченко за предложенную тематику исследований, внимание к работе и поддержку.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В настоящей работе рассматриваются семейства центрированных плоскостей в n-мерном проективном пространстве P_n. Все вводимые функции и отображения предполагаются гладкими, а рассмотрения носят локальный характер.

В **главе 1** исследуется семейство центрированных плоскостей B_r общего вида как r-мерное многообразие пар $(A,\, L_m)$ в n-мерном проективном пространстве P_n, образованных точкой A и проходящей через нее плоскостью L_m, $dim L_m = m$, $1 \le r \le m(n-m)+n$.

§ 1.1 носит вспомогательный характер. В нем вводятся в рассмотрение структурные уравнения проективного пространства P_n $(I,\, J,\, K = \overline{1,n})$:

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega^I_j, \quad d\omega_I = \omega^J_I \wedge \omega_J,$$
$$d\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + \delta^I_J \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I.$$

В § 1.2 семейство B_r задается параметрическими уравнениями, выражающими главные формы ω^a, ω^α, ω^α_a семейства через структурные формы θ^i пространства параметров $(a,\, b,\, \ldots = \overline{1,\, m};\ \alpha,\, \beta,\, \ldots = \overline{m+1,\, n};\ i,\, j,\, \ldots = \overline{1,\, r})$:

$$\omega^a = \Lambda^a_i \theta^i, \quad \omega^\alpha = \Lambda^\alpha_i \theta^i, \quad \omega^\alpha_a = \Lambda^\alpha_{ai} \theta^i.$$

Выведены уравнения фундаментального объекта 1-го порядка $\Lambda = \{\Lambda^a_i,\, \Lambda^\alpha_i,\, \Lambda^\alpha_{ai}\}$ семейства B_r. Над этим семейством как над базой возникает главное расслоение $G_s(B_r)$, структурной группой G_s $(s = n(n+1) - m(n-m))$ которого является подгруппа стационарности образующего элемента $(A,\, L_m)$. Найдены структурные уравнения данного расслоения. Показано, что оно имеет четыре фактор-расслоения: 1) расслоение плоскостных линейных реперов; 2) расслоение нормальных линейных реперов; 3) расслоение центропроективных реперов; 4) расслоение аффинно-групповых реперов.

В главном расслоении $G_s(B_r)$ приемом Лаптева – Лумисте задается фундаментально-групповая связность по Г.Ф. Лаптеву с помощью поля объекта связности (§ 1.3)

$$\Gamma = \{\Gamma^a_{bi},\, \Gamma^\alpha_{\beta i},\, \Gamma_{ai},\, \Gamma^a_{\alpha i},\, \Gamma_{\alpha i}\}.$$

Показано, что объект Γ содержит 2 простейших и 2 простых подобъекта: 1) Γ^a_{bi} — объект плоскостной линейной связности; 2) $\Gamma^\alpha_{\beta i}$ — объект нормальной линейной связности; 3) $\Gamma_1 = \{\Gamma^a_{bi},\, \Gamma_{ai}\}$ — объект центропроективной связности; 4) $\Gamma_2 = \{\Gamma^a_{bi},\, \Gamma^\alpha_{\beta i},\, \Gamma^a_{\alpha i}\}$ — объект аффинно-групповой связности. Объект кривизны R связности Γ является тензором, содержащим 2 простейших и 2 простых подтензора.

В § 1.4 произведено композиционное оснащение семейства B_r полями аналогов нормалей 2-го рода А.П. Нордена N_{m-1} и плоскостей Э. Картана C_{n-m-1}. Аналитически оно задается полем квазитензора $\lambda = \{\lambda_a,\, \lambda^a_\alpha,\, \lambda_\alpha\}$, названного оснащающим квазитензором. При этом объект λ', состоящий из пфаффовых производных квазитензора λ, образует геометрический объект лишь в совокупности с объектами λ и Λ. Плоскость $N_{n-m} = C_{n-m-1} \oplus A$ является аналогом нормали 1-го рода А.П. Нордена, порожденной плоскостью Э. Картана, а плоскость

$P_{n-1} = N_{m-1} \oplus C_{n-m-1}$ — аналогом гиперплоскости Э. Бортолотти, натянутой на плоскость Э. Картана и нормаль 2-го рода А.П. Нордена. Дифференциалы точки A и базисных точек оснащающих плоскостей разложены по самим этим точкам, причем коэффициенты в этих разложениях Λ_i^α, M_i^a, M_{ai}^α, t_{ai}, $t_{\alpha i}^a$, $t_{\alpha i}$ образуют тензоры. Равенство нулю подтензора Λ_i^α фундаментального тензора Λ характеризует семейства B_r, у которых центр A плоскости L_m^* смещается в ней же. Обращение тензора M_i^a в нуль характеризует такие оснащенные семейства B_r, у которых центры плоскостей L_m^* смещаются вдоль соответствующих нормалей 1-го рода N_{n-m}. Обращение в нуль тензора M_{ai}^α выделяет семейства, у которых нормали N_{m-1} смещаются в соответствующих плоскостях L_m^*. Случаи обращения в нуль тензоров t_{ai}, $t_{\alpha i}^a$, $t_{\alpha i}$ геометрически характеризуются соответствующими специальными смещениями оснащающих плоскостей, при этом никаких ограничений на само семейство B_r не накладывается. Поэтому мы называем их тензорами подвижности оснащающих плоскостей.

В § 1.5 рассматриваются ковариантные производные $\nabla_i \lambda_a$, $\nabla_i \lambda_\alpha^a$, $\nabla_i \lambda_\alpha$ оснащающего квазитензора относительно связности Γ, а также строится тензор

$$T_{\alpha i} = \nabla_i \lambda_\alpha - \lambda_a \nabla_i \lambda_\alpha^a.$$

Инвариантные соотношения между ними и тензорами подвижности:

$$\nabla_i \lambda_a = \xi t_{ai}, \quad \nabla_i \lambda_\alpha^a = \eta t_{\alpha i}^a, \quad T_{\alpha i} = \zeta t_{\alpha i},$$

содержащие числовые параметры ξ, η, ζ, выделяют трехпараметрическую связку пучков фундаментально-групповых связностей

$$\Gamma(\xi,\, \eta,\, \zeta) = \{\Gamma_{bi}^a,\, \Gamma_{\beta i}^\alpha,\, \Gamma_{ai}(\xi),\, \Gamma_{\alpha i}^a(\eta),\, \Gamma_{\alpha i}(\xi,\, \eta,\, \zeta)\}.$$

Эта связка содержит центропроективную $\Gamma_1(\xi) = \{\Gamma_{bi}^a,\, \Gamma_{ai}(\xi)\}$ и аффинно-групповую $\Gamma_2(\eta) = \{\Gamma_{bi}^a,\, \Gamma_{\beta i}^\alpha,\, \Gamma_{\alpha i}^a(\eta)\}$ подсвязки.

При помощи охватов компонент Γ_{bi}^a и $\Gamma_{\beta i}^\alpha$ из связки пучков $\Gamma(\xi,\, \eta,\, \zeta)$ выделена трехпараметрическая связка индуцированных связностей $\overset{0}{\Gamma}(\xi,\, \eta,\, \zeta)$ (§ 1.5). Показано, что совпадение построенных связностей обусловлено специализацией композиционного оснащения семейства B_r.

В § 1.6 дана геометрическая характеристика индуцированным плоскостной и нормальной линейных подсвязностей $\overset{0}{\Gamma}{}_{bi}^a$ и $\overset{0}{\Gamma}{}_{\beta i}^\alpha$. Связность $\overset{0}{\Gamma}{}_{bi}^a$ геометрически характеризуется проекцией на нормаль 2-го рода N_{m-1} смежной с ней нормали $N_{m-1} + dN_{m-1}$ из центра — нормали 1-го рода N_{n-m}:

$$\overset{0}{\Gamma}{}_{bi}^a\colon\ N_{m-1} + dN_{m-1} \xrightarrow{N_{n-m}} N_{m-1}.$$

Связность $\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta i}$ интерпретируется проекцией на плоскость Картана C_{n-m-1} смежной с ней плоскости $C_{n-m-1} + dC_{n-m-1}$ из центра — плоскости L_m:

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta i}\colon\ C_{n-m-1} + dC_{n-m-1} \xrightarrow{L_m} C_{n-m-1}.$$

Параграфы 1.7 – 1.12 посвящены интерпретации построенных связностей и их центропроективных и аффинно-групповых подсвязностей. Для этой цели построены невырожденные, свободно вырожденные и связанно вырожденные параллельные перенесения оснащающих плоскостей в соответствующих пучках связностей. Условия существования введенных параллельных перенесений представляют собой соотношения на ранги матриц тензоров подвижности. При помощи этих условий получен произвол существования каждого конкретного параллельного перенесения, иначе говоря, размерность подпространства параллельности.

В § 1.13 найдены выражения компонент тензоров кривизны индуцированных связностей из трехпараметрической связки $\overset{0}{\Gamma}(\xi,\, \eta,\, \zeta)$:

$$\overset{0}{R}{}^{a}_{bij} = M^{\alpha}_{b[i} t^{a}_{\alpha j]} - \delta^{a}_{b} \Lambda^{\alpha}_{[i} t_{\alpha j]} - M^{c}_{[i}(\delta^{a}_{c} t_{bj]} + \delta^{a}_{b} t_{cj]}),$$

$$\overset{0}{R}{}^{\alpha}_{\beta ij} = -M^{\alpha}_{a[i} t^{a}_{\beta j]} - \Lambda^{\alpha}_{[i} t_{\beta j]} - \delta^{\alpha}_{\beta}(M^{a}_{[i} t_{aj]} + \Lambda^{\gamma}_{[i} t_{\gamma j]}),$$

$$\overset{0}{R}_{aij}(\xi) = \overset{0}{R}{}^{b}_{aij} \lambda_b + \xi M^{\alpha}_{a[i} t_{\alpha j]},$$

$$\overset{0}{R}{}^{a}_{\alpha ij}(\eta) = \overset{0}{R}{}^{\beta}_{\alpha ij} \lambda^{a}_{\beta} - \overset{0}{R}{}^{a}_{bij} \lambda^{b}_{\alpha} + \eta M^{a}_{[i} t_{\alpha j]},$$

$$\overset{0}{R}_{\alpha ij}(\xi,\, \eta,\, \zeta) = \overset{0}{R}{}^{\beta}_{\alpha ij} \lambda_{\beta} - \overset{0}{R}{}^{b}_{aij} \lambda^{a}_{\alpha} \lambda_b - \xi M^{\beta}_{a[i} t_{\beta j]} \lambda^{a}_{\alpha} + \\ + (\zeta - \xi\eta) t^{a}_{\alpha[i} t_{aj]} + \eta \lambda_a M^{a}_{[i} t_{\alpha j]}.$$

Получены условия их совпадения для различных индуцированных центропроективных, аффинно-групповых и фундаментально-групповых связностей.

В § 1.14 рассматриваются плоские связности, т.е. связности с нулевым тензором кривизны. Найдены пять достаточных условий для того, чтобы каждая связность из трехпараметрической связки $\overset{0}{\Gamma}(\xi,\, \eta,\, \zeta)$ была плоской.

В **главе 2** рассматривается грассманово расслоение BS центрированных плоскостей, представляющее собой объединение центрированных многообразий Грассмана во всех касательных плоскостях некоторой n-мерной поверхности

S_n в N-мерном проективном пространстве P_N. Параграф § 2.1 носит обзорный характер, в нем излагаются основные сведения о поверхности в многомерном проективном пространстве, необходимые в дальнейшем. В § 2.2 рассматриваются различные оснащения поверхности: нормализация 1-го и 2-го рода, а также поднормализация 1-го рода. Показано, что нормализация 1-го рода поверхности индуцирует поднормализацию 1-го рода, а поднормализация 1-го рода вместе с нормализацией 2-го рода индуцирует аффинную связность Γ^I_{JK} $(I,\, J,\, \ldots = \overline{1,\, n})$ в расслоении касательных линейных реперов $L(S_n)$.

В § 2.3 рассматривается семейство BS m-мерных центрированных плоскостей, представляющее собой объединение центрированных многообразий Грассмана $Gr^*(m,\, n)$ во всех касательных плоскостях T_n поверхности. Над семейством BS как над базой возникает главное расслоение $H(BS)$, структурной группой которого является подгруппа стационарности образующего элемента семейства внутри соответствующей касательной плоскости поверхности. В расслоении $H(BS)$ задается связность Π, и выводятся уравнения на компоненты объекта, задающего эту связность (§ 2.4). Оснащениям многообразия BS посвящен параграф § 2.5. Композиционное оснащение семейства BS, индуцированное нормализацией 1-го рода многообразия BS вместе с нормализацией 2-го рода поверхности S_n, названо N-индуцированным. В § 2.6 показано, что композиционное оснащение многообразия BS сводит фундаментально-групповую связность Π к плоскостной Π_1 и нормальной Π_2 линейным подсвязностям, иначе говоря, индуцирует в главном расслоении $G(BS)$ многопараметрический пучок фундаментально-групповых связностей Π. При этом нормализация 1-го рода многообразия BS вместе с аффинной связностью Γ^I_{JK} поверхности S_n индуцируют плоскостную Π_1 и нормальную Π_2 линейные связности, что позволяет выделить из построенного пучка фундаментально-групповую связность $\overset{0}{\Pi}$.

В **главе 3** в многомерном проективном пространстве рассматривается семейство $\mathbb{B}$ гиперплоских элементов (т.е. центрированных гиперплоскостей). В § 3.1 даются необходимые определения и ставится задача построения композиционного оснащения данного семейства внутренним инвариантным образом. Решение данной задачи основано на редукции расслоения реперов, адаптированных данному семейству (§ 3.2). В §§ 3.2 – 3.5 изложено пошаговое описание этой процедуры. При этом производится аналитическая канонизация репера, основанная на систематическом применении леммы Н.М. Остиану [17]. В § 3.6 указаны два приложения полученного результата. Во-первых, в специальном случае найдена каноническая структура почти произведения на семействе $\mathbb{B}$. Во-вторых, в общем случае к семейству $\mathbb{B}$ внутренним образом присоединены две линейные связности и получены выражения их тензоров кривизны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белова, О. О. Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей / О.О. Белова // Фундаментальная и прикладная математика. — 2008. — Т. 14. — №2. — С. 29 – 67.

2. Бондаренко, Е. В. Связности на многообразии центрированных плоскостей в проективном пространстве / Е.В. Бондаренко // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — Калининград, 2000. — Вып. 31. — С. 12 – 16.

3. Бочилло, Г. П. К дифференциальной геометрии m-распределений на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства / Г.П. Бочилло // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — Калининград, 1983. — Вып. 14. — С. 18 – 23.

4. Волобуев, И. П. Дифференциальная геометрия и алгебры Ли и их приложения в теории поля / И.П. Волобуев, Ю.А. Кубышин. — 3-е изд. — М.: ЛЕНАНД, 2015. — 232 с.

5. Евтушик, Л. Е. Нелинейные связности высших порядков / Л.Е. Евтушик // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1969. — №2. — С. 32 – 44.

6. Евтушик, Л. Е. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л. Е. Евтушик, Ю. Г. Лумисте, Н.М. Остиану, А.П. Широков // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1979. — Т. 9. — С. 5 – 247.

7. Лаптев, Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий / Г.Ф. Лаптев // Тр. Моск. мат. о-ва. — М., 1953. — Т. 2. — С. 275 – 382.

8. Лаптев, Г. Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии / Г.Ф. Лаптев // Тр. геом. семин., — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1966. — Т. 1. — С. 139 – 189.

9. Лаптев, Г. Ф. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I / Г.Ф. Лаптев, Н.М. Остиану // Тр. геом. семин. — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1971. — Т. 3. — С. 49 – 83.

10. Лумисте, Ю.Г. Однородные расслоения со связностью и их погружения / Ю.Г. Лумисте // Труды геометрического семинара. — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1966. — Т. 1. — С. 191 – 237.

11. Лумисте, Ю.Г. Связности в однородных расслоениях / Ю.Г. Лумисте // Математический сборник. — 1966. — Т. 69. — С. 434 – 469.

12. Лумисте, Ю.Г. Связности при геометрической интерпретации полей Янга – Миллса и Фаддеева – Попова / Ю.Г. Лумисте // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1983, — № 1. — С. 46 – 54.

13. Малаховский, В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве / В.С. Малаховский // Тр. геом. семин. — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1969. — Т. 2. — С. 179 – 205.

14. Нейфельд, Э.Г. Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства / Э.Г. Нейфельд // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1976. — № 11. — С. 48 – 55.

15. Норден, А.П. Пространства аффинной связности / А.П. Норден. — М.: Наука, 1976. — 432 с.

16. Омельян, О.М. Редукции объекта центропроективной связности и тензора аффинного кручения на распределении плоскостей / О.М. Омельян, Ю.И. Шевченко // Математические заметки. — М., 2008. — Т. 84. — Вып. 1. — С. 99 – 107.

17. Остиану, Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия / Н.М. Остиану // Rev. math. pures et appl. (RPR). — 1962. — Т. 7. — № 2. — С. 231 – 240.

18. Остиану, Н.М. Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей в проективном пространстве / Н.М. Остиану // Тр. геом. семин. — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1969. — Т. 2. — С. 247 – 262.

19. Остиану, Н.М. Метод Картана – Лаптева в исследовании G-структур на многообразиях / Н.М. Остиану // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — М.: ВИНИТИ АН СССР, 2002. — Т. 30. — С. 5 – 124.

20. Полякова, К.В. Параллельные перенесения на поверхности проективного пространства / К.В. Полякова // Фундаментальная и прикладная математика. — 2008. — Т. 14. — № 2. — С. 129 – 177.

21. Столяров, А.В. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы / А.В. Столяров // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1975. — № 10. — С. 97 – 99.

22. Фиников, С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Теория совместности систем дифференциальных уравнений в полных дифференциалах и в частных производных / С.П. Фиников. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. — 432 с.

23. Чакмазян, А.В. О нормальной связности нормализованного многообразия плоскостей в проективном пространстве / А.В. Чакмазян // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1974. — № 7. — С. 74 – 79.

24. Чакмазян, А.В. Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия V_m в P_n / А.В. Чакмазян // Проблемы геометрии. — Т. 10. — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1978. — С. 55 – 74.

25. Шевченко, Ю.И. Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве / Ю.И. Шевченко // Диф. геом. многообр. фигур. — Калининград, 1978. — Вып. 9. — С. 124 – 133.

26. Шевченко, Ю.И. Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности / Ю.И. Шевченко // Диф. геом. многообр. фигур. — Калининград, 1981. — Вып. 12. — С. 126 – 130.

27. Шевченко, Ю.И. Параллельный перенос фигуры в линейной комбинации связности / Ю.И. Шевченко // Диф. геом. многообр. фигур. — Калининград, 1987. — Вып. 18. — С. 115 – 120.

28. Bortolotti, E. Connessioni nelle varieta luogo di spazi / E. Bortolotti // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari. — 1933. — № 3. — P. 81 – 89.

29. Cartan, E. Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective / E. Cartan. — Paris: Gauthier-Villars, 1937. — 308 p.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Кулешов, А. В. О связности 1-го и 2-го порядков на многообразии центрированных плоскостей в проективном пространстве / А. В. Кулешов // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Материалы Шестой молодежной научной школы-конференции. — Казань: Издательство Казанского математического общества, 2007. — Т. 36. — С. 131 – 133. — 0,19 п.л.

2. Кулешов, А. В. Индуцированные связности на многообразии центрированных плоскостей / А. В. Кулешов // Материалы XX Международной летней школы-семинара по современным проблемам теоретической и математической физики “Волга’20 – 2008”. — Казань, 2008. — С. 38. — 0,06 п.л.

3. Кулешов А. В. О тензорах кривизны индуцированной групповой связности на многообразии центрированных плоскостей / А. В. Кулешов // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Материалы Седьмой молодежной научной школы-конференции. — Казань: Издательство Казанского математического общества, 2008. — Вып. 37. — С. 133 – 135. — 0,19 п.л.

4. Кулешов А. В. Оснащение Картана – Нордена конгруэнции центрированных плоскостей / А. В. Кулешов // Тезисы докладов международной конференции “Геометрия в Одессе – 2009”. — Одесса: Благотворительный фонд “Наука”, 2009. — С. 54. — 0,06 п.л.

5. Кулешов А. В. О связностях на конгруэнции центрированных плоскостей / А. В. Кулешов // Материалы XXI Международной летней школы-семинара по современным проблемам теоретической и математической физики “Волга’21 – 2009”. — Казань, 2009. — С. 26. — 0,06 п.л.

6. Кулешов А. В. Шесть типов индуцированной групповой связности на семействе центрированных плоскостей / А. В. Кулешов // Диф. геом. многообр. фигур. — Калининград, 2009. — Вып. 40. — С. 72 – 84. — 0,81 п.л.

7. Кулешов А. В. О совпадении и интерпретации связностей, индуцированных на семействе центрированных плоскостей / А. В. Кулешов // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. Сер. Физико-математические науки. — Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2009. — Вып. 10. — С. 112 – 119. — 0,50 п.л.

8. Кулешов А. В. Обобщенные связности на комплексе центрированных плоскостей в проективном пространстве / А. В. Кулешов // Тезисы докладов международной конференции “Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation”, 1 – 6 ноября 2010 г. — Казань, 2010. — С. 80. — 0,06 п.л.

9. Кулешов А. В. Связности, индуцированные композиционным оснащением семейства центрированных плоскостей в проективном пространстве / А. В. Кулешов // Материалы XLIX Международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс”: Математика. — Новосибирск, 2011. — С. 79. — 0,06 п.л.

10. Кулешов А. В. Связности, индуцированные композиционным оснащением семейства центрированных плоскостей в проективном пространстве / А. В. Кулешов // Дифф. геом. многообр. фигур. — Калининград, 2011. — Вып. 42. — С. 59 – 87. — 1,81 п.л.

11. Кулешов А. В. Трехпараметрическая связка индуцированных фундаментально-групповых связностей на семействе центрированных плоскостей в проективном пространстве / А. В. Кулешов // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Материалы Десятой молодежной научной школы-конференции. — Казань: Издательство Казанского математического общества, 2011. — Т. 44. — С. 189 – 192. — 0,25 п.л.

12. **Кулешов А. В. Кривизна индуцированных фундаментально-групповых связностей семейства центрированных плоскостей в проективном пространстве / А. В. Кулешов // Известия Пензенского государственного педагогического университета им. В.Г. Белинского. — Пенза, 2011. — С. 111 – 120. — 0,63 п.л.**

13. Кулешов А. В. Специальные оснащения, индуцирующие плоские связности на поверхности в проективном пространстве / А. В. Кулешов // Тезисы докладов международной конференции "Геометрия в Одессе – 2012". — Одесса: Благотворительный фонд "Наука", — 2012. — С. 51. — 0,06 п.л.

14. **Кулешов А. В. Фундаментально-групповые связности, индуцированные композиционным оснащением семейства центрированных плоскостей в проективном пространстве / А. В. Кулешов // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер. Физико-математические науки. — Калининград: Изд-во БФУ им. И. Канта, 2012. — Вып. 4. — С. 139 – 147. — 0,56 п.л.**

15. **Кулешов А. В. Индуцированная связность на грассмановом расслоении над поверхностью в проективном пространстве / А. В. Кулешов // Известия Пензенского государственного педагогического университета им. В.Г. Белинского. Физ.-мат. и технич. науки. — № 30. — Пенза, 2012. — С. 84 – 88. — 0,31 п.л.**

16. Кулешов А. В. Об одном проективном инварианте семейства гиперплоских элементов с огибающей поверхностью центров / А. В. Кулешов // Тезисы докладов международной конференции "Геометрия в Одессе — 2013". — Одесса: Благотворительный фонд "Наука", 2013. — С. 53. — 0,06 п.л.

17. Кулешов А. В. Об одном проективном инварианте семейства гиперплоских элементов с огибающей поверхностью центров / А. В. Кулешов // Диф. геом. многообр. фигур. — Калининград, 2013. —Вып. 44. — С. 67 – 77. — 0,69 п.л.

18. Kuleshov A. V. Intrinsic clothing of regular family of hyperplane elements / A. V. Kuleshov // Тезисы докладов международной конференции “Геометрия в Одессе — 2014”. — Одесса: Благотворительный фонд “Наука”, 2014. — С. 78. — 0,06 п.л.

19. Кулешов А. В. О внутреннем оснащении одного семейства гиперплоских элементов / А. В. Кулешов // Диф. геом. многообр. фигур. — Калининград, 2014. —Вып. 45. — С. 65 – 72. — 0,50 п.л.