На правах рукописи

Болучевская Анна Владимировна

АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛА И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2016

Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций ФГАОУ ВПО «Волгоградский государственный университет».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Клячин Владимир Александрович**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, вед. науч. сотр. отдела теории функций Института математики с ВЦ УНЦ РАН **Мусин Ильдар Хамитович**
	кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВПО «Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)» **Кесельман Владимир Михайлович**
Ведущая организация:	Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН

Защита состоится 18 февраля 2016 года в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 35.

Автореферат разослан «___» ________ 20___ года.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10
кандидат физ.-мат. наук, доцент — Е.К. Липачёв

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена исследованию отображений, заданных на расчетных сетках, представляющих собой триангуляции плоских и пространственных областей. Рассматриваются две основные задачи — аппроксимация дифференциалов плоских отображений класса C^2, удовлетворяющих эллиптическим системам дифференциальных уравнений, а также определение условий на отображения некоторых классов, выполнение которых обеспечивает сохранение ориентации симплексов сетки.

Актуальность темы. При численном решении различных задач широко используются нерегулярные расчетные сетки в виде триангуляций плоских и пространственных областей. Аппроксимации функций, заданных на таких расчетных сетках, а также аппроксимации их производных посвящено множество исследований, в значительной части которых изучается зависимость качества аппроксимации от способа построения триангуляции.

Наличие такой зависимости впервые было отмечено в классическом примере К. Шварца, называемом иногда «сапог Шварца»[1]. Этот пример демонстрирует, что при измельчении ячеек расчетной сетки сходимость соответствующих производных кусочно-линейных аппроксимаций может не наблюдаться. Последующее изучение этого явления множеством авторов показало, что геометрические характеристики сетки оказывают значительное влияние на аппроксимацию вплоть до отсутствия сходимости.

Традиционным подходом в исследованиях связи качества приближения и способа построения триангуляции является получение оценки погрешности через диаметр треугольника и наибольший (или наименьший) его угол. Первые работы, в рамках которых применялся такой подход, появились в конце 50-х годов прошлого века. В 1957 г. Дж. Синдж изучал интерполяционные многочлены первой степени на треугольнике. Позднее в статьях М. Зламала, Дж. Брэмбла, А. Женишека, П. Сьярле и П. Равьяра были определены условия на минимальный угол треугольника, обеспечивающие приемлемое качество приближения, а А. Азиз и И. Бабушка показали, что качество аппроксимации в методе конечных элементов для триангуляций значительно снижается при стремлении одного из углов треугольника к 180°. Начиная с 70–80-х годов, обозначенной проблематикой занимались Ю.Н. Субботин, П. Жаме, Н.В. Байдакова, Н.В. Латыпова, J.R. Shewchuk, В.А. Клячин и другие.

Чтобы увидеть, как в точных формулировках выражается зависимость качества приближения от геометрических характеристик триангуляции, приведем

[1] Гелбаум Б., Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе.* — М.: Мир, 1967. — 251 с.

подробнее некоторые характерные результаты из упомянутых выше исследований.

Так в работе П. Сьярле и П. Равьяра[2] в двумерном случае при аппроксимации функции и ее k-х производных были получены верхние оценки погрешности аппроксимации вида

$$Cl^{m+1-k}(\sin\alpha)^{-k},$$

где l — диаметр триангуляции, α — наименьший угол триангуляции, m — степень интерполяционного многочлена, а C — константа, от триангуляции не зависящая.

В статье Ю.Н. Субботина[3] для функции f, принадлежащей описанному в статье классу, доказано выполнение следующей оценки для любого ξ

$$\| D_\xi(f-P_1)\|_C \leq \frac{Ml}{2\sin\alpha},$$

где $D_\xi f$ — производная по направлению ξ, P_1 — многочлен первой степени, M — константа, l — диаметр триангуляции, α — наименьший угол треугольника.

В работах В.А. Клячина и его совместных работах с учениками Е.А. Пабат и А.А. Широким были получены условия, обеспечивающие сходимость производных кусочно-линейных аппроксимаций. При этом была выявлена тесная связь этих условий с так называемым условием пустой сферы, которое впервые было сформулировано Б. Делоне. Выполнение условия пустой сферы означает, что описанная сфера каждого тетраэдра (описанная окружность каждого треугольника в плоском случае) не содержит внутри себя других вершин триангуляции. Триангуляции, удовлетворяющие этому условию, называют триангуляциями Делоне. В статье В.А. Клячина и А.А. Широкого[4] было показано, что для триангуляций Делоне имеет место сходимость производных кусочно-линейных аппроксимаций при измельчении треугольников. Позднее В.А. Клячиным были построены контрпримеры, показывающие, что в многомерном случае аналогичной сходимости быть не может.

В диссертации решается задача аппроксимации дифференциалов плоских отображений класса C^2, удовлетворяющих эллиптическим системам диффе-

[2] Ciarlet P.G., Raviart P.A. *General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods* // Arch. Rat. Mech. and Anal. — 1972. — Vol. 46. — № 3. — P. 177–199.

[3] Субботин Ю.Н. *Зависимость оценок многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции* // Труды Математического института АН СССР. — 1989. — № 189. — С. 117–137.

[4] Клячин В.А., Широкий А.А. *Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и ее аппроксимационные свойства* // Изв. вузов. Матем. — 2012. — № 1. — С. 31–39.

ренциальных уравнений, обобщающим системы Коши – Римана и Бельтрами, вида

$$\begin{cases} \mathfrak{a}\dfrac{\partial U}{\partial x_1} + \mathfrak{b}\dfrac{\partial U}{\partial x_2} = \dfrac{\partial V}{\partial x_2}, \\ \mathfrak{d}\dfrac{\partial U}{\partial x_1} + \mathfrak{c}\dfrac{\partial U}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial V}{\partial x_1}. \end{cases} \tag{1}$$

Отличительной чертой полученных в работе результатов является то, что при указанных условиях на отображения удается найти аппроксимирующие формулы без ограничений на качество треугольников триангуляции. Таким образом, для класса отображений, являющихся решениями эллиптических систем уравнений, удается избавиться от ограничений на углы треугольника и требований типа условия Делоне.

Помимо описанной задачи в диссертации исследуется и еще одна проблема. Построение нерегулярных расчетных сеток осуществляется множеством способов, один из которых состоит в отображении некоторой модельной сетки на заданную область, в которой проводятся расчеты. Он описан и подробно изучен, например, в работах С.К. Годунова, Г.П. Прокопова, А.Ф. Сидорова, П.П. Белинского, Ю.Б. Иванова, И.К. Яненко, В.Д. Лисейкина, С.А. Иваненко, А.А. Чарахчьяна, Б.Н. Азаренок, В.А. Гаранжа, И.Е. Капорина, О.В. Ушаковой. Мы ограничиваемся рассмотрением расчетных сеток в виде триангуляций плоских и пространственных областей.

Однако при использовании данного метода возникают некоторые ограничения, связанные с тем, что построение сетки с помощью отображений может привести к появлению пересекающихся ячеек в расчетной области. Необходимо контролировать искажение исходных ячеек, чтобы не допустить пересечения их образов и сохранить триангуляцию. Эта проблема исследовалась в работах Б.Н. Азаренок, О.В. Ушаковой, М.Ф. Прохоровой, В.А. Клячина, Н.А. Бобылева, С.А. Иваненко, А.В. Казунина и других.

В частности, в статьях В.А. Клячина[5] и М.Ф. Прохоровой[6] сформулированы условия, достаточные для сохранения триангуляции при гомеоморфных отображениях. Одним из наиболее существенных условий является сохранение ориентации каждого симплекса сетки (треугольника в плоском случае). Отсюда возникает задача определения условий, при выполнении которых отображение, используемое для построения расчетной сетки, сохраняет ориентацию

[5]Клячин В.А. *О гомеоморфизмах, сохраняющих триангуляцию* // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — 2009. — № 4. — С. 169–182.

[6]Прохорова М.Ф. *Проблемы гомеоморфизма, возникающие в теории сеток* // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2008. — Т. 14. — № 1. — С. 112–129.

симплекса (треугольника).

Отметим, что вопрос сохранения ориентации треугольника при K-квазиконформном отображении конечной плоскости на себя рассматривался уже Л. Альфорсом. Им была доказана теорема о том, что всякий равносторонний треугольник отображается в треугольник с той же ориентацией, если $K < \sqrt{3}$. Позднее В.М. Миклюковым исследовалась задача сохранения ориентации тройки точек при гомеоморфном отображении. Условие сохранения ориентации было записано как неравенство, ограничивающее сверху расстояние между образами точек и их прообразами.

Затем В.А. Клячиным[5] рассматривались гомеоморфные, дифференцируемые почти всюду отображения $f\colon D \to D^*, D, D^* \in \mathbb{R}^2$, и был получен следующий результат.

Пусть $\Delta \in D$ — треугольник с вершинами p_0, p_1, p_2, и $\Delta' \in D^*$ — треугольник с вершинами $p_0' = f(p_0), p_1' = f(p_1), p_2' = f(p_2)$. Пусть также x_0 — некоторая внутренняя точка треугольника Δ, в которой f дифференцируемо.

Положим

$$\beta = \beta(x_0, f, \Delta) = \max_{k=0,1,2} \frac{|f(p_k) - f(x_0) - d_{x_0} f(p_k - x_0)|}{|p_k - x_0|}$$

и

$$\| d_{x_0} f \| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0} \frac{|d_{x_0} f(\xi)|}{|\xi|}.$$

Будем обозначать через $\mathfrak{J}_f(x)$ якобиан отображения f в точке $x \in D$.

Теорема Б (В.А. Клячин). *Если якобиан отображения f в точке x_0 удовлетворяет неравенству*

$$\mathfrak{J}_f(x_0) > \| d_{x_0} f \| \, \beta \frac{a d_1 + b d_2}{S} + \beta^2 \frac{d_1 d_2}{S},$$

где S — площадь треугольника Δ, $a = |p_1 - p_0|$, $b = |p_2 - p_0|$, $d_1 = |p_2 - x_0| + |p_0 - x_0|$, $d_2 = |p_1 - x_0| + |p_0 - x_0|$, то треугольник Δ' имеет ту же ориентацию, что и Δ.

Таким образом, здесь условие сохранения ориентации треугольника формулируется в виде неравенства, ограничивающего снизу якобиан отображения. В этой же работе аналогичные условия были получены для отображений класса C^1, $C^{1,\alpha}$, а также конформных, ограниченных отображений.

В диссертации мы обобщаем на n-мерный случай утверждения, полученные В.А. Клячиным для гомеоморфных, дифференцируемых почти всюду отображений. Помимо этого, определяем условия, выполнение которых обеспечивает сохранение ориентации симплексов в пространстве $\mathbb{R}^n$ для таких классов отображений, как K-квазиконформные, квазиизометрические и гармонические отображения. Формулируем также условие сохранения ориентации треугольника для решений эллиптической системы (1), описанной выше.

Цель работы. Целью диссертационной работы является решение двух основных задач.

Первая задача — для дифференциалов плоских отображений класса C^2, удовлетворяющих эллиптическим системам дифференциальных уравнений, построить аппроксимирующие формулы без ограничений на триангуляцию областей.

Вторая задача — определить условия сохранения ориентации симплексов в пространстве $\mathbb{R}^n$ для таких распространенных классов отображений как гомеоморфные, K-квазиконформные, квазиизометрические, гармонические отображения. Кроме того, определить условие сохранения ориентации плоского треугольника для отображений, являющихся решениями эллиптических систем дифференциальных уравнений.

Методы исследования. Применяются стандартные методы математического анализа, аналитической геометрии, теории дифференциальных уравнений в частных производных.

При решении первой задачи используется подход, основанный на определении верхних оценок нормы разности матрицы Якоби отображения и построенной аппроксимирующей матрицы. Подход к решению второй задачи состоит в получении таких неравенств, ограничивающих якобианы отображений снизу, что выполнение этих неравенств обеспечивает сохранение ориентации.

Научная новизна. В работе получены следующие результаты, которые являются новыми и выносятся на защиту. Найдены формулы, позволяющие аппроксимировать дифференциалы плоских отображений класса C^2, удовлетворяющих эллиптическим системам дифференциальных уравнений. При этом предложенные формулы не накладывают ограничений на триангуляцию области. Приведены условия, при выполнении которых гомеоморфные, K-квазиконформные, квазиизометрические и гармонические отображения сохраняют ориентацию симплекса в $\mathbb{R}^n$. Получено условие сохранения ориентации плоского треугольника для решений эллиптических систем уравнений.

Теоретическая и практическая значимость. Исследование носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в построении нерегулярных расчетных сеток для различных вычислительных задач, а также могут быть использованы специалистами при численном решении задач математической физики, связанных с рассмотренными в работе системами дифференциальных уравнений.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на международных и российских конференциях: Научном семинаре-совещании «Сети в анизотропных пространствах» (Волгоград, 2011 г.), Международной конференции по современному анализу (Донецк, Украина, 2011 г.), Десятой Казанской летней школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 2011 г.), Второй всероссийской молодежной научной конференции «Современные проблемы математики и механики» (Томск, 2011 г.), Десятой всероссийской молодежной школе-конференции «Лобачевские чтения-2011» (Казань, 2011 г.), 16-й Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2012 г.), Школе-конференции по геометрическому анализу (Горно-Алтайск, 2012 г.), XI молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения-2012» (Казань, 2012 г.), II международной конференции «Геометрический анализ и его приложения» (Волгоград, 2014 г.), а также на конференциях и семинарах Волгоградского государственного университета и региональных конференциях молодых исследователей Волгоградской области (2011, 2012 гг.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[13]. Из них работы [1] и [2] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов научных исследований.

Структура и объём диссертации. Диссертация изложена на 107 страницах и состоит из введения, двух глав и списка литературы. Библиография диссертации содержит 65 наименований, включая работы автора.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит обоснование актуальности темы исследования, обзор литературы по теме диссертации и краткое изложение основных результатов.

Глава 1. Аппроксимация дифференциала решений эллиптических систем. В первой главе получены аппроксимирующие формулы, позволяющие приближать дифференциалы плоских отображений класса C^2, удовлетворяющих эллиптическим системам дифференциальных уравнений.

Параграф 1.1 имеет вводный характер. В нём сформулирована основная задача, решаемая в данной главе.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область, в которой задана последовательность $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ конечных наборов точек, $P_m = \{p_m^1, p_m^2, \ldots, p_m^{N_m}\},\ p_k^{i_k} \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Для произвольного набора P_m рассмотрим некоторую его триангуляцию T_m. Для всякого треугольника $S \in T_m$ определим длину l_S максимальной его стороны. Обозначим через l_m диаметр разбиения, $l_m = \max\limits_{S \in T_m} l_S$.

Мы рассматриваем такие наборы точек P_m и их триангуляции T_m, для которых выполнены два условия:

$$l_m \to 0 \text{ при } m \to \infty \tag{2}$$

и

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, m_0 \in \mathbb{N}:\ \forall\, m > m_0\, \forall\, x \in D\, \exists\, a \in P_m \text{ такая, что } |a - x| < \varepsilon. \tag{3}$$

Первое условие означает, что диаметр разбиения стремится к нулю, то есть ячейки сетки измельчаются. Второе условие показывает, что P_m является ε-сетью в D при всех достаточно больших m.

Введем следующее обозначение. Пусть $\mu(t)$ — неубывающая непрерывная функция, $t \geq 0$ и $\mu(0) = 0$. Через $\Omega^m_\mu(D)$ обозначим множество кусочно-гладких непрерывных функций $g: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, таких, что выполнено:

1) $g \in C^1(S)$ для всякого $S \in T_m$;

2) если $\omega_S(t), t > 0$, — модуль непрерывности градиента функции g в $S \in T_m$, то $\omega_S(t)$ не превосходит $\mu(t)$ для всякого $S \in T_m$.

Пусть $f\colon D \to D^*,\ D, D^* \subset \mathbb{R}^2$ — отображение вида $f(x) = (U(x), V(x))$, $x = (x_1, x_2) \in D$, где $U, V \in C^2(D)$ являются решением эллиптической системы дифференциальных уравнений.

Предполагаем, что для триангуляции T_m построено отображение $f_m: D \to D^*$, $f_m = (U_m, V_m)$, такое что:

1) $U_m, V_m \in \Omega^m_\mu(D)$;

2) значения f и f_m в точках заданного набора совпадают, то есть для любой точки $p \in P_m$ выполнено $f_m(p) = f(p)$.

Обозначим через $J_f(x)$ матрицу Якоби отображения f в точке $x \in D$.

Не ограничивая общности, можно рассматривать один треугольник в триангуляции. Для аппроксимации матрицы Якоби отображения f в точке x мы строим матрицу $A_m(x)$, используя функции U_m, V_m и коэффициенты эллиптической системы уравнений. В качестве погрешности аппроксимации дифференциала в треугольнике $S \in T_m$ рассматриваем величину

$$e(S) = \sup_{x \in S} \parallel J_f(x) - A_m(x) \parallel .$$

Ясно, что матрица $A_m(x)$ строится так, чтобы погрешность $e(S)$ не зависела от степени вырожденности треугольника S. Это обеспечивает требуемую независимость качества аппроксимации от способа построения разбиения области.

В параграфах первой главы предлагаются аппроксимирующие матрицы $A_m(x)$ для различных эллиптических систем.

В параграфе 1.2 рассматривается отображение $f = (U, V)$, $U, V \in C^2(D)$, которое является решением эллиптической системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} = -\alpha_2 \dfrac{\partial U}{\partial x_2}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_2} = \alpha_1 \dfrac{\partial U}{\partial x_1}, \end{cases} \tag{4}$$

где $\alpha_1 = \alpha_1(x), \alpha_2 = \alpha_2(x) \in C^1(D)$ и $\alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x) > 0$ для всякого $x \in D$ в силу эллиптичности системы.

Доказана теорема, в которой указан точный вид матрицы $A_m(x)$ и дана оценка соответствующей величины $e(S)$. Следствие из этой теоремы демонстрирует, что при стремлении к нулю диаметра разбиения l_m погрешность аппроксимации $e(S)$ также стремится к нулю, и при этом не накладывается ограничений на геометрию треугольников. Аналогичные результаты для систем более общего вида получены в остальных параграфах первой главы.

В параграфе 1.3 рассматривается отображение $f = (U, V)$, где $U,\ V \in C^2(D)$ — решение эллиптической системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \mathfrak{a}\dfrac{\partial U}{\partial x_1} + \mathfrak{b}\dfrac{\partial U}{\partial x_2} = \dfrac{\partial V}{\partial x_2}, \\ \mathfrak{d}\dfrac{\partial U}{\partial x_1} + \mathfrak{c}\dfrac{\partial U}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial V}{\partial x_1}, \end{cases} \tag{5}$$

где $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(x), \mathfrak{b} = \mathfrak{b}(x), \mathfrak{c} = \mathfrak{c}(x), \mathfrak{d} = \mathfrak{d}(x) \in C^1(D)$ и $\mathfrak{a}\mathfrak{c} - \left(\frac{\mathfrak{b}+\mathfrak{d}}{2}\right)^2 > 0$ всюду в D в силу эллиптичности системы.

Основным результатом этого параграфа является теорема 1.3.1, для формулировки которой введем дополнительные обозначения. Через p_0, p_1, p_2 обозначим вершины треугольника $S \in T_m$ так, чтобы точки p_0 и p_1 образовывали максимальную сторону длины l_S.

Пусть в D задана прямоугольная декартова система координат. Тогда обозначим:

$\mathfrak{l} = p_1 - p_0$ — направляющий вектор, задающий наибольшую сторону треугольника;

φ — угол в положительном направлении (против часовой стрелки) между этой стороной и осью абсцисс;

$\frac{\partial U_m}{\partial \mathfrak{l}}(x)$ — производная функции U_m в точке $x \in D$ по направлению, задаваемому единичным вектором $\mathfrak{l}_0$, сонаправленным с вектором $\mathfrak{l}$. Аналогично,

$\frac{\partial V_m}{\partial \mathfrak{l}}(x)$ — производная функции V_m в точке $x \in D$ по тому же направлению.

Введем следующие величины, которые понадобятся нам для построения матрицы $A_m(x)$,

$$K = K(x) = \mathfrak{a}(x)\sin^2\varphi + \mathfrak{c}(x)\cos^2\varphi - (\mathfrak{b}(x) + \mathfrak{d}(x))\sin\varphi\cos\varphi$$

и

$$K_1(x) = \frac{\mathfrak{c}(x)\cos\varphi - \mathfrak{b}(x)\sin\varphi}{K}, \qquad K_2(x) = \frac{\sin\varphi}{K},$$
$$K_3(x) = \frac{\mathfrak{a}(x)\sin\varphi - \mathfrak{d}(x)\cos\varphi}{K}, \qquad K_4(x) = -\frac{\cos\varphi}{K},$$
$$K_5(x) = -\frac{(\mathfrak{a}(x)\mathfrak{c}(x) - \mathfrak{b}(x)\mathfrak{d}(x))\sin\varphi}{K}, \quad K_6(x) = \frac{\mathfrak{c}(x)\cos\varphi - \mathfrak{d}(x)\sin\varphi}{K},$$
$$K_7(x) = \frac{(\mathfrak{a}(x)\mathfrak{c}(x) - \mathfrak{b}(x)\mathfrak{d}(x))\cos\varphi}{K}, \qquad K_8(x) = \frac{\mathfrak{a}(x)\sin\varphi - \mathfrak{b}(x)\cos\varphi}{K}.$$

Для удобства опустим аргумент у $K_i(x)$ и будем писать K_i вместо $K_i(x)$.

Кроме этого, пусть

$\omega_1(t),\ t > 0,$ — модуль непрерывности градиента функции U_m в S,

$\omega_2(t),\ t > 0,$ — модуль непрерывности градиента функции V_m в S и

$$I_1(l_m) = \frac{1}{l_m}\int_0^{l_m} \omega_1(t)dt, \qquad I_2(l_m) = \frac{1}{l_m}\int_0^{l_m} \omega_2(t)dt.$$

Верна следующая теорема.

Теорема 1.3.1. *Если для всякого $x \in S, S \in T_m$, матрица $A_m(x)$ имеет вид*

$$A_m(x) = \begin{pmatrix} K_1\frac{\partial U_m}{\partial \mathfrak{l}}(x) + K_2\frac{\partial V_m}{\partial \mathfrak{l}}(x) & K_3\frac{\partial U_m}{\partial \mathfrak{l}}(x) + K_4\frac{\partial V_m}{\partial \mathfrak{l}}(x) \\ K_5\frac{\partial U_m}{\partial \mathfrak{l}}(x) + K_6\frac{\partial V_m}{\partial \mathfrak{l}}(x) & K_7\frac{\partial U_m}{\partial \mathfrak{l}}(x) + K_8\frac{\partial V_m}{\partial \mathfrak{l}}(x) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

то справедлива оценка:

$$e(S) \le N_1\left(\omega_1(l_m) + I_1(l_m) + \frac{\alpha+2}{\alpha+1}C_\alpha\rho^{-\alpha}l_m^\alpha\right) + \\ + N_2\left(\omega_2(l_m) + I_2(l_m) + \frac{\beta+2}{\beta+1}C_\beta\rho^{-\beta}l_m^\beta\right),$$

где $\rho = \operatorname{dist}(S, \partial D)$ и $N_1, N_2, C_\alpha, C_\beta, \alpha > 0, \beta > 0$ — константы, зависящие от системы (5).

Согласно следствию из этой теоремы, при стремлении к нулю диаметра разбиения погрешность аппроксимации $e(S)$ также стремится к нулю без дополнительных ограничений на триангуляцию набора точек.

Следствие 1.3.1. *Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^2$ задана последовательность $\{P_m\}_{m=1}^\infty$ конечных наборов точек и их триангуляций T_m, отображение*

$f = (U,V)$, $U,V \in C^2(D)$, является решением системы (5)*, матрица $A_m(x)$ имеет вид* (6)*. Тогда, если выполнены условия* (2)*,* (3) *и G — произвольная компактно вложенная подобласть D, то*

$$\max_{S\in T_m, S\subset G} e(S) = \max_{S\in T_m, S\subset G} \sup_{x\in S} \| J_f(x) - A_m(x) \| \to 0 \textit{ при } m\to\infty.$$

В параграфе 1.4 рассматривается аппроксимация решений $f = (U,V)$, $U,V \in C^2(D)$, системы (5) по значениям в узлах T_m, известным приближенно. Таким образом, продолжается исследование системы из параграфа 1.3. Однако в отличие от него здесь для всякой триангуляции T_m рассматриваем такое отображение $f_m^\delta\colon D \to D^*$, $f_m^\delta = (U_m^\delta, V_m^\delta)$, что:

1) $U_m^\delta, V_m^\delta \in \Omega_\mu^m(D)$;

2) значения функции f в точках заданного набора известны с некоторой погрешностью δ, то есть для любой точки $p \in P_m$ выполнено

$$|U_m^\delta(p) - U(p)| < \delta \quad \text{и} \quad |V_m^\delta(p) - V(p)| < \delta, \quad \delta > 0.$$

Отметим, что для каждого m может быть выбрано свое δ.

Предполагаем, кроме того, что для всякого натурального m существует отображение $f_m\colon D \to D^*$, $f_m = (U_m, V_m)$, такое что:

1) $U_m, V_m \in \Omega_\mu^m(D)$;

2) для любой точки $p \in P_m$ выполнено $f_m(p) = f(p)$.

Обратим внимание, что в данном параграфе, в отличие от остальных, для построения матрицы $A_m(x)$ используются функции U_m^δ, V_m^δ. При этом отображение $f_m = (U_m, V_m)$ необходимо для получения оценки погрешности, но не для построения матрицы.

Введем дополнительные обозначения:
$\omega_1^\delta(t)$, $t > 0$, — модуль непрерывности градиента функции U_m^δ в S,
$\omega_2^\delta(t)$, $t > 0$, — модуль непрерывности градиента функции V_m^δ в S и

$$I_1^\delta(l_m) = \frac{1}{l_m}\int_0^{l_m} \omega_1^\delta(t)dt, \qquad I_2^\delta(l_m) = \frac{1}{l_m}\int_0^{l_m} \omega_2^\delta(t)dt.$$

Основной результат этого параграфа формулируется следующим образом.

Теорема 1.4.1. *Если для всякого $x \in S, S \in T_m$, матрица $A_m(x)$ имеет вид*

$$A_m(x) = \begin{pmatrix} K_1 \frac{\partial U_m^\delta}{\partial \mathfrak{l}}(x) + K_2 \frac{\partial V_m^\delta}{\partial \mathfrak{l}}(x) & K_3 \frac{\partial U_m^\delta}{\partial \mathfrak{l}}(x) + K_4 \frac{\partial V_m^\delta}{\partial \mathfrak{l}}(x) \\ K_5 \frac{\partial U_m^\delta}{\partial \mathfrak{l}}(x) + K_6 \frac{\partial V_m^\delta}{\partial \mathfrak{l}}(x) & K_7 \frac{\partial U_m^\delta}{\partial \mathfrak{l}}(x) + K_8 \frac{\partial V_m^\delta}{\partial \mathfrak{l}}(x) \end{pmatrix},$$

то справедлива оценка

$$\begin{aligned} e(S) \le \mathfrak{N}_1 \left(\omega_1^\delta(l_m) + I_1^\delta(l_m)\right) + \mathfrak{N}_2 \left(\omega_2^\delta(l_m) + I_2^\delta(l_m)\right) + \\ + \mathfrak{N}_3 \left(\omega_1(l_m) + I_1(l_m)\right) + \mathfrak{N}_4 \left(\omega_2(l_m) + I_2(l_m)\right) + \\ + \mathfrak{N}_5 \frac{\alpha+2}{\alpha+1} C_\alpha \rho^{-\alpha} l_m^\alpha + \mathfrak{N}_6 \frac{\beta+2}{\beta+1} C_\beta \rho^{-\beta} l_m^\beta + \\ + \mathfrak{N}_7 \frac{\delta}{l_S}, \end{aligned}$$

где $\rho = \operatorname{dist}(S, \partial D)$ *и* $C_\alpha, C_\beta, \alpha > 0, \beta > 0, \mathfrak{N}_i, i = \overline{1,7}$ *— константы, зависящие от системы* (5).

Следствие из данной теоремы утверждает, что если G — произвольная компактно вложенная подобласть D и выполнено условие

$$\max_{S \in T_m, S \subset G} \frac{\delta}{l_S} \to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

то погрешность аппроксимации $e(S)$ стремится к нулю при измельчении треугольников в триангуляции.

В параграфе 1.5 рассматривается отображение $f = (U, V)$, $U, V \in C^2(D)$, которое является решением эллиптической системы уравнений общего вида

$$\begin{cases} \Phi_1 \left(x, U, V, \dfrac{\partial U}{\partial x_1}, \dfrac{\partial U}{\partial x_2}, \dfrac{\partial V}{\partial x_1}, \dfrac{\partial V}{\partial x_2}\right) = 0, \\ \Phi_2 \left(x, U, V, \dfrac{\partial U}{\partial x_1}, \dfrac{\partial U}{\partial x_2}, \dfrac{\partial V}{\partial x_1}, \dfrac{\partial V}{\partial x_2}\right) = 0, \end{cases}$$

где функции Φ_1, Φ_2, вообще говоря, нелинейно зависят от x, U, V, $\frac{\partial U}{\partial x_1}$, $\frac{\partial U}{\partial x_2}$, $\frac{\partial V}{\partial x_1}$, $\frac{\partial V}{\partial x_2}$. Предполагается, что для этой системы выполнен ряд условий, перечисленных в параграфе.

В качестве f_m рассматривается отображение $f_m \colon D \to D^*$, $f_m = (U_m, V_m)$, такое что:

1) $U_m, V_m \in \Omega_\mu^m(D)$;

2) для любой точки $p \in P_m$ выполнено $f_m(p) = f(p)$.

Как и в предыдущих параграфах здесь получена оценка погрешности $e(S)$, которая стремится к нулю при стремлении к нулю диаметра разбиения l_m. Результат сформулирован в виде теоремы 1.5.1 и следствия 1.5.1. Доказательство теоремы конструктивно и показывает, каким образом строится матрица $A_m(x)$.

Глава 2. Геометрические свойства решений эллиптических систем. Во второй главе рассмотрены отображения некоторых распространенных классов, сохраняющие ориентацию симплексов в пространстве $\mathbb{R}^n$. Кроме того, найдено условие сохранения ориентации плоского треугольника для отображений, являющихся решениями эллиптических систем дифференциальных уравнений вида (5), описанных в первой главе.

В параграфе 2.1 сформулирована основная задача, решаемая в данной главе.

Введем ряд обозначений. Пусть задана область $D \subset \mathbb{R}^n$ и невырожденный симплекс $S \Subset D$, образованный точками $p_0, p_1, p_2, \ldots p_n \in D$.

Для набора векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$, $\xi_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{in})^T$, $i = \overline{1,n}$, обозначим

$$\det(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \ldots & \xi_{n1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \ldots & \xi_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{1n} & \xi_{2n} & \ldots & \xi_{nn} \end{vmatrix}.$$

Будем говорить, что симплекс S имеет положительную ориентацию, если точки $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ пронумерованы так, что

$$\det(p_1 - p_0, p_2 - p_0, \ldots, p_n - p_0) > 0,$$

и отрицательную ориентацию, когда $\det(p_1 - p_0, p_2 - p_0, \ldots, p_n - p_0) < 0$.

Рассматриваем отображение $f\colon D \to D^*$, $D^* \subset \mathbb{R}^n$, которое является гомеоморфным и дифференцируемым п. в. в D, а x_0 — некоторая внутренняя точка симплекса S, в которой отображение f дифференцируемо.

Обозначим через S' симплекс с вершинами $p'_0 = f(p_0)$, $p'_1 = f(p_1), \ldots$, $p'_n = f(p_n)$.

Пусть $\mathfrak{J}_f(x_0)$ — якобиан отображения f в точке $x_0 \in D$, $d_{x_0}f$ — дифференциал f в точке x_0, и $\| d_{x_0}f \|_d$ — норма дифференциала f в x_0, понимаемая как норма линейного отображения

$$\| d_{x_0}f \|_d = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0} \frac{|d_{x_0}f(\xi)|}{|\xi|}.$$

Положим

$$\beta = \beta(x_0, f, S) = \max_{k=0,1,\ldots,n} \frac{|f(p_k) - f(x_0) - d_{x_0}f(p_k - x_0)|}{|p_k - x_0|}.$$

Кроме того, пусть

$$\Pi(i_1, \ldots, i_k) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{i_1-2} \cdot a_{i_1-1} \cdot b_{i_1} \cdot a_{i_1+1} \cdot a_{i_1+2} \cdot \ldots \times \\ \times a_{i_k-2} \cdot a_{i_k-1} \cdot b_{i_k} \cdot a_{i_k+1} \cdot a_{i_k+2} \cdot \ldots \cdot a_n,$$

где $i_k = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,n}$, $a_i = |p_i - p_0|, b_i = |p_i - x_0| + |p_0 - x_0|$ и $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$.

Пусть также

$$g_k = \sum_{i_1=1}^{k+1} \sum_{i_2=i_1+1}^{k+2} \dots \sum_{i_{n-k-1}=i_{n-k-2}+1}^{n-1} \sum_{i_{n-k}=i_{n-k-1}+1}^{n} \Pi(i_1, \dots, i_{n-k}),$$

где $i_k = \overline{1, n},\ k = \overline{0, n-1}$.

В параграфе 2.2 второй главы получена следующая теорема, которая является обобщением на n-мерный случай описанной выше теоремы Б.

Теорема 2.2.1. *Если якобиан гомеоморфного, дифференцируемого п. в. отображения f в точке x_0 симплекса S удовлетворяет неравенству*

$$\mathfrak{J}_f(x_0) > \frac{1}{Vn!} \sum_{k=0}^{n-1} (\| d_{x_0} f \|_d)^k \beta^{n-k} g_k,$$

где V — объем симплекса S, то симплекс S' имеет ту же ориентацию, что и симплекс S.

В следующем параграфе главы рассматривается K-квазиконформное отображение $f\colon D \to D^*$.

Пусть x_0 — некоторая внутренняя точка симплекса S, в которой f дифференцируемо. Положим t_0 — максимальный положительный корень уравнения $Q_n(t) = 0$, где

$$Q_n(t) = Vt^n - \frac{1}{n!}\beta^n g_0 - \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n-1} K^{\frac{k}{n}} \beta^{n-k} g_k t^k.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3.1. *Если якобиан K-квазиконформного отображения f, дифференцируемого в точке x_0 симплекса S, удовлетворяет неравенству*

$$\mathfrak{J}_f(x_0)^{\frac{1}{n}} > t_0,$$

то симплекс S' имеет ту же ориентацию, что и симплекс S.

В параграфе 2.4 исследуется квазиизометрическое отображение

$$f\colon D \to D^*,\ f \in C^1(D).$$

В силу квазиизометричности существуют такие положительные $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q} \le \mathfrak{Q}$, что для любых $x, y \in D$ выполнено

$$\mathfrak{q}|x - y| \le |f(x) - f(y)| \le \mathfrak{Q}|x - y|.$$

Через $\omega(t),\ t > 0$, обозначим модуль непрерывности дифференциала f

$$\omega(\delta) = \sup_{|x-y|\le\delta} \| d_x f - d_y f \|_d,\ x, y \in D, \delta > 0$$

и положим

$$I(\tau) = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \omega(t)dt, \quad \tau > 0.$$

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.4.1. *Если якобиан квазиизометрического отображения $f \in C^1(D)$ в точке p_0 симплекса S удовлетворяет неравенству*

$$\mathfrak{J}_f(p_0) > \frac{\mathfrak{Q}^n}{Vn!}\left(\left(1 + \frac{I(l_S)}{\mathfrak{Q}}\right)^n - 1\right)\prod_{i=1}^n |p_i - p_0|,$$

где l_S — максимальная из длин сторон симплекса S и V — его объем, то симплекс S' имеет ту же ориентацию, что и симплекс S.

Кроме того, в параграфе получено следствие 2.4.1, в котором условие сохранения ориентации симплекса формулируется без участия якобиана, в виде неравенства

$$\frac{V}{\prod\limits_{i=1}^n |p_i - p_0|} > \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{q}}\right)^n\left(\left(1 + \frac{I(l_S)}{\mathfrak{Q}}\right)^n - 1\right),$$

связывающего геометрические характеристики симплекса и характеристики отображения f.

В следующем параграфе второй главы исследуется отображение $f\colon D \to D^*$, $f \in C^2(D)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, которое является гомеоморфным гармоническим ограниченным отображением, где $f_i \in C^2(D)$ — гармонические в D функции для всех $i = \overline{1, n}$.

Для произвольного компактного подмножества $D' \subset D$, содержащего симплекс S, определим

$$\rho_{min} = \min\{\rho_{_{D'}}, \rho_{_{p_0}}\},$$

где

$$\rho_{_{D'}} = \operatorname{dist}(D', \partial D), \quad \rho_{_{p_0}} = \operatorname{dist}(p_0, \partial D).$$

Кроме того, положим $\operatorname{diam} f(D) = \sup\limits_{x,y \in D} |f(x) - f(y)|$.

Справедлива теорема.

Теорема 2.5.1. *Если для гомеоморфного гармонического ограниченного отображения f выполнено неравенство*

$$\frac{\mathfrak{J}_f(p_0)}{(\operatorname{diam} f(D))^n} > \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{l_S}{\rho_{min}}\right)^n \frac{1}{V}\left(\left(2n^2\frac{l_S}{\rho_{min}} + 1\right)^n - 1\right),$$

где l_S — максимальная из длин сторон симплекса S, а V — его объем, то симплекс S' имеет ту же ориентацию, что и симплекс S.

В параграфе 2.6 мы переходим к плоскому случаю и рассматриваем гомеоморфное отображение

$$f\colon D \to D^*,\ D, D^* \subset \mathbb{R}^2,$$
$$f(x) = (U(x), V(x)),\ x = (x_1, x_2) \in D,$$

такое, что $U, V \in C^2(D)$ являются решением эллиптической системы дифференциальных уравнений (5), рассмотренной в параграфе 1.3 главы 1,

$$\begin{cases} \mathfrak{a}\dfrac{\partial U}{\partial x_1} + \mathfrak{b}\dfrac{\partial U}{\partial x_2} = \dfrac{\partial V}{\partial x_2}, \\ \mathfrak{d}\dfrac{\partial U}{\partial x_1} + \mathfrak{c}\dfrac{\partial U}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial V}{\partial x_1}. \end{cases}$$

Полагаем, что выполнено $\inf\limits_D \mathfrak{a} > 0$ и

$$\inf_D \left\{ \mathfrak{ac} - \left(\frac{\mathfrak{b} + \mathfrak{d}}{2} \right)^2 \right\} > 0.$$

В плоском случае S представляет собой ориентированный треугольник в области D, образованный точками $p_0, p_1, p_2 \in D$. Соответственно, S' — ориентированный треугольник с вершинами $p_0' = f(p_0), p_1' = f(p_1), p_2' = f(p_2)$.

Обозначим через ψ угол между сторонами p_0p_1 и p_0p_2 треугольника S и

$$\mathfrak{N}(l_S) = \sqrt{(C_\alpha)^2 \rho^{-2\alpha} \frac{(l_S)^{2\alpha}}{(\alpha+1)^2} + (C_\beta)^2 \rho^{-2\beta} \frac{(l_S)^{2\beta}}{(\beta+1)^2}},$$

где $\rho = \operatorname{dist}(S, \partial D)$ и $C_\alpha, C_\beta, \alpha > 0, \beta > 0$ — константы, зависящие от системы (5).

Пусть также $\lambda_{\min} = \lambda_{\min}(p_0) > 0$ — минимальное из собственных чисел матрицы

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a}(p_0) & \frac{\mathfrak{b}(p_0)+\mathfrak{d}(p_0)}{2} \\ \frac{\mathfrak{b}(p_0)+\mathfrak{d}(p_0)}{2} & \mathfrak{c}(p_0) \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\widetilde{C} = \frac{1}{2} \min \left\{ \lambda_{\min}, \frac{\lambda_{\min}}{\mathfrak{a}(p_0)\mathfrak{c}(p_0) - \mathfrak{b}(p_0)\mathfrak{d}(p_0)} \right\}.$$

Справедлива теорема.

Теорема 2.6.1. *Если для якобиана отображения f в точке p_0 выполнено неравенство*

$$(\mathfrak{J}_f(p_0))^{\frac{1}{2}} > \frac{\mathfrak{N}(l_S)}{\sqrt{\widetilde{C}} \sin\psi} \left(1 + \sqrt{1 + \widetilde{C} \sin\psi} \right),$$

то треугольник S' имеет ту же ориентацию, что и треугольник S.

Некоторые из результатов диссертационного исследования были получены в ходе работ по гранту РФФИ №11-01-97021-р_поволжье_а.

В заключение автор выражает глубокую благодарность за полезные советы, замечания и внимание к работе своему научному руководителю д.ф.-м.н., проф. В.А. Клячину, а также коллективу ИМИТ ВолГУ и, в особенности, д.ф.-м.н., проф. А.А. Клячину, к.ф.-м.н. А.Н. Кондрашову, к.ф.-м.н. А.В. Светлову, к.ф.-м.н. И.А. Романовой, к.ф.-м.н. А.А. Широкому.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов исследований

[1] Болучевская, А.В. *Гладкая аппроксимация решений эллиптических систем* / А.В. Болучевская // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. — 2011. — № 8 (89). — С. 21–28.

[2] Болучевская, А.В. *Сохранение ориентации симплекса при квазиизометричном отображении* / А.В. Болучевская // Известия Саратовского государственного университета. Новая серия. — 2013. — Т. 13. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1, ч. 2. — С. 20–23.

Публикации в других изданиях

[3] Болучевская, А.В. *C^1-аппроксимация решений эллиптических систем кусочно-гладкими отображениями* / А.В. Болучевская // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика. — 2011. — № 2 (15). — С. 4–16.

[4] Болучевская, А.В. *Аппроксимация дифференциалов решений эллиптических систем* / А.В. Болучевская // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика. — 2013. — № 1 (18). — С. 31–44.

[5] Болучевская, А.В. *C^1-аппроксимация решений эллиптических систем* / А.В. Болучевская // Сборник тезисов Международной конференции по современному анализу. Донецк: Изд-во Донецкого национального университета. — 2011. — С. 30.

[6] Болучевская, А.В. *C^1-аппроксимация решений эллиптических систем кусочно-линейными отображениями* / А.В. Болучевская // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского, Материалы Десятой

международной Казанской летней научной школы-конференции. Казань: Изд-во Казанского математического общества, изд-во Казанского государственного университета. — 2011. — Т. 43. — С. 51–53.

[7] Болучевская, А.В. *Аппроксимация дифференциалов решений эллиптических систем по приближенным значениям* / А.В. Болучевская // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского, Материалы Десятой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения-2011». Казань: Изд-во Казанского математического общества. — 2011. — Т. 44. — С. 95–97.

[8] Болучевская, А.В. *Условия сохранения ориентации симплексов при отображениях некоторых классов* / А.В. Болучевская // Материалы 2-й Всероссийской молодежной научной конференции «Современные проблемы математики и механики». Томск: Изд-во Томского государственного университета. — 2011. — С. 3–6.

[9] Болучевская, А.В. *Сохранение ориентации симплекса при квазиизометричном отображении* / А.В. Болучевская // Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 16-й Саратовской зимней школы. Саратов: Изд-во «Научная книга». — 2012. — С. 28.

[10] Болучевская, А.В. *О сохранении ориентации симплексов при отображениях некоторых классов* / А.В. Болучевская // XVI Региональная конференция молодых исследователей Волгоградской области. Вып. 4. Физика и Математика: тез. докл. Волгоград: Изд-во ВолГУ. — 2012. — С. 18–21.

[11] Болучевская, А.В. *Условие сохранения ориентации симплекса* / А.В. Болучевская // Материалы школы-конференции по геометрическому анализу. Горно-Алтайск: РИО ГАГУ. — 2012. — С. 10–11.

[12] Болучевская, А.В. *Гармонические отображения, сохраняющие ориентацию симплекса* / А.В. Болучевская // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Материалы XI молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения-2012». Казань: Изд-во Казанского математического общества. — 2012. — Т. 45. — С. 27–29.

[13] Болучевская, А.В. *Условие сохранения ориентации треугольника при отображениях, являющихся решением эллиптических систем* / А.В. Болучевская // Геометрический анализ и его приложения: материалы II международной конференции. Волгоград: Издательство ВолГУ. — 2014. — С. 31–32.