На правах рукописи

Антипин Василий Иванович

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова», на кафедре математического анализа и в Научно-исследовательском институте математики СВФУ

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Попов Сергей Вячеславович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Петрушко Игорь Мелетиевич,
ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва),
профессор кафедры высшей математики

доктор физико-математических наук,
профессор Федоров Владимир Евгеньевич,
ФГБОУ ВПО «Челябинский государственный университет» (г. Челябинск), заведующий кафедрой математического анализа

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» (г. Красноярск)

Защита состоится 21 апреля 2016 года в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Россия, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Кремлевская, д.35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета и на сайте kpfu.ru/dis_card?p_id=2110.

Автореферат разослан «____» «_______________» 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, кандидат физико-математических наук, доцент — Е.К. Липачев

Актуальность темы. Пусть E – комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $||\cdot||$, а B, L – линейные операторы, действующие в нем. Рассмотрим уравнение

$$Bu_t = Lu + f, \quad t \in (0,T), \quad (T \leq \infty). \tag{1}$$

Краевые задачи для уравнения (1) представляют собой абстрактную форму многих краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных, для интегро-дифференциальных уравнений. Даже в этот простейший класс уравнений входит значительное количество задач, возникающих в математической физике.

Исследованием уравнения (1) соболевского типа в различных случаях пространства E и операторов B, L занимались многие математики, среди них К. Вейерштрасс, Л. Кронекер, Ф.Р. Гантмахер, Ю.Е. Бояринцев, математики из школы С.Г. Крейна, В.Б. Осипов, С.Д. Эйдельман, С.П. Зубова, К.И. Чернышев, Р.Е. Шовальтер, А.Г. Руткас, Н.И. Радбель, Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев, А.И. Кожанов, А. Фавини, Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров, И.В. Мельников, М.А. Альшанский и др.

Уравнение вида (1), не являющееся уравнением соболевского типа, в абстрактной форме исследовалось, например, Р. Билсом, Н.В. Кисловым, В. Гринбергом, К.В.М. ван дер Ми, П.Ф. Звейфелом, С.Г. Пятковым, П. Грисвардом. Среди методов, применяемых для исследования разрешимости краевых задач для таких уравнений, можно выделить вариационный метод, основанный на проекционных теоремах типа Лакса-Мильграма, методы теории полугрупп, метод Фурье (разложение по собственным функциям).

Для уравнений соболевского типа или близких к ним, а также и для некоторых уравнений, не принадлежащих соболевскому типу, корректна обычная задача Коши или задача, близкая к ней. Иная ситуация в случае, если уравнение не является уравнением типа Соболева (как правило, это означает, что спектр оператора B содержит одновременно бесконечные подмножества положительной и отрицательной полуоси). Ранее в работах М.С. Бауэнди, Р. Билса, М. Жевре, Н.В. Кислова, С.Д. Пагани, С.А. Терсенова были изучены корректные краевые задачи для модельных уравнений вида (1). В этом случае при исследовании вопросов разрешимости, единственности и устойчивости решений возникает ряд проблем, связанных в основном с тем фактом, что на данном временном интервале решение данной задачи не всегда существует. Как правило, оно существует (например, решение первой начально-краевой задачи), но на некотором малом временном промежутке, а далее может разрушиться в том смысле, что решение или его производные могут обратиться в ∞. Примером может служить тот случай, когда коэффициенты уравнения на какой-то поверхности в области задания уравнения плохо себя ведут, например, обращаются в ∞.

Цель работы. Основной целью работы является доказательство теорем существования и единственности, изучение свойств решений локальных и нелокальных краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа, а также изучение приложений полученных результатов для модельных уравнений нечетного порядка с меняющимся направлением времени.

Методы исследования. При исследовании локальных и нелокальных краевых задач для дифференциально-операторных уравнений смешанного типа были использованы приемы и методы разработанные для задач с начальными данными, разрешимыми в целом по времени. Здесь прежде всего следует выделить монографию О.А. Ладыженской, В.А. Солонникова, Н.И. Уральцевой (1967), а также монографии С.Г. Пяткова (2000, 2002). При этом используются методы функционального анализа, методы теории дифференциальных уравнений в частных производных.

При доказательстве существования искомого решения задачи Жевре для уравнения третьего порядка используется метод потенциалов, с помощью которого краевая задача приводится к исследованию системы сингулярных интегральных уравнений, относительно которых отметим монографии Н.Ф. Гахова (1963), Н.И. Мусхелишвили (1962), Л.Г. Михайлова (1966), Т.Д. Джураева (1979).

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты:

• исследованы краевые задачи типа Жевре для новых классов операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа с произвольным диссипативным оператором в главной части;

• доказаны теоремы существования обобщенного решения, изучена гладкость решения в весовых пространствах Соболева, и рассмотрены приложения полученных результатов к уравнениям нечетного порядка с меняющимся направлением времени;

• доказана резрешимость широкого класса нелокальных краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа с оператором, удовлетворяющим условию Като-секториальности в главной части, и исследован вопрос о гладкости решений этих задач в весовых пространствах Соболева;

• для уравнений третьего порядка с одной пространственной переменной с кратными характеристиками доказаны теоремы разрешимости в пространствах Гельдера краевых задач типа Жевре.

Все полученные результаты являются новыми.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на семинаре при кафедре дифференциальных уравнений Казанского (Приволжского) федерального университета под руководством д.ф.-м.н., профессора В.И. Жегалова (Казань: 2015), на объединенном семинаре кафедры математического анализа СВФУ (Якутск: 2014, 2015), НИИ математики СВФУ «Неклассические дифференциальные уравнения, управляемые процессы и их приложения» (директор д.ф.-м.н., профессор И.Е. Егоров), на XLVII–XLIX Международных научных студенческих конференциях «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск: 2009–2012); на XIX, XXI Международных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (2012, 2014:

Москва), на III Всероссийской научной конференции и VII Всероссийской школе-семинаре студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Математическое моделирование развития Северных территорий Российской Федерации» (Якутск: 2012); на Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева «Обратные и некорректные задачи математической физики» (Новосибирск: 2012); на IV Международной молодежной научной школе-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск: 2012); на Международной конференции, посвященной 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск: 2013); на VII Международной конференции по математическому моделированию (Якутск: 2014); на Международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (Улан-Удэ: 2015).

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственных заданий на выполнение НИР: на 2012–2014 гг. (проект 4402), на 2014-2016 гг. (проект 3047), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.: (ГК 02.740.11.0609), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. мероприятие 1.3.2 «Проведение научных исследований целевыми аспирантами» (Соглашение 14.132.21.1350).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 25 работах автора: 8 статьях [1–8], в тезисах 17 докладов [9–25]. В совместной работе [7] постановка задач, идея доказательств теорем разрешимости краевых задач принадлежат С.Г. Пяткову.

8 статей [1–8] опубликованы в журналах из Перечня рецензируемых научных изданий ВАК, в том числе 3 статьи [5–7] (1 статья переводная) входят в международные реферативные базы данных и систем цитирования Web of Science, Scopus.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, содержащих 8 параграфов, заключения и списка литературы. Общий объем составляет 112 страниц. Список литературы содержит 139 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, даны исторические сведения по теме диссертации, а также кратко описывается содержание работы.

В первой главе, состоящей из трех параграфов, рассматриваются краевые задачи для операторно-дифференциальных уравнений вида

$$Au \equiv Bu_t - Lu = f(x,t), \tag{2}$$

где линейные операторы B, L определены в данном гильбертовом пространстве E, причем оператор B самосопряжен. Краевые условия имеют вид

$$P^{+}u(0) = u_0, \quad P^{-}u(T) = u_T, \tag{3}$$

где P^+, P^- — спектральные проекторы оператора B, которые отвечают положительной и отрицательной частям спектра. Здесь не предполагается, что оператор B обратим, в частности, B может иметь ненулевое ядро, и спектр оператора B может содержать одновременно бесконечные подмножества положительной и отрицательной полуосей.

Основные предположения об операторах L, B состоят в следующем.

I) L - максимально диссипативный оператор, и найдется гильбертово пространство F_1, плотно вложенное в E, такое, что $D(L^*) \subset F_1 \subset E$, и существует постоянная $\delta_0 > 0$ такое, что $Re(-L^*u, u) \geq \delta_0 \|u\|^2_{F_1}$ для всех $u \in D(L^*)$, где L^* - сопряженный оператор.

Из условия I) вытекает, что оператор L^* – также максимально диссипативный оператор и $0 \in \rho(L) \cap \rho(L^*)$, более того, $\{Re\lambda \geq 0\} \subset \rho(L) \cap \rho(L^*)$.

II) Оператор B самосопряжен в E, и $F_1 \subset D(|B|^{1/2})$ плотно.

Обозначим через F_2 класс функций $u \in F_1$, таких, что u представимо в виде $u = L^{-1}v$, где $v \in F_1'$, и $\|u\|_{F_2} = \|L^{-1}v\|_{F_1} + \|v\|_{F_1'} = \|u\|_{F_1} + \|Lu\|_{F_1'}$. Тогда $D(L) \subset F_2 \subset F_1$.

Определим пространство H как пополнение $D(|B|^{1/2})$ по норме

$$\||B|^{1/2}v\| = \|u\|_H.$$

Как вытекает из определения, $|B|^{1/2} \in L(H, E)$.

Обозначим $H_1 = \{v \in L_2(0, T; D(L^*)),\ v_t \in L_2(0, T; F_1)\}$.

Определение 1.1.1 *Функция $u \in L_2(0, T; F_1)$ называется обобщенным решением краевой задачи (2), (3), если найдутся $\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_T \in H$, такие, что $P^-\widetilde{u}_0 = \widetilde{u}_0, P^+\widetilde{u}_T = \widetilde{u}_T$, и выполнено равенство*

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T (-(Bu, v_t) - (u, L^*v))dt + (Bu_T, v(T)) - (Bu_0, v(0)) + \\ +(B\widetilde{u}_T, v(T)) - (B\widetilde{u}_0, v(0)) = \int\limits_0^T (f, v)\, dt\end{gathered} \tag{4}$$

для любого $v \in L_2(0, T; D(L^*)), v_t \in L_2(0, T; F_1)$

Теорема 1.1.1 *Пусть выполнены условия I), II). Тогда для любых $f \in L_2(0, T; F_1')$, $u_0, u_T \in H$ существует обобщенное решение $u \in L_2(0, T; F_1)$ краевой задачи (2), (3) в смысле определения 1.1.1.*

Введем дополнительные условия:

III) $Re(-Lu, u) \geq \delta_0 \|u\|^2_{F_1}, \quad \forall u \in D(L)$;

IV) Существуют постоянные $c > 0$ и $\theta \in (0, 1)$, такие, что

$$|(Bu, u)| \leq c\|u\|^{2\theta}_{F_1} \|L^{-1}Bu\|^{2(1-\theta)}_{F_1} \quad \forall u \in F_1;$$

V) $B|_{F_1} \in L(F_1, E)$.

Отметим, что $\|L^{-1}Bu\|_{F_1} \leq c\|Bu\|_{F_1'} \leq c_1\|u\|_{F_1}$.

Если выполнены условие Като-секториальности для оператора L и условия теоремы 1.1.1, то можно показать, что условия III) и IV) являются лишними, они всегда выполнены.

Пусть $g(x)$ - положительная почти везде в области G функция. Определим пространство $L_{2,g}(G;H)$ (H - банахово пространство) как пространство сильно измеримых функций, определенных в G со значениями в H и таких, что

$$\|u\|_{L_{2,g}(G;H)} = \left(\int\limits_G g(x)\|u(x)\|_H^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Пусть $\varphi(t) = t^{2\alpha}(T-t)^{2\alpha}$, где $\alpha = \frac{1}{2(1-\theta)}$.

Теорема 1.1.2 *Если выполнены условия I)-IV) и* $f_t \in L_2(0,T;F_1')$, *то обобщенное решение, полученное в теореме 1.1.1, обладает свойством: существует обобщенная производная* $u_t \in L_{2,\varphi}(0,T;F_1)$. *Если дополнительно выполнено условие V) и* $f \in L_{2,\varphi}(0,T;E)$, *то* $u \in L_{2,\varphi}(0,T;D(L))$.

В параграфе 1.2 при предположении, что $\varphi_i(t) = t^{2i\alpha}(T-t)^{2i\alpha}$, где $\alpha = \frac{1}{2(1-\theta)}$, доказана следующая теорема.

Теорема 1.2.1 *Если выполнены условия I)-IV) и* $\partial_t^i f \in L_{2,\varphi_i}(0,T;F_1')$ $(i = 0,1,\ldots,m)$, *то обобщенное решение, полученное в теореме 1.1.1, обладает свойством: существуют обобщенные производные* $\partial_t^i u \in L_{2,\varphi_i}(0,T;F_1)$ $(i = 0,1,\ldots,m)$. *Если дополнительно выполнено условие V) и* $\partial_t^i f \in L_{2,\varphi_{i+1}}(0,T;E)$ $(i = 0,1,\ldots,m-1)$, *то* $u \in L_{2,\varphi_{i+1}}(0,T;D(L))$.

Параграф 1.3 посвящен изучению краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений вида

$$B(t)u_t - L(t)u = f(t), \quad t \in (0,T), \quad T \leq \infty \tag{5}$$

где $L(t) : E \to E$ и $B(t) : E \to E$ – семейства линейных операторов, определенных в гильбертовом пространстве E. Не предполагается, что B является обратимым.

В дальнейшем предполагается, что оператор $B(0) : E \to E$ и $B(T) : E \to E$ (если $T < \infty$) являются самосопряженными. В этом случае можно определить спектральные проекторы $E^{\pm}(0)$, $E^{\pm}(T)$ этих операторов, соответствующих положительным и отрицательным частям спектров $B(0)$ и $B(T)$ соответственно. Например, если $E_\lambda(0)$ – спектральное разложение $B(0)$, тогда $E^-(0) = E_{-0}$, $E^+(0) = I - E_0$ (I – единичный оператор). Таким образом, $E_0^{\pm}B(0) = B(0)E_0^{\pm}$, $(E^+ - E^-)B(0) = |B(0)|$. Дополняем уравнение (5) граничными условиями

$$E^+(0)u(0) = u_0^+, \quad \lim_{t\to\infty} u(t) = 0 \quad (T = \infty), \tag{6}$$

$$E^+(0)u(0) = h_{11}E^-(0)u(0) + h_{12}E^+(T)u(T) + u_0^+, \tag{7}$$

$$E^-(T)u(T) = h_{21}E^-(0)u(0) + h_{22}E^+(T)u(T) + u_T^- \quad (T < \infty), \tag{8}$$

где h_{ij} являются линейными операторами, свойства которых описываются позже. Второе условие в (6) будет таким же, как $u(t) \in L_2(0,\infty;E)$.

Фиксируем параметр $m = 0,1,2,\dots$ и предполагаем, что линейные операторы $L(t), B(t) : E \to E$, зависящие от параметра $t \in (0,T)$, удовлетворяют следующим условиям.

(I) Существует комплексное гильбертово пространство H_1, плотно вложенное в E, такое, что $L(t) \in L(t) \in W_\infty^m(0,T; L(H_1; H_1'))$ и $B(t) \in W_\infty^{\max(1,m)}(0,T;\ L(H_1; H_1'))$.

(II) Операторы $B(t)$ ($t \in [0,T]$) симметричны в том смысле, что $(B(t)u,v) = (u, B(t)v)$ для всех $u,v \in H_1$. Операторы $B(0) : E \to E$ и $B(T) : E \to E$ (если $T < \infty$) самосопряжены в E; $H_1 \subset D(|B(0)|^{1/2})$ и $H_1 \subset D(|B(T)|^{1/2})$ и оба включения плотные. Существует положительная постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$\mathrm{Re}\,((-L(t) + (i - \frac{1}{2})B_t(t))u,u) \geq \delta_0 \|u\|_{H_1}^2,\ i = 0,1,2,\dots,m$$

для всех $u \in H_1$ и почти всех $t \in (0,T)$.

Отметим, что $W_\infty^0(0,T; L(H_1; H_1')) = L_\infty(0,T; L(H_1; H_1'))$. При выполнении условия (I) и изменения оператора-функции $B(t)$ на множестве нулевой меры при необходимости, можем предположить, что $B(t) \in C([0,T]; L(H_1; H_1'))$. В дальнейшем предполагаем, что это условие выполнено. Кроме того, условие (I) гарантирует, что для каждого $u(t) \in W_2^1(0,T; H_1)$, функция $B(t)u(t) \in L_2(0,T; H_1')$ имеет обобщенную производную $\frac{d}{dt}B(t)u(t)$, и

$$\frac{d}{dt}B(t)u(t) = B(t)u_t(t) + B_t(t)u(t),$$

где u_t, B_t – обобщенные производные от $u(t), B(t)$. Также имеем $(B_t(t)u,v) = (u, B_t(t)v)$ для всех $u,v \in H_1$ и почти всех $t \in (0,T)$.

Определим пространства $F_0 = D(|B(0)|^{1/2})/\ker B(0)$, $G_0 = D(|B(T)|^{1/2})/\ \ker B(T)$, $F_0^{\pm} = \{u \in F_0 :\ \ E^{\pm}(0)u = u\}$, $G_0^{\pm} = \{u \in G_0 :\ \ E^{\pm}(T)u = u\}$. Положим $F_1 = H_1/(\ker B(0) \cap H_1)$, $G_1 = H_1/(\ker B(T) \cap H_1)$. Условие (I) гарантирует, что F_1, G_1 – плотные подпространства F_0, G_0 соответственно. Введем нормы в F_0, G_0 с помощью равенств $(u,v)_{F_0} = (B(0)J(0)u,v)$, $(u,v)_{G_0} = (B(T)J(T)u,v)$, где $J(0) = E^+(0) - E^-(0)$ и $J(T) = E^+(T) - E^-(T)$. Соответственно, символы $[u,v]_{F_0} = (B(0)u,v)$, $[u,v]_{G_0} = (B(T)u,v)$ обозначают индефинитную метрику в F_0 и G_0. Нормы и скалярные произведения в $F_0^{\pm}$ и $G_0^{\pm}$ аналогичны нормам и скалярным произведениям F_0, G_0 соответственно. Построим пространства F_{-1} и G_{-1} как пополнение F_0, G_0 относительно норм

$$\|u\|_{F_{-1}} = \|B(0)u\|_{H_1'},\quad \|u\|_{G_{-1}} = \|B(T)u\|_{H_1'}.$$

Имеем $F_1 \subset F_0 \subset F_{-1}$ и $G_1 \subset G_0 \subset G_{-1}$.

Операторы h_{ij} в (7), (8), как предполагается, удовлетворяют условиям:

$$h_{11} \in L(F_0^-, F_0^+),\ h_{12} \in L(G_0^+, F_0^+),\ h_{21} \in L(F_0^-, G_0^-),\ h_{22} \in L(G_0^+, G_0^-). \tag{9}$$

Можем определить оператор

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{1,2} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} : F_0^- \times G_0^+ \to F_0^+ \times G_0^-.$$

В соответствии с условиями на h_{ij} оператор H определяет линейное непрерывное отображение из $F_0^- \times G_0^+$ в $F_0^+ \times G_0^-$. Предполагаем, что его норма ρ_H удовлетворяет условию

$$\rho_H < 1. \tag{10}$$

Для $i \geq 1$ и $T < \infty$ пусть $\varphi_i(t) = t^{2i}(T-t)^{2i}$. Для $T = \infty$, $\varphi_i \in C^\infty\big([0,\infty)\big)$, $\varphi_i(t) = t^{2i}$ для $t \leq 1$, $\varphi_i(t) = 2$ для $t \geq 2$, и $1 \leq \varphi_i(t) \leq 2$ для $t \in [1,2]$. Пусть $\varphi_0(t) \equiv 1$ и $\varphi_r = 1/\varphi_{-r}$ для $r < 0$. Учитывая гильбертово пространство H и целые числа $l \geq 0, s$, обозначим через $W^{l,s}(H)$ $(l = 0,1,\ldots)$ замыкание $C_0^\infty(0,T;H)$ по норме

$$\|v\|^2_{W^{l,s}(H)} = \sum_{i=0}^{l} \big\|\sqrt{\varphi_{i-s}}v^{(i)}\big\|^2_{L_2(0,T;H)}.$$

Имеем $W^{0,0}(H) = L_2(0,T;H)$. Основные результаты могут быть сформулированы следующим образом.

Теорема 1.3.1 *Предположим, что* $T = \infty$, $f \in W^{m,0}(H_1')$ $(m = 0,1,\ldots)$, $u_0^+ \in F_0^+$, *условия* (I)–(II) *и* (10) *выполнены. Тогда существует решение* $u(t) \in W^{m,0}(H_1)$ *задачи* (5), (6), *такое, что* $\sqrt{\varphi_i}\frac{d^{i+1}}{dt^{i+1}}B(t)u \in L_2(0,T;H_1')$, $i = 0,1,\ldots,m$. *След* $u(0) \in F_{-1}$ *этого решения принадлежит пространству* F_0. *Уравнение* (5), *написанное в форме*

$$(Bu)_t - B_t u - Lu = f,$$

выполнено в пространстве $L_2(0,T;H_1')$. *Если дополнительно* $m \geq 1$, $\sqrt{\varphi_1}f \in L_2(0,T;E)$, $B(t) \in L_\infty(0,T;L(H_1,E))$, *тогда можем предположить, что* $L(t)u(t) \in L_{2,\varphi_1}(0,T;E)$. *И если оператор* L *не зависит от* t, $\sqrt{\varphi_{i+1}}\frac{d^i}{dt^i}f \in L_2(0,T;E)$ $(i = 0,1,2,\ldots,m-1)$ *и* $B(t) \in W_\infty^{m-1}(0,T;L(H_1,E))$, *тогда* $\frac{d^i}{dt^i}Lu(t) \in L_{2,\varphi_{i+1}}(0,T;E)$ $(i = 0,1,2,\ldots,m-1)$.

Теорема 1.3.2 *Предположим, что* $T < \infty$, $f \in W^{m,0}(H_1')$ $(m = 0,1,\ldots)$, $u_0^+ \in F_0^+$, $u_T^- \in G_0^-$, *условия* (I)–(II) *и* (10) *выполнены. Тогда существует решение* $u(t) \in W^{m,0}(H_1)$ *задачи* (5), (7), (8), *такое, что* $\sqrt{\varphi_i}\frac{d^{i+1}}{dt^{i+1}}B(t)u \in L_2(0,T;H_1')$, $i = 0,1,\ldots,m$. *Следы* $u(0) \in F_{-1}$ *и* $u(T) \in G_{-1}$ *(для* $T \neq \infty$*) этих решений принадлежат пространствам* F_0 *и* G_0 *соответственно. Уравнение* (5), *написанное в форме*

$$(Bu)_t - B_t u - Lu = f,$$

выполнено в пространстве $L_2(0,T;H_1')$. *Если дополнительно* $m \geq 1$, $\sqrt{\varphi_1}f \in L_2(0,T;E)$ *и* $B(t) \in L_\infty(0,T;L(H_1,E))$, *тогда можем предположить, что* $L(t)u(t) \in L_{2,\varphi_1}(0,T;E)$. *И если оператор* L *не зависит от* t, $\sqrt{\varphi_{i+1}}\frac{d^i}{dt^i}f \in L_2(0,T;E)$ $(i = 0,1,2,\ldots,m-1)$ *и* $B(t) \in W_\infty^{m-1}(0,T;L(H_1,E))$, *тогда* $\frac{d^i}{dt^i}Lu(t) \in L_{2,\varphi_{i+1}}(0,T;E)$ $(i = 0,1,2,\ldots,m-1)$.

Лемма 1.3.3 *Пусть* $u(t) \in W$ *и*

$$(F_1, F_{-1})_{1/2,2} = F_0, \quad (G_1, G_{-1})_{1/2,2} = G_0. \tag{11}$$

Тогда следы $u(0)$ и $u(T)$ принадлежат пространствам F_0 и G_0 соответственно, и

$$\|u(0)\|_{F_0} + \|u(T)\|_{G_0} \leq c\|u\|_W$$

для некоторого числа c, не зависящего от u. Более того, для всех элементов $v_0 \in F_0$ и $v_T \in G_0$ существует функция $v(t) \in W$, такая, что $v(0) = v_0$ и $v(T) = v_T$.

Теорема 1.3.3 *Пусть условие (11) и условия теоремы 1.3.1 или теоремы 1.3.2 выполнены. Тогда существует не более одного решения задачи (5), (6) или задачи (5), (7), (8) соответственно.*

Вторая глава состоит из трех параграфов. В параграфе 2.1 приводим приложения результатов, полученных в главе 1.

Рассматривается уравнение нечетного порядка с меняющимся направлением времени

$$g(x)u_t - Lu = f, \tag{12}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x),\, x \in G^+, \quad u|_{t=T} = u_T(x),\, x \in G^-, \tag{13}$$

$$u^{(i)}(0) = u^{(i)}(1) = 0,\, i = 0, 1, 2, ..., m-1, \tag{14}$$

$$u^{(m)}(0) = 0, \tag{15}$$

где L – дифференциальный оператор вида

$$Lu = (-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{2m+1} a_i(x)u^{(i)}, \quad a_{2m+1} = 1, \tag{16}$$

$$L^*v = (-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{2m+1} (a_i(x)v)^{(i)} \tag{17}$$

и $g(x) \in L_1(0,1)$ – вещественная, измеримая на $(0,1)$ функция, такая, что существуют открытые множества $G^+, G^- \subset (0,1)$ со свойством $\mu(\overline{G}^+ \backslash G^+) = 0, \mu(\overline{G}^- \backslash G^-) = 0$, и $g(x) > 0$ почти всюду на G^+, $g(x) < 0$ почти всюду на G^- и $g(x) = 0$ на $G \backslash (\overline{G}^+ \cup \overline{G}^-)$.

Будем предполагать, что

$$a_i \in W^i_\infty(0,1), \quad i = 0, 1, \ldots, 2m. \tag{18}$$

Считаем, что $D(L) = \{u \in W_2^{2m+1}(0,1) : u$ удовлетворяет (14), (15)$\}$, $D(L^*) = \{u \in W_2^{2m+1}(0,1) :$ выполняется (14) и $u^{(m)}(1) = 0\}$ и найдется постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$Re(-Lu, u) \geq \delta_0 \|u\|^2_{W_2^m(0,1)},\; Re(-L^*u, u) \geq \delta_0 \|u\|^2_{W_2^m(0,1)} \tag{19}$$

для всех $u \in D(L)$ и $u \in D(L^*)$ соответственно.

Возьмем

$$\theta = \frac{m+2-s}{2(m+1-s)}, \tag{20}$$

где $1/2 < s < m+1$, если $g \in L_1(0,1))$ и $0 \le s < m+1, s \ne 1/2$, если $g \in L_2(0,1)$.

Теорема 2.1.1 *Пусть выполнены условие (19) и вышеприведенные условия на коэффициенты оператора L (18) и функцию $g \in L_1(0,1)$. Тогда, если $f \in L_2(0,T; W_2^{-m}(0,1)), u_0 \in L_{2,g}(G^+), u_T \in L_{2,g}(G^-)$, то существует обобщенное решение задачи (12)-(15) из класса $u \in L_2(0,T; W_2^m(0,1))$, $g(x)u_t \in L_2(0,T; (\widehat{W}_2^{m+1}(0,1))')$. Если, кроме того, предположим, что $f_t \in L_{2,\varphi}(0,T; W_2^{-m}(0,1))$, где $\varphi(t) = t^{2\theta}(T-t)^{2\theta}$, и параметр θ определен равенством (20), то решение обладает свойством: $u \in L_{2,\varphi}(0,T; W_2^{m+1}(0,1))$, $u_t \in L_{2,\varphi}(0,T; W_2^m(0,1))$. Если дополнительно $g \in L_2(0,1)$, $f \in L_{2,\varphi}(0,T;\, L_2(0,1))$, то решение также обладает свойством $u \in L_{2,\varphi}(0,T; W_2^{2m+1}(0,1))$. В последнем случае уравнение (12) выполняется почти всюду в $Q = (0,1) \times (0,T)$, и все обобщенные производные, входящие в уравнение, существуют.*

В параграфе 2.2 в области Q рассматривается уравнение третьего порядка с меняющимся направлением времени

$$\operatorname{sgn} x\, u_{ttt} + u_{xx} = f(x,t), \tag{21}$$

где Q есть прямоугольник $\Omega \times (0,T)$, $\Omega = (-1,1)$, $0 < T < +\infty$.

Решение $u(x,t)$ уравнения (21) ищется при выполнении начальных условий

$$\begin{aligned} &u(x,0) = u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega, \\ &u_t(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1), \quad u_t(x,T) = u_T(x), \quad x \in (-1,0) \end{aligned} \tag{22}$$

и однородных краевых условий

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{23}$$

Введем обозначение: $(u,v) = \int\limits_\Omega u\bar{v}\,dx$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Под обобщенным решением краевой задачи (21)–(23) понимаем функцию $u(x,t)$ такую, что $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$, и выполнено следующее интегральное тождество

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^T [(u_t,\, \operatorname{sgn} x\, v_{tt}) - (u_x,\, v_x)]\,dt + \int\limits_0^1 u_0(x)v_t(x,0)\,dx + \\ &+ \int\limits_{-1}^0 u_T(x)v_t(x,T)\,dx = \int\limits_0^T (f(x,t), v)\,dt \end{aligned} \tag{24}$$

для любой функции $v(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$, такой, что $v_{tt} \in L_2(Q)$, и удовлетворяющей условиям

$$v_t(x,T) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad v_t(x,0) = 0, \quad -1 < x < 0. \tag{25}$$

Обозначим через H_1 гильбертово пространство функций $v(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$, таких, что $v_{tt} \in L_2(Q)$. В качестве нормы в H_1 возьмем величину

$$\|u\|_{H_1} = (\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)} + \|u_{tt}\|^2_{L_2(Q)})^{1/2}.$$

Теорема 2.2.1 *Пусть функция* $f(x,t) \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$, $u_0(x), u_T(x) \in L_2(\Omega)$. *Тогда краевая задача* (21) − (23) *имеет обобщенное решение* $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$.

В параграфе 2.3 в области Q рассматривается уравнение третьего порядка с меняющимся направлением времени

$$\operatorname{sgn} x\, u_t - u_{xxx} = f(x,t). \tag{26}$$

Решение $u(x,t)$ уравнения (26) ищется при выполнении начальных условий

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1), \quad u(x,T) = u_T(x), \quad x \in (-1,0) \tag{27}$$

и однородных краевых условий

$$u(-1,t) = u_x(-1,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{28}$$

В работе Т.Д. Джураева (1979) разрешимость поставленной краевой задачи для уравнения (26) сводится к системе сингулярных интегральных уравнений, которая в классе регулярных решений однозначно и безусловно разрешима.

Под обобщенным решением краевой задачи (26) − (28) понимаем функцию $u(x,t)$, такую, что $u \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(-1,1)), u_t \in L_2(Q)$, и выполнено следующее интегральное тождество:

$$\begin{aligned} &-\int_0^T [(u, \operatorname{sgn} x v_t) + (u_x, v_{xx})]\, dt = \\ &= \int_0^T (f(x,t)v)\, dt + \int_{-1}^0 \; u_T(x)\; v(x,T)dx + \int_0^1 \; u_0(x)v(x,0)dx \end{aligned} \tag{29}$$

для любой функции $v(x,t) \in L_2(0,T;W_2^2(-1,1))$, такой, что $v_t \in L_2(Q)$, и удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned} &v(-1,t) = v(1,t) = 0, \quad v_x(1,t) = 0, \\ &v(x,T) = 0, \quad 0 < x < 1, \qquad v(x,0) = 0, \quad -1 < x < 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Обозначим через H_2 гильбертово пространство функций $v(x,t) \in L_2(0,T;\, \overset{\circ}{W}{}_2^1(-1,1) \cap W_2^2(-1,1))$, таких, что $v_t \in L_2(Q)$ и $v_x(1,t) = 0$. В качестве нормы в H_2 возьмем величину

$$\|u\|_{H_2} = (\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(-1,1))} + \|u_t\|^2_{L_2(Q)})^{1/2}.$$

Теорема 2.3.1 *Пусть функция* $f(x,t) \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$, $u_0(x), u_T(x) \in L_2(\Omega)$. *Тогда краевая задача* (26) − (28) *имеет обобщенное решение* $u \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(-1,1))$.

В третьей главе рассматривается уравнение Жевре третьего порядка с кратными характеристиками

$$\operatorname{sgn} x \cdot u_t - u_{xxx} = 0. \tag{31}$$

Части полосы Q, где $x < 0$ и $x > 0$, обозначим через Q^- и Q^+. Решение уравнения ищется из пространства Гельдера $H_{x\ t}^{p,p/3}(Q^\pm)$, $p = 3 + \gamma$, $0 < \gamma < 1$. удовлетворяющее следующим начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x),\ x > 0, \quad u(x, T) = \varphi_2(x),\ x < 0, \tag{32}$$

и условиям склеивания

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(-0, t) = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(+0, t) \quad (k = 0, 1, 2). \tag{33}$$

Разрешимость краевой задачи (31)-(33) сводится к разрешимости интегрального уравнения

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\beta_1(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \varphi\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{\beta_1(\tau)}{\tau}\,d\tau = Q_1(t), \quad \varphi(x) = x^{\frac{1-\gamma}{3}}\frac{1 - x^{\frac{2}{3}}}{1 - x}. \tag{34}$$

Интегральное уравнение (34) является уравнением с ядром, однородным степени -1. Вводя новые независимые переменные $t = Te^{-y}$, $\tau = Te^{-x}$, получим интегральное уравнение Винера-Хопфа.

Теорема 3.2.1 *Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ $(p = 3 + \gamma)$, $0 < \gamma < 1$. Тогда при выполнении 4 условий разрешимости $L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad s = 1, 2, 3, 4$, существует единственное решение уравнения* (31) *в Q из пространства $H_{x\ t}^{p,p/3}(Q^\pm)$, удовлетворяющее условиям* (32), (33).

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] **Антипин, В.И. Разрешимость краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа / В.И. Антипин // Сибирский математический журнал. – 2013. – Т. 54, № 2. – С. 245–257.**

[2] **Antipin, V.I. Solvability of a boundary value problem for operator-differential equations of mixed type / V.I. Antipin // Siberian Mathematical Journal. – 2013. – Vol. 54, №. 2. – pp. 185–195.**

[3] **Antipin, V.I. On Solvability of Boundary Value Problems for Kinetic Operator-Differential Equations / V.I. Antipin, S.V. Popov, S.G. Pyatkov // Integral Equations and Operator Theory. – 2014. – V.80(4). – pp. 557–580.**

[4] **Антипин, В.И. Разрешимость краевой задачи для уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени / В.И. Антипин // Математические заметки ЯГУ. – 2011. Т. 18, № 1. – С. 8–15.**

[5] **Антипин, В.И. Обобщенная разрешимость краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа / В.И. Антипин // Математические заметки ЯГУ. – 2011. Т. 18, № 2. – С. 21–31.**

[6] **Антипин, В.И. Исследование разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа / В.И. Антипин, С.В. Попов // Математические заметки ЯГУ. – 2012. Т. 19, № 2. – С. 8-19.**

[7] **Антипин, В.И. Краевые задачи для уравнений третьего порядка с меняющимся направлением времени / В.И. Антипин, С.В. Попов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. – 2012. Т. 14, № 40. – С. 19–28.**

[8] **Антипин, В.И. Гладкие решения краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа / В.И. Антипин // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т. 21, № 3. – С. 3–12.**

[9] Антипин, В.И. Гладкие решения задачи Жевре для уравнения третьего порядка / В.И. Антипин // Материалы XLVII международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т. – 2009. – С. 6–7.

[10] Антипин, В.И. Разрешимость краевой задачи для уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени / В.И. Антипин // Материалы XLVIII международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т. – 2010. – С. 31.

[11] Антипин, В.И. Исследование одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени / В.И. Антипин // Математика в школе и вузе. Тезисы V Республиканской научно-методической конференции. – Якутск. – 2010. – С. 36.

[12] Антипин, В.И. Гладкие решения задачи Жевре для уравнения третьего порядка / В.И. Антипин // II Всероссийская конференция и VII Всероссийская школа-семинар студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации»: Тез.докл. – Якутск: Филиал изд-ва ЯГУ, ИМИ ЯГУ. – 2009. – С. 53.

[13] Антипин, В.И. Исследование разрешимости краевой задачи для уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени / В.И. Антипин // Всероссийский научный семинар «Неклассические уравнения математической физики», посвященный 65-летию со дня рождения профессора В.Н. Врагова. Часть I: Тез. докл. – Якутск: Филиал изд-ва СВФУ. – 2010. – С. 39–40.

[14] Антипин, В.И. Разрешимость краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа // Материалы XLIX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т. – 2011. – С. 34.

[15] Антипин, В.И. Разрешимость краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа / В.И. Антипин // Материалы 50-ой юбилейной международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т. – 2012. – С. 27.

[16] Антипин, В.И. Об одном операторно-дифференциальном уравнении смешанного типа / В.И. Антипин // III Всероссийская научная конференция студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации»: Тез. докл. Под редакцией В.И. Васильева. – Якутск: Изд-во "Сфера". – 2012. – С. 156–157.

[17] Антипин, В.И. Исследование разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа / В.И. Антипин // Обратные и некорректные задачи математической физики Международная конференция, посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева: Тез. докл. – Новосибирск: Сибирское научное издательство. – 2012. – С. 342.

[18] Антипин, В.И. О свойствах решений одного операторно-дифференциального уравнения смешанного типа / В.И. Антипин // IV Международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач»: Тез. докл. – Новосибирск: изд-во ИВМиМГ СО РАН. – 2012. – С. 17.

[19] Антипин, В.И. Об одном операторно-дифференциальном уравнении смешанного типа / В.И. Антипин // Материалы XIX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2012» [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2012. – С. 1.

[20] Антипин, В.И. О гладкости решений краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа / В.И. Антипин // Материалы 52-й Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т. – 2014. – С. 74.

[21] Антипин, В.И. Исследование гладкости решений краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа / В.И. Антипин // Материалы XXI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2014» [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2014. – С. 2.

[22] Антипин, В.И. Исследование гладкости решений краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа / В.И. Антипин // VII Межд. конф. по матем. моделир.: Тез. докл. – Якутск: ОАО «Компания Дани-Алмас», 2014. – С. 30–31.

[23] Антипин, В.И. О задаче Жевре для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками / В.И. Антипин, С.В. Попов // Неклассические уравнения математической физики и их приложения: Тез. докл. – Ташкент: Нац. ун-т Узбекистана им. Мирзо Улугбека. – 2014. – С. 80.

[24] Антипин, В.И. Гладкие решения краевой задачи для операторно-дифференциальных

уравнений смешанного типа / В.И. Антипин // Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование». – Улан-Удэ, Байкал. 2015. – С. 49-50.

[25] Антипин, В.И. О краевых задачах для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками / В.И. Антипин, С.В. Попов // Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование». – Улан-Удэ, Байкал, 2015. – С. 50-51.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

автореферат

АНТИПИН Василий Иванович

Подписано в печать «_____» «________________» 2016 г. Формат 60×84/16. Гарнитура «Таймс».
Печать офсетная. Печ. л. 1,25. Уч.-изд. л. 0,3. Тираж 100 экз. Заказ № 205.

Издательский дом Северо-Восточного федерального университета,
677891, г. Якутск, ул. Петровского, 5.

Отпечатано в типографии ИД СВФУ