На правах рукописи

ЗАЛЯЛОВ ДИНАР ГУМАРОВИЧ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Специальность:
01.01.07 – Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань 2016

Диссертационная работа выполнена на кафедре математической статистики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Казанский(Приволжский) Федеральный Университет»

Научный руководитель	**Лапин Александр Васильевич** доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики Казанского (Приволжского) федерального университета
Официальные оппоненты:	**Галиев Шамиль Ибрагимович** доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева-КАИ
	Копысов Сергей Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией вычислительных и информационных технологий Института механики Уральского отделения Российской Академии наук
Ведущая организация	**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики Российской Академии Наук им. Г.И. Марчука г. Москва**

Защита состоится 30 июня 2016 года в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 при ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, ауд. 1011.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 35.

Электронная версия автореферата размещена на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета: www.kpfu.ru.

Автореферат разослан «___» _____________ 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор Задворнов О.А.

Общая характеристика работы

Объект исследования и актуальность темы

Задачи оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных при наличии ограничений на состояние системы, представляют собой весьма сложный объект численного анализа. Несмотря на то, что уже многие десятилетия данные задачи изучались научным сообществом (первая книга в этой области была написана Лионсом Ж.-Л. еще в 1972 году), они по прежнему не теряют своей актуальности.

Известны два основных подхода при решении указанных задач оптимального управления. В первом из них для дифференциальной задачи строится функция Лагранжа и затем находятся ее стационарные точки. Основная трудность в этом случае связана с отсутствием какой-либо гладкости множителей Лагранжа, которые могут быть лишь мерами. В связи с этим используются методы регуляризации дифференциальных задач. Например, регуляризация Моро-Иосиды, в которой регуляризуется индикаторная функция множества ограничений. Такой подход например, можно найти в работах Hintermuller M., Kunisch K., в которых авторы отмечают, что подзадачи, получившиеся после регуляризации методом Моро-Иосиды, решаются эффективно полугладкими методами Ньютона.

Еще один способ получить гладкие множители Лагранжа - это регуляризация Лаврентьева, которая состоит в комбинации поточечных ограничений на состояние и управление. Например, Hinze, Mayer исследовали этот метод для эллиптической задачи управления с ограничением на функцию состояния, для которой в дальнейшем произвели вариационную дискретизацию. В статьях S. Cherednichenko, Krumbiegel K., Rosch A. можно найти оценки погрешностей, возникающие для данного типа регуляризации. Другие методы решения регуляризованных задач можно найти в статьях Bergounioux M., Ito K., Troltzsch F., Hinze M.

Второй подход к решению задач оптимального управления, в том числе, с ограничениями на состояние (эти ограничения важны, когда их нарушение приводит к фазовым переходам), состоит в первоначальной аппроксимации дифференциальной задачи с использованием, как правило, сеточных методов, и дальнейшем решении дискретной задачи оптимизации с ограничениями-равенствами и ограничениями-неравенствами. Несмотря на «классический» характер таких задач (см. монографии Гилл Ф., Мюррей У.,Bertsekas D., Васильев Ф. П.), проблемы построения эффективных итерационных методов их решения продолжают оставаться актуальными, поскольку в большинстве случаев эти задачи характеризуются очень высокой размерностью и плохой обусловленностью.

Такого рода сеточные задачи, но без ограничений на вектор состояния, могут эффективно решаться градиентным методом с проекцией. Но в общем случае этот подход можно применить лишь предварительно регуляризовав задачу перечисленными выше методами.

Иной вариант построения итерационного метода основан на введении множителей Лагранжа, с помощью которого задача преобразуется к седловой задаче с ограничениями. Такой подход, например, используется в работе Bergounioux M., Kunisch K., в которой исследуется задача оптимального управления с граничной функцией управления.

Одной из практических задач, где могут применяться данные методы является задача об оптимальном залитии свежего бетона, которая подразумевает нахождение соотношения смеси ингредиентов в бетоне, изменение выбора ингредиентов в конкретном случае (например, изменение типа цемента) или с помощью добавок, манипулирование температурой сырья до залития, то есть начальное условие. Решение данной задачи с учетом его термомеханических свойств описана в диссертационной работе Benedix O.

Одним из способов решения задачи оптимального управления является предобусловленный метод Удзавы. Данный метод для решения задач линейного программирования была предложен в классической работе Эрроу К.Дж., Гурвиц Л., Удзава Х.

Задача, рассмотренная в данной диссертации, впервые была приведена в работе Tiba D., где автор доказывает сходимость сеточной схемы для даннойзадачи.

Метод Удзавы является основным в диссертации. К преимуществам данного метода можно отнести точное удовлетворение ограничениям на управление и состояние. Отметим, что при этом уравнение состояния удовлетворяется в пределе при сходимости итерационного процесса.

Большой вклад в развитие теории решения задач оптимального управления оказали и российские ученые (в т.ч. Казанского университета). Еще в 1978 году в книге Федоренко Р.П. были описаны основные конструкции алгоритмов приближенного решения, использующие прямое решение уравнений принципа максимума, вариации в фазовом пространстве и вариации в пространстве управлений. В книге Быченкова Ю.В. и Чижонкова Е.В. приведен обзор различных итерационных методов решения данных задач. В работах Лапина А.В. были описаны способы применения предобусловленного метода Удзавы для решения конечно-разностной седловой задачи оптимального управления. Большое внимание построению итерационных методов решения конечномерных включений и их приложениям к задачам оптимального управления и вариационных неравенств с нелинейным основным оператором при наличии ограничений к градиенту решения уделено в работах Laitinen E., Lapin A.. Особенности применения итерационных методов для решения вариационных неравенств описаны в работах Бадриева И.Б. и Задворнова О.А..

Второй метод, используемый в диссертации - это метод штрафа. Суть метода заключается в регуляризации седловых задач по двойственным переменным и решении получившейся задачи. Этот метод широко использовался в статьях Коннова И.В., в которых например, решалась общее вариационное неравенство в конечномерном пространстве, где известно только приближение последовательности, вместо точных значений отображения затрат и допустимого множества.

У Graser C., R. Kornhuber была описана итерационная схема(созданная на основе метода Ньютона, дополнения Шура и регуляризацией предобусловленного метода Удзавы) для решения седловых задач с ограничениями в виде линейных неравенств.

Также на практике широко используется подход с применением стратегии множества активных ограничений на прямые и двойственные переменные.

Кроме того, отметим полугладкие методы Ньютона, в которых на каждой итерации метода решается система линейных уравнений с седловой матрицей.

Иной способ решить задачи оптимального управления состоит в использовании метода внутренней точки. В одной из статьей Bergounioux M. сравнивается этот метод с обобщенным методом Моро-Исиды. Автор статьи отмечает, что, в зависимости от условий задачи (есть ли ограничения на управление или состояние, по значению некоторых параметров и размеров сетки) обобщенный метод Моро-Иосиды на основе алгоритмов или метод внутренней точки может стать более эффективным с точки зрения процессорного времени. Преимущество обобщенного алгоритма Моро-Иосиды в том, что при определенных условиях он обеспечивает точное решение, в то время как метод внутренней точки дает лишь приближенные решения. Кроме того, обобщенные алгоритмы Моро-Иосиды значительно проще программировать, чем методы внутренней точки. В то же время в работах Schiela A. была описана возможность достижения суперлинейной сходимости для метода внутренней точки.

Цели работы и задачи исследования

Цели данной работы: построение сеточных аппроксимаций эллиптических задач оптимального управления с нелокальными и поточечными ограничениями на функцию состояния, обоснование корректности и сходимости сеточных аппроксимаций, построение и исследование сходимости итерационных методов решения сеточных аппроксимаций указанных задач, создание программного комплекса для проверки полученных результатов на различных архитектурах ЭВМ.

Методы исследования

В качестве аппарата исследований применялись методы функционального анализа, вариационного исчисления и оптимизации, теории сеточных методов. Для проведения вычислительных экспериментов использовалась система программирования Qt Creator 2.5.0.

Достоверность и обоснованность результатов

Достоверность теоретических утверждений подтверждается строгими доказательствами всех сформулированных утверждений. Результаты вычислительных экспериментов согласуются с теоретическими результатами.

Научная новизна

1. Построены сеточные аппроксимации эллиптических задач оптимального управления с нелокальными и поточечными ограничениями на функцию состояния. Доказаны их однозначная разрешимость и сходимость.

2. Для седловых задач, определяющих седловую точку функции Лагранжа задачи оптимального управления с ограничениями, построены эквивалентные преобразования, позволяющие применение метода Удзавы.

3. Обоснована сходимость построенных итерационных методов.

4. Получены оценки близости решений исходной дискретной задачи оптимального управления и ее регуляризованного варианта.

5. Предложены и изучены различные варианты метода штрафа на основе включения в целевую функцию уравнения состояния в качестве штрафа.

6. Проведен сравнительный численный анализ предложенных методов решения.

Практическая ценность

Построенные и обоснованные сеточные методы и итерационные алгоритмы могут быть использованы при решении задач оптимального управления системами, описываемыми линейными уравнениями в частных производных, при наличии поточечных ограничений на управление и поточечных и интегральных ограничений на состояние. Задачи оптимального управления с ограничениями на состояние возникают, например, для задачи оптимального залития бетона.

Апробация работы

Основные положения диссертации обсуждались на научных семинарах и

1. Всероссийской конференции «Сеточные методы для краевых задач и приложения» в г.Казани, 2012г.

2. Всероссийском форуме и молодежной школе «Суперкомпьютерные технологии в образовании, науке и промышленности» г.Нижний Новгород, 2013г.

3. Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование» посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова, Ижевск, 2015г.

Личный вклад

Автор принял участие в исследовании сеточных аппроксимаций задач оптимального управления, разработке и обосновании предобусловленных итерационных методов Удзавы, градиентного метода и методов штрафа для сеточной задачи оптимального управления с ограничениями на управление и состояние. Программный комплекс для проведения численных экспериментов и вычислительные эксперименты были проведены лично автором.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит введения, четырех глав, выводов, заключения, приложения и списка литературы. Полный объем составляет 101 страница. Библиография включает 64 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение

В введение обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована проблема, произведен обзор научной литературы по изучаемой проблеме, сформирована цель, поставлена задача работы, научная новизна и практическая значимость работы. Кроме того, описаны полученные новые результаты и положения, выносимые на защиту.

Глава 1

В первой главе диссертационной работы произведена постановка основной задачи и доказывается наличие ее решения. Далее введена конечномерная сетка и изучен вопрос конечно-разностной аппроксимации данных задачи для данной сетки, доказана ее сходимость к решению исходной задачи. Также в главе изучен вопрос регуляризации сеточной задачи. Введя функцию Лагранжа для сеточной и регуляризованной задачи, найдены их седловые точки и приведены теоремы существования решения для седловых задач и их доказательства. В конце главы приведены оценки близости решений этих двух задач.

В **первом параграфе** рассмотрена постановка модельной задачи оптимального управления, исследуемая в настоящей диссертации.

В качестве задачи состояния выступает однородная задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области Ω с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$:

$$-\Delta y = u,\ x \in \Omega,\quad y(x) = 0, x \in \partial\Omega. \tag{1}$$

Здесь u – это функция управления, решение y – состояние системы, а множества ограничений на функции управления и состояния задаются равенствами:

$$U_{ad} = \{u \in L_2(\Omega) : |u(x)| \leqslant 1 \ \forall x \in \Omega\}, \ Y_{ad} = \{y \in H_0^1(\Omega) : \int\limits_{\Omega} y(x)\, dx \leqslant 1\},$$

а целевой функционал

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(y-y_d)^2 dx + \frac{r}{2}\int\limits_{\Omega} u^2 dx, \ r = \mathrm{const} > 0, \ y_d \in L_2(\Omega).$$

Задача оптимального управления определена следующим образом:

$$\begin{gathered} \text{найти} \min_{(y,u)\in K} J(y,u), \\ K = \{(y,u) : y \in Y_{ad}, \ u \in U_{ad}, \ \text{ выполнено } (1)\} \end{gathered} \tag{2}$$

Затем было произведено доказательство теоремы существования и единственности решения данной задачи и построена конечно-разностная аппроксимация задачи на равномерной сетке $\omega_h = \{(x_i, y_j) = (ih, jh), \, i, j, = 0, 1, \ldots, n+1; \, (n+1)h = 1\}$, считая для простоты, что функции u и y_d непрерывны:

$$\begin{cases} \dfrac{-y_{i-1j} + 2y_{ij} - y_{i+1j}}{h^2} + \dfrac{-y_{ij-1} + 2y_{ij} - y_{ij+1}}{h^2} = u_{ij}, \ 1 \leqslant i, j \leqslant n, \\ y_{0j} = y_{j0} = y_{jn+1} = y_{n+1j} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

$$U_{ad}^h = \{u_h : |u_{ij}| \leqslant 1, \ i, j = 1, 2, \ldots, n\}, \ \ Y_{ad}^h = \{y_h : h^2 \sum_{i,j=1}^{n^2} y_{ij} \leqslant 1\}.$$

$$J_h(y_h, u_h) = \frac{h^2}{2}\sum_{i,j=1}^{n^2}(y_{ij} - y_{d,ij})^2 + \frac{rh^2}{2}\sum_{i,j=1}^{n^2} u_{ij}^2.$$

В результате была получена конечномерная задача оптимального управления

$$\begin{gathered} \text{найти} \min_{(y_h,u_h)\in K_h} J_h(y_h,u_h), \\ K_h = \{(y_h,u_h) : y_h \in Y_{ad}^h, u_h \in U_{ad}^h, \ \text{ выполнено уравнение } (3)\}. \end{gathered} \tag{4}$$

Далее в работе приводится доказательство того, что задача (4) имеет единственное решение и что последовательность $\{(y_h, u_h)\}$ функций из K_h, при $h \to 0$ сильно сходится в $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ к (y, u) к решению исходной задачи.

Во **втором параграфе** описываются свойства конечномерной седловой задачи, для которой была построена функция Лагранжа и найдена ее седловая точка. В конце параграфа была построена регуляризованная задача и найдена оценка близости решений конечномерном седловой задачи и его регуляризованного варианта.

Упорядочив множества внутренних узлов x_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, сетки ω каким-либо образом и записав систему линейных уравнений (3) в виде $Ly = u$ с симметричной и положительно определенной матрицей L – матрицей сеточного оператора Лапласа при нулевых граничных условиях Дирихле и поделив целевую функцию на h^2, множества ограничений в сеточной задаче были записаны в следующем виде:

$$U_{ad} = \{u \in \mathbb{R}^N : \, |u_i| \leqslant 1 \ \ \forall i\}, \ \ Y_{ad} = \{y \in \mathbb{R}^N : \, \sum_{i=1}^{N} h^2 y_i \leqslant 1 \ \forall i\},$$

а целевой функции - $\dfrac{1}{2}\|y - y_d\|^2 + \dfrac{r}{2}\|u\|^2$.

Обозначив через $\varphi(u) = I_{U_{ad}}(u)$ и $\theta(y) = I_{Y_{ad}}(y)$ — индикаторные функции множеств U_{ad} и Y_{ad}, сеточная задача оптимального управления (4) была преобразована к виду

$$\min_{Ly=u} \left\{ J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2 + \frac{r}{2}\|u\|^2 + \varphi(u) + \theta(y) \right\}. \tag{5}$$

Функция Лагранжа для этой задачи:

$$\mathcal{L}(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2 + \frac{r}{2}\|u\|^2 + \varphi(u) + \theta(y) - (Ly - u, \lambda). \tag{6}$$

Седловая точка (y, u, λ) этой функции Лагранжа является решением следующей системы, дающей условия оптимальности первого порядка:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & -L \\ 0 & rE & E \\ -L & E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial\theta(y) \\ \partial\varphi(u) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} y_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Компоненты (y,u) седловой точки совпали с решением задачи (5) .

Аппроксимировав индикаторную функцию $\theta(y) = I_{Y_{ad}}(y)$ множества Y_{ad} дифференцируемой функцией

$$\theta_\varepsilon(y) = \frac{1}{2\,\varepsilon}((\sum_{i=1}^{N} h^2 y_i - 1)^+)^2.$$

а индикаторную функцию φ множества U_{ad} заменив регуляризованной функцией

$$\varphi_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\varepsilon}\|(u+1)^-\|^2 + \frac{1}{2\,\varepsilon}\|(u-1)^+\|^2$$

где v^- и (v^+) — векторы с координатами u_i^- и (v_i^+), соответственно,

была введена следующая регуляризованная задача:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & -L \\ 0 & rE & E \\ -L & E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_\varepsilon \\ u_\varepsilon \\ \lambda_\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla\theta_\varepsilon(y_\varepsilon) \\ \nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Было доказано, что эта задача имеет единственное решение и найдена оценка близости регуляризованной и исходной задачи.

Глава 2

Во второй главе были рассмотрены два итерационных метода решения седловых задач: предобусловленный метод Удзавы для исходной задачи и градиентный метод для регуляризованного варианта. Доказана сходимость этих методов, найдены параметры итерации и скорость сходимости.

В **первом параграфе** был описан градиентный метод с минимизацией целевого функционала. Для этого, в системе (5) разрешив третье уравнение относительно y_ε и первое уравнение относительно λ_ε, получили включение для вектора u_ε (опустив индекс ε у вектора u_ε):

$$ru + L^{-2}u + L^{-1}\nabla\theta_\varepsilon(L^{-1}u) + \partial\varphi(u) \ni L^{-1}y_d. \tag{9}$$

Для решения (9) был применен одношаговый итерационный метод

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + P_\varepsilon u^k + \partial\varphi(u^{k+1}) \ni L^{-1}y_d, \tag{10}$$

где оператор $P_\varepsilon = rE + L^{-2} + L^{-1}\nabla\theta_\varepsilon \circ L^{-1}$

Алгоритм реализации метода (10) состоял из следующих шагов:

1. для известного вектора управления u^k находится решение уравнения состояния $Ly^k = u^k$;

2. находится сопряженное состояние

$$\lambda^k : \lambda^k = L^{-1}(y^k - y_d + \nabla\theta_\varepsilon(y^k));$$

3. получить новое приближение к вектору управления, решив включение с диагональным максимально монотонным оператором $E + \tau\partial\varphi$:

$$u^{k+1} + \tau\partial\varphi(u^{k+1}) \ni (1 + \tau r)u^k - \tau\lambda^k.$$

Доказано, что итерационный метод (10) сходится при

$$0 < \tau < \frac{2\varepsilon}{\mu_{\min}^{-2} + \varepsilon(r + \mu_{\min}^{-2})},$$

где $\mu_{\min}$ – минимальное собственное число сеточного оператора Лапласа.

При

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\mu_{\min}^{-2} + \varepsilon(r + \mu_{\min}^{-2})}$$

скорость сходимости характеризуется неравенством

$$\|u^{k+1} - u\| \leqslant \rho^{1/2}\|u^k - u\|, \quad \rho = 1 - \frac{r\,\varepsilon}{\mu_{\min}^{-2} + \varepsilon(r + \mu_{\min}^{-2})}.$$

Во **втором параграфе** рассматривался предобусловленный метод Удзавы для исходной и регуляризованной задачи. Для этого, исключив векторы y и u в системе (7), получили уравнение для λ

$$P(\lambda) \equiv L(E + \partial\theta)^{-1}(L\lambda + y_d) - (rE + \partial\varphi)^{-1}(-\lambda) = 0. \tag{11}$$

Применив для решения (11) итерационный метод

$$L^2\frac{\lambda^{k+1}-\lambda^k}{\tau}+P(\lambda^k)=0, \qquad (12)$$

являющийся предобусловленным методом Удзавы для отыскания седловой точки функции Лагранжа (6). При реализации этого метода выполнялись следующие шаги:

1. для известного вектора λ^k находятся y^k и u^k, решив включения с диагональными максимально монотонными операторами

   $$(E+\partial\theta)y^k \ni L\lambda^k+y_d \ \text{ и } \ (r\,E+\partial\varphi)u^k \ni -\lambda^k;$$

2. вычисляется

   $$p^k = L^{-1}u^k;$$

3. решается уравнение

   $$L\frac{\lambda^{k+1}-\lambda^k}{\tau} = -y^k+p^k.$$

Было доказано, что итерационный метод (12) сходится при условии

$$0<\tau<\frac{2r}{r+\mu_{\min}^{-2}}. \qquad (13)$$

Аналогично рассматривался предобусловленный метод Удзавы и для регуляризованной задачи.

В **третьем параграфе** был произведен анализ результатов вычислительных экспериментов, проведенных с представленными алгоритмами. За основу для вычислений была взята задача с функцией наблюдения $y_d = 10(\sin\pi x_1+\sin\pi x_2)$ и для разных весовых параметров r в целевой функции.

Критерием остановки итераций были условия $\|\delta_u^k\|_{L_2}^2 < 10^{-5}$ и $\|\delta_\lambda^k\|_{L_2}^2 < 10^{-5}$ (невязки по переменным u и λ) для методов (10) и (12), соответственно.

В частности, результаты показали хорошую эффективность градиентного метода, в котором число итераций метода до достижения заданной точности не менялось с увеличением размерности сетки в задаче. С другой стороны, в случае, когда требовалось получить решение с большой точностью, уже метод

Удзавы показывал большую эффективность. К недостаткам метода Удзавы можно отнести линейную зависимость количества итераций от увеличения размерности сетки.

Глава 3

В третьей главе были изучены вопросы регуляризации седловых задач по двойственным переменным.

В **первом параграфе** была рассмотрена следующая седловая задача (обобщенный вариант задачи (7)):

$$\begin{pmatrix} M_y & 0 & -L^T \\ 0 & M_u & E \\ -L & E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial\theta(y) \\ \partial\varphi(u) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

входные данные которой удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered} M_y - \text{неотрицательно определенная матрица}: \; M_y \geqslant m_y E,\; m_y \geqslant 0; \\ M_u - \; \text{положительно определенная матрица}: M_u \geqslant m_u E,\; m_u > 0; \\ L - \text{невырожденная матрица}: \; \|Ly\| \geqslant \mu\|y\| \;\forall y,\; \mu > 0, \end{gathered} \tag{15}$$

θ и φ – выпуклые, собственные и полунепрерывные снизу функции.

Соответствующая седловой задаче (14) регуляризованная задача имеет вид:

$$\begin{pmatrix} M_y & 0 & -L^T \\ 0 & M_u & E \\ -L & E & -\varepsilon D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_\varepsilon \\ u_\varepsilon \\ \lambda_\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial\theta(y_\varepsilon) \\ \partial\varphi(u_\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Было доказано, что если (y, u, λ^0) – решение задачи (14), $(y_\varepsilon, u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ – решение задачи (16) и выполнены условия (15), то справедливы следующие оценки погрешности при различном выборе матрицы D:

$$D = E: \; m_y\|y_\varepsilon - y\|^2 + c_1 m_u\big(\|L(y_\varepsilon - y)\|^2 + \|u_\varepsilon - u\|^2\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda^0\|^2, \tag{17}$$

$$D = LL^T: \; (m_y + c_2 m_u)\|y_\varepsilon - y\|^2 + c_2 m_u\|u_\varepsilon - u\|^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|L\lambda^0\|^2, \tag{18}$$

$$D = L = L^T > 0: \ m_y\|y_\varepsilon - y\|^2 + c_3 m_u\big(\|y_\varepsilon - y\|_L^2 + \|u_\varepsilon - u\|^2\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda^0\|_L^2. \quad (19)$$

где $c_1 \approx \dfrac{1}{2}$, $c_2 \approx \dfrac{\mu^2}{1+\mu^2}$, $c_3 \approx \dfrac{\mu}{1+\mu}$ асимптотически при $\varepsilon \to 0$.

Во **втором параграфе** рассматривалось применение блочного метода Гаусса-Зейделя для седловой задачи (14).

Исключив из седловой задачи (16) вектор λ_ε, была получена система включений

$$\begin{gathered}(M_y + \frac{1}{\varepsilon}L^T D^{-1} L)y_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}L^T D^{-1} u_\varepsilon + \partial\theta(y_\varepsilon) \ni g, \\ (M_u + \frac{1}{\varepsilon}D^{-1})u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}D^{-1} L y_\varepsilon + \partial\varphi(u_\varepsilon) \ni 0.\end{gathered} \quad (20)$$

Применив к этой системе блочный метод Гаусса-Зейделя, задача преобразовалась к следующему виду:

$$\begin{gathered}(M_y + \frac{1}{\varepsilon}L^T D^{-1} L)y^{k+1} + \partial\theta(y^{k+1}) \ni \frac{1}{\varepsilon}L^T D^{-1} u^k + g, \\ (M_u + \frac{1}{\varepsilon}D^{-1})u^{k+1} + \partial\varphi(u^{k+1}) \ni \frac{1}{\varepsilon}D^{-1} L y^{k+1}.\end{gathered} \quad (21)$$

В конце параграфа было доказано, что если выполнено условие: $M_u \geqslant c_0 D^{-1}$, то тогда итерации метода (21) сходятся к решению $(y_\varepsilon, u_\varepsilon)$ задачи (20) со скоростью, зависящей только от ε и при этом, для всех k справедливы следующие оценки:

$$\begin{gathered}\|y^{k+1} - y_\varepsilon\|_{Y_0} \leqslant \frac{1}{1+c_0\varepsilon}\|y^k - y_\varepsilon\|_{Y_0}, \ Y_0 = M_y + \frac{1}{\varepsilon}L^T D^{-1} L, \\ \|u^{k+1} - u_\varepsilon\|_{U_0} \leqslant \frac{1}{1+c_0\varepsilon}\|u^k - u_\varepsilon\|_{U_0}, \ U_0 = M_u + \frac{1}{\varepsilon}D^{-1}.\end{gathered} \quad (22)$$

В **третьем параграфе** описано применение блочного метода Гаусса-Зейделя для седловой задачи. Было доказано, что оценка близости регуляризованного и точного решения равна

1. **Для случая $D = E$:**

$$\|y_{\varepsilon h} - y_h\|_0^2 + \frac{r}{2}\big(\|y_{\varepsilon h} - y_h\|_2^2 + \|u_{\varepsilon h} - u_h\|_0^2\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda_h^0\|_0^2. \quad (23)$$

2. **Для случая** $D = L$**:**

$$\|y_{\varepsilon h}-y_h\|^2+c_2r\big(\|y_{\varepsilon h}-y_h\|_L^2+\|u_{\varepsilon h}-u_h\|^2\big)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\|\lambda_h^0\|_L^2,\ c_2\approx\frac{\mu_{\min}}{1+\mu_{\min}}.\quad(24)$$

3. **Для случая** $D = L^2$**:**

$$(1+c_2r)\|y_{\varepsilon h}-y_h\|^2+\ c_3r\|u_{\varepsilon h}-u_h\|^2\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\|L\lambda_h^0\|^2,\ c_3\approx\frac{\mu_{\min}^2}{1+\mu_{\min}^2}.\quad(25)$$

В **четвертом параграфе** был произведен анализ результатов вычислительных экспериментов, проведенных с представленными алгоритмами. За основу для расчетов была взята конечно-разностная задача (4) при $y_d(x) = 10(\sin(\pi x_1) + \sin(\pi x_2))$ с нулевым начальным приближением. Под точным решением u_ε понималось решение итерационным методом после очень большого количества итераций. Критерием остановки итераций служило условие $\|\delta_u^k\|_{L_2}^2 < 10^{-4}$ (невязка по u). Расчеты тестовых вычислений полностью согласовались с теоретическими выводами, а именно, что скорость сходимости итерационных методов не зависит от размерности задачи (шага сетки) и линейно зависит от параметров ε и r.

Кроме того, оказалось, что использование блочного SOR-метода с параметром верхней релаксации $\sigma > 1$ при подходящем выборе параметра σ дает существенное ускорение сходимости по сравнению с блочным методом Гаусса-Зейделя.

Глава 4

В четвертой главе рассматривалась модификация основной задачи оптимального управления, с добавлением поточечного ограничения на состояние и решение этой задачи обобщенным вариантом предобусловленного метода Удзавы. Доказывалось сходимость метода, найдены параметры итерации и скорость сходимости.

В **первом параграфе** была описана постановка и сеточная аппроксимация модифицированной задачи.

Была рассмотрена задача оптимального управления, в качестве задачи состояния которой взята однородная задача Дирихле для уравнения Пуассона в квадратной области $\Omega = (0,1) \times (0,1)$:

$$y \in H_0^1(\Omega) : \int\limits_\Omega \nabla y \cdot \nabla z dx = \int\limits_\Omega uz dx \ \ \forall z \in H_0^1(\Omega). \tag{26}$$

Здесь u – функция управления, решение y задачи (26) – состояние системы. Задав множества ограничений на функции управления и состояния:

$$U_{ad} = \{u \in L_2(\Omega) : \ u_-(x) \leqslant u(x) \leqslant u_+(x) \text{ п.вс. в } \Omega\},$$

$$Y_{ad} = Y_{ad}^0 \cap Y_{ad}^1, \ Y_{ad}^0 = \{y \in H_0^1(\Omega) : \ y_-(x) \leqslant y(x) \leqslant y_+(x) \text{ п.вс. в }\},$$
$$Y_{ad}^1 = \{y \in H_0^1(\Omega) : \int\limits_\Omega y(x)\, dx \leqslant 1\},$$

где

$$\begin{gathered} u_-, u_+, y_-, y_+ \in C(\bar{\Omega}), \\ u_-(x) < 0 < u_+(x), \ y_-(x) < 0 < y_+(x) \ \forall x \in \bar{\Omega}. \end{gathered} \tag{27}$$

Целевой функционал был определен следующим равенством

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (y - y_d)^2 dx + \frac{r}{2}\int\limits_\Omega (u - u_d)^2 dx, \ r = \text{const} > 0, \ y_d, u_d \in L_2(\Omega).$$

И задача оптимального управления

$$\begin{gathered} (y,u) = \arg\min_{(z,v)\in K} J(z,v), \\ K = \{(z,v) : \ z \in Y_{ad}, \ v \in U_{ad}, \ \text{ выполнено } (26)\} \end{gathered} \tag{28}$$

Было доказано, что данная задача имеет единственное решение. Далее, аналогично главе 1, была введена сеточная аппроксимация данной задачи.

Через y_{-h}, y_{+h} V_h- обозначили интерполянты непрерывных функций y_-, y_+, т.е. функции из V_h, совпадающие в узлах сетки ω с интерполируемыми непрерывными функциями. Пусть $\pi_h : L_1(\Omega) \to W_h$, $\pi_h u(y) = h^{-2} \int\limits_{\delta(x)} u(t) dt$ в точках $y \in \delta(x)$, – оператор интегрального усреднения и $\tilde{y}_{dh} = \pi_h y_d$, $\tilde{u}_{dh} = \pi_h u_d$, $\tilde{u}_{-h} = \pi_h u_-$, $\tilde{u}_{+h} = \pi_h u_+$ – W_h-интерполянты соответствующих функций. Используя введенные обозначения, сеточная задача состояния, множества ограничений и сеточная целевая функция была определена следующими равенствами:

$$y_h \in V_h^0 : \int\limits_\Omega \nabla y_h \cdot \nabla z_h dx = \int\limits_\Omega \tilde{u}_h \tilde{z}_h dx \;\; \forall z_h \in V_h^0, \tag{29}$$

$$U_{ad}^h = \{\tilde{u}_h \in W_h : \tilde{u}_{-h} \leqslant \tilde{u}_h \leqslant \tilde{u}_{+h} \text{ в } \Omega\},\ Y_{ad}^h = Y_{ad}^{0h} \cap Y_{ad}^{1h},$$

$$Y_{ad}^{0h} = \{y_h \in V_h^0 : y_{-h} \leqslant y_h \leqslant y_{+h} \text{ в } \Omega\},\ Y_{ad}^{1h} = \{y_h \in V_h^0 : \int\limits_\Omega y_h(x)\, dx \leqslant 1\},$$

$$J_h(z_h, \tilde{v}_h) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (\tilde{z}_h - \tilde{y}_{dh})^2 dx + \frac{r}{2}\int\limits_\Omega (\tilde{v}_h - \tilde{u}_{dh})^2 dx.$$

Сеточная задача оптимального управления была формулирована следующим образом:

$$\begin{gathered} (y_h, \tilde{u}_h) = \arg \min_{(z_h, \tilde{v}_h) \in K_h} J_h(z_h, \tilde{v}_h), \\ K_h = \{(z_h, \tilde{v}_h) :\ z_h \in Y_{ad}^h, \tilde{v}_h \in U_{ad}^h \text{ и выполнено уравнение (29)}\}. \end{gathered} \tag{30}$$

Введя следующие обозначения:

- $v = \{v_{ij}\},\ i, j = 1, 2, \dots, n$ – множество узловых параметров сеточной функции из V_h или W_h
- u_-, u_+, y_- и y_+ множества узловых параметров сеточных функций $u_{-h}, u_{+h}, y_{-h}, y_{+h}$.
- $v \ll w$ означает $v_{ij} \leqslant w_{ij}$ для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$.

сеточное уравнение состояния, множества ограничений и целевая функция были записаны в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{-y_{i-1j} + 2y_{ij} - y_{i+1j}}{h^2} + \dfrac{-y_{ij-1} + 2y_{ij} - y_{ij+1}}{h^2} = u_{ij},\ 1 \leqslant i, j \leqslant n, \\ y_{0j} = y_{j0} = y_{jn+1} = y_{n+1j} = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Во **втором параграфе** исследовалось сходимость сеточной схемы.

Были введены следующие обозначения: $\|.\|_{0,p}$ – норма пространства Лебега $L_p(\Omega)$, $\|.\|_{l,p}$ – норма пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и целых $1 \geqslant 0$, c – константа, не зависящая от h.

Было доказано, что последовательность решений $\{(y_h, \tilde{u}_h\}$ сеточных задач оптимального управления (30) сильно в $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ сходится к решению (y, u) задачи оптимального управления (28).

В **третьем параграфе** рассматривался итерационный метод для решения приведенной сеточной задачи.

Система линейных уравнений (31) может быть записана в виде $Ly = u$ с симметричной и положительно определенной матрицей L – матрицей сеточного оператора Лапласа при нулевых граничных условиях Дирихле, а целевая функция после деления на h^2 равна $I(y, u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2 + \frac{r}{2}\|u\|^2$, где $\|.\| = \sqrt{(.,.)}$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^N$. Обозначив через E единичную $N \times N$ матрицу, определив прямоугольную $1 \times N$ матрицу P равенством $Py = \sum_{i=1}^{N} h^2 y_i$ и заменив ограничение $y \in Y_{ad}^{1h}$ на два следующих:

$$p = Py, \ p \in P_{ad}^h = \{p \in \mathbb{R} : \, p \leqslant 1\}.$$

и определив как $\varphi(u) = I_{U_{ad}^h}(u)$, $\psi(y) = I_{Y_{ad}^{0h}}(y)$ и $\theta(p) = I_{P_{ad}^h}(p)$ — индикаторные функции соответствующих множеств, сеточная задача оптимального управления (30) была записана следующим образом:

$$\min_{Ly=u,\, Py=p} \left\{ J(y, u, p) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2 + \frac{r}{2}\|u\|^2 + \varphi(u) + \psi(y) + \theta(p) \right\}. \qquad (32)$$

Функция Лагранжа $\mathcal{L} : \, (\mathbb{R}^N)^4 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для задачи (32) была определена равенством

$$\mathcal{L}(y, u, p, \lambda, \mu) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2 + \frac{r}{2}\|u\|^2 + \varphi(u) + \psi(y) + \theta(p) + (\lambda, Ly - u) + h^{-2}\mu(Py - p). \qquad (33)$$

и доказано, что её седловая точка функции является решением следующей системы, дающей условия оптимальности первого порядка:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & L & h^{-2}P^T \\ 0 & rE & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h^{-2} \\ L & -E & 0 & 0 & 0 \\ h^{-2}P & 0 & -h^{-2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \\ p \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial\psi(y) \\ \partial\varphi(u) \\ \partial\theta(p) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} y_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Было доказано, что задача (34) имеет решение (y, u, p, λ, μ) с единственными y, u, p, совпадающими с решением задачи (32).

Затем доказывалось положительная определенность матрицы, действующей на прямые переменные (y, u, p).

Обобщенный метод Удзавы для седловой задачи для задачи (34) с предобусловливателем $D = \mathrm{diag}\Big((L + r^{-1/2}E)^2,\ \ h^{-2}\Big)$ и $q = h^{-2}$ приобрёл следующий вид:

$$\begin{gathered} y^{k+1} + \partial\psi(y^{k+1}) \ni y_d - L\lambda^k - \mu^k\bar{e},\ \bar{e} = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{N}), \\ ru^{k+1} + \partial\phi(u^{k+1}) \ni \lambda^k, \\ v = \mu^k + \sum_{i=1}^{N} h^2 y_i^{k+1};\ p^{k+1} = \{v \text{ если } v \leqslant 1;\ 1 \text{ иначе}\}, \\ (L + r^{-1/2}E)^2 \frac{\lambda^{k+1} - \lambda^k}{\tau} - Ly^{k+1} + u^{k+1} = 0, \\ \frac{\mu^{k+1} - \mu^k}{\tau} + p^{k+1} - \sum_{i=1}^{N} h^2 y_i^{k+1} = 0. \end{gathered} \tag{35}$$

Было доказано, что метод (35) сходится при любых начальных приближениях (λ^0, μ^0), если $0 < \tau < \frac{2}{3+\sqrt{5}}$

При реализации каждого шага метода (35) требовалось решить включения относительно y^{k+1} и u^{k+1} и систему уравнений с матрицей $(L + r^{-1/2}E)^2$. Так как матрицы и многозначные операторы включений – диагональные, то их решение сводилось к простым операциям последовательного точечного проектирования. В свою очередь, в силу факторизованного вида матрицы

$(L + r^{-1/2}E)^2$ решение системы уравнений с этой матрицей было найдено с помощью известных и эффективных алгоритмов.

Критерий окончания итераций.

Для рассматриваемой задачи (34) и метода (35) невязка $r^k_\eta = (r^k_\lambda, r^k_\mu) = (Ly^k - u^k, p^k - Py^k)$, предобусловливатель $D = \mathrm{diag}\Big((L + r^{-1/2}E)^2,\;\; h^{-2}\Big)$, а матрица $\mathcal{A}$ положительно определена, более точно, $(\mathcal{A}z, z) \geqslant \frac{1}{2}(\mathcal{A}_{00}z, z)$, где $\mathcal{A}_{00} = \mathrm{diag}\Big(E,\;\; rE,\;\; h^{-2}\Big)$.

Таким образом, справедлива следующая оценка точности итераций:

$$\|y^* - y^k\|^2 + r\|u^* - u^k\|^2 + h^{-2}|p^* - p^k|^2 \leqslant \\ \leqslant c\|\eta^* - \eta^{k-1}\|_D(\|(L + r^{-1/2}E)^{-1}(Ly^k - u^k)\| + h|Py^k - p^k|), \quad (36)$$

где постоянная c не зависит от h и r, а $\|\eta - \eta^{k-1}\|_D \to 0$ при $k \to \infty$.

В **четвертом параграфе** был произведен анализ результатов вычислительных экспериментов, проведенных с представленным обобщенным вариантом предобусловленного метода Удзавы.

Были решены задачи с функцией наблюдения $y_d = 10(\sin \pi x_1 + \sin \pi x_2)$, параметром $r = 0.01$ в целевой функции и множествами ограничений $U^h_{ad} = \{u : 0 \leqslant u_{ij} \leqslant 30; i, j = 1, 2, \ldots, n\}$, $Y^{0h}_{ad} = \{y : 0 \leqslant y_{ij} \leqslant 1.5 \;\; i, j = 1, 2, \ldots, n\}$, $Y^{1h}_{ad} = \{y : \sum\limits_{i,j=1}^{n} h^2 y_{ij} \leqslant 1\}$. Критерием остановки итераций было условие уменьшения невязки до определенного уровня $res_1 \leqslant 10^{-s}$, $s = 3, 4, 5$. В качестве начальных приближений выбирались нулевые векторы.

Рассматривались три варианта задач:

1. Основная задача с точечными нелокальными ограничениями на функцию состояния.

2. Частный случай вышеприведенной задачи, когда функция управления u ограничена лишь на первой четверти: $U^h_{ad} = \{u_h : 0 \leqslant u_{ij} \leqslant 1; i, j = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}\}$.

3. Задача только с нелокальным ограничением на функцию состояния.

Численные расчеты выявили линейную зависимость числа итераций в первой задаче от точности (от res_1), в то время как для второй задачи эта зависимость сильнее, а для третьей - существенно слабее. Отметим, что во всех случаях скорость сходимости итераций практически не зависела от шага сетки.

Также, на основе численных экспериментов был сделан вывод о существенном влиянии негладкости решения на скорость сходимости итерационного метода.

Положения, выносимые на защиту

1. Эквивалентные преобразования седловой задачи, определяющие седловую точку функции Лагранжа для дискретной задачи оптимального управления.

2. Предобусловенный метод Удзавы для решения задачи оптимального управления с нелокальными ограничениями на состояние системы и управление.

3. Различные варианты метода штрафа для решения исходной задачи.

4. Обобщенный метод Удзавы для решения задачи оптимального управления с точечными и нелокальными ограничениями на состояние системы и управление.

5. Теоретическое и экспериментальное подтверждение (путем численного моделирования на ЭВМ с использованием тестовых задач) различных свойств и параметров алгоритмов. Круг задач, для которых применение этих методов наиболее оправдано.

Список публикаций по теме диссертации:

1. *Залялов Д.Г., Лапин А.В.* Численное решение одной задачи оптимального управления системой, описываемой линейным эллиптическим уравнением, при наличии нелокальных ограничений на состояние системы // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки, 2012. Том 154, Книга 3, с. 129-144. (ВАК)

2. *Залялов Д.Г., Лапин А.В* Метод штрафа на уравнение состояния для одной эллиптической задачи оптимального управления // Известия ВУЗов, Математика, 2015. Том 15, Книга 7, с. 36–48 (ВАК)

3. перевод статьи 2:
   Lapin A. V., Zalyalov D. G. Method of penalization for the state equation for an elliptical optimal control problem// Springer, Russian Mathematics, July 2015 г. (SCOPUS)

4. *Залялов Д.Г., Лапин А.В.* Численное решение задачи оптимального управления системой, описываемой линейным эллиптическим уравнением, при наличии нелокальных ограничений на состояние системы. // Материалы Девятой Всероссийской конференции «Сеточные методы для краевых задач и приложения» в г. Казани, 2012.

5. *Залялов Д.Г., Лапин А.В.* Применение метода декомпозиции для решения задач оптимального управления, описываемых линейным эллиптическим уравнениями при наличии ограничения на состояние системы// Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование» г. Ижевск, 2015г.