КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. И. Ульянова–Ленина

На правах рукописи

УДК 517.93 : 517.968.23 : 518

Белко Туре

МНОГОЭЛЕМЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ ВО ВНЕШНОСТИ КРУГОВЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ, И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.01. – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Казань – 2006

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико – математического факультета Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова–Ленина

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Гарифьянов Фархат Нургаязович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Кац Борис Александрович

кандидат физико-математических наук,
доцент Миронова Светлана Рафаиловна

Ведущая организация: Чувашский государственный
университет им. И. Н. Ульянова

Защита диссертации состоится 28 сентября 2006 г. в 14.30 часов на заседании диссертационного совета К. 212.081.07 при Казанском государственном университете им. В. И. Ульянова–Ленина по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, КГУ, корпус 2, аудитория 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина.

Автореферат разослан   августа 2006г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук, доцент   Ю. Р. Агачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Настоящая работа посвящена исследованию линейных функциональных уравнений вида

$$(V\phi)(z) \equiv \sum_{k=1}^{n} A_k \phi[\sigma_k(z)] = g(z),\ z \in D. \tag{0.1}$$

Здесь D – некоторая область органичная кусочно-гладкой кривой, A_k – заданные постоянные. Дробно-линейные функции $\sigma_k(z)$ обладают тем свойством, что $\forall z \in D$ имеем $\sigma_k(z) \notin \overline{D}$. Всегда предполагается,что множество

$$H = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \sigma_k(D) \tag{0.2}$$

несвязно. Свободный член $g(z)$ голоморфен в D $(g(z) \in A(D))$, а решение $\phi(z)$ отыскивается в классе функций, голоморфных вне D и исчезающих на бесконечности $(\phi(z) \in A(D^c))$. Предполагается, что граничное значение $g^+(t)$ функции $g(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера на границе области. Граничное значение неизвестной функции $\phi^-(t)$ должно удовлетворять условию Гёльдера на каждой гладкой компоненте границы, а в узлах допускаются, самое большое, логарифмические особенности. Такой класс решений обозначим через B.

Впервые такой подход встретился в работе Ф. И. Гарифьянова [1] в случае, когда D – прямоугольник. Преобразования $\sigma_k(z)$ являлись порождающими преобразованиями соответствующей двоякопериодической группы или преобразованиями, обратными к ним. Предполагалось, что $A_k = 1,\ k = \overline{1,4}$. К этому линейному четырехэлементному разностному уравнению с постоянными коэффициэнтами нельзя было применить классические методы исследования операторов типа свертки [2], включая и преобразования Бореля [3]. Дело в том, что уравнение (0.1) задано лишь на одной связной компоненте множества (0.2), не содержащей бесконечно удаленную точку. Таким образом, функция $g(z)$ не обязана быть аналитически продолжимой через какую-нибудь дугу границы ∂D. Но даже дополнительное предположение о возможности такого аналитического продолжения (как, например, в случае однородного уравнения $(g(z) \equiv 0)$) нисколько не облегчает исследование задачи (0.1). Поэтому решение ищется в виде интеграла типа Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau,\ z \notin D, \tag{0.3}$$

с неизвестной плотностью. С учетом представления (0.3) соотношение (0.1) записывается в виде интегрального уравнения

$$(A\varphi)(z) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\varphi(\tau)E(z,\tau)d\tau = g(z),\ z \in D. \tag{0.4}$$

Его ядро

$$E(z,\tau) = \sum_{k=1}^{n} A_k[\tau - \sigma_k(z)]^{-1} \tag{0.5}$$

голоморфно в D по переменной z. Далее, с использованием теории краевых задач со сдвигом Карлемана [4], рассматривается вопрос о равносильности регуляризации уравнения (0.4). Такой подход оказался применимым к многим частным случаям уравнения (0.1) (более подробно см. монографию Ф. Н. Гарифьянова [5]). Уравнение (0.4) тесно связано и с проблемой обращения особого интеграла

$$(A\varphi)(t) = \psi(t),\ t \in \partial D, \tag{0.6}$$

к которой приводит задача о вычислении спектра особого интегрального оператора A, понимаемого в смысле главного значения по Коши. Особый оператор A обладает тем свойством, что $A^2 = -I + K$, где K – компактный оператор, а I – тождественный. Абстрактная теория таких операторов была впервые рассмотрена Г. И. Агаевым [6]. Область D удобно выбирать так, чтобы это было фундаментальное множество некоторой собственно разрывной группы дробно-линейных преобразований ([7], с. 361–369). Тогда для регуляризации уравнения (0.1) можно использовать теорию автоморфных функций.

Уравнение (0.1) имеет многочисленные приложения в самых различных разделах комплексного анализа. Уже отмечалось, что преобразование Бореля нельзя применить к исследованию этого уравнения даже в том простейшем случае, когда оно – разностное. Вместе с тем его решение $\phi(z)$ можно рассматривать как нижнюю функцию, ассоциированную по Борелю с некоторой верхней функцией $\Phi(z)$ – целой функцией экспоненциального типа (ц. ф. э. т.). Применяя формулы преобразования Бореля и переходя от нижних функций в уравнении (0.1) к верхним, получаем равносильную задачу для верхних функций. Для этого область D интерпретируем как сопряженную индикаторную диаграмму (наименьшее выпуклое множество, содержащее все особенности нижней функции). Приравнивая коэффициенты Тейлора левой и правой части уравнения (0.1) в некоторой точке $z_0 \in D$ (обычно в качестве этой точки выбирается ноль), приходим к классической проблеме моментов Стильтьеса в ранее не изучавшихся классах ц. ф. э. т. на одном или нескольких лучах. Проблема моментов Стильтьеса состоит в отыскании функции $\Phi(x)$, для которой

$$\int_0^\infty \Phi(x)x^n dx = c_n,\ n = 1, 2, ..., \tag{0.7}$$

где c_n – заданные числа. Этот же аппарат позволяет строить биортогонально сопряженные системы аналитических функций на некоторой замкнутой или разомкнутой кривой [8]. Здесь требуется выделить классы голоморфных функций, представимых в некоторых областях своими биортогональными рядами. Возникают различные интерполяционные задачи, а также теория абсолютно представляющих систем (а. п. с.) и тесно связанные с нею нетривиальные разложения нуля (н. р. н.). Эти проблемы подробно изучались в работах Ю. Ф. Коробейника и его учеников (см., напр., [9]).

Цель работы

Является исследование проблемы обращение особого интеграла на границе различных круговых секторов, некоторых линейных функциональных уравнений для функций, голоморфных вне кругового сектора или системы разрезов. Также рассматриваются приложения функциональных уравнений к проблеме моментов ц. ф. э. т., интерполяционным задачам.

Методика исследования

Основным методом является метод регуляризации функциональных уравнений. Их решения ищутся в виде интеграла типа Коши с неизвестной плотностью. Рассматривается вопрос о равносильности этой регуляризации. Используются также формулы преобразования Бореля.

Научная новизна работы

Основные результаты работы являются новыми.

На защиту выносятся следующие результаты

– Решена проблема обращения особого интеграла на границе круговых секторов, ограниченных отрезками $\{z : |\arg z| = \pi/2j\}$ и дугой окружности $\{z : |z| = 1, |\arg z| \le \pi/2j\}$, при $j = 1, 2$.

– Установлена разрешимость линейных функциональных уравнений для функций, голоморфных вне круговых секторов, ограниченных отрезками $\{z : |\arg z| = \pi/2j\}$ и дугой окружности $\{z : |z| = 1, |\arg z| \le \pi/2j\}$, соответственно $j = 1, 3$.

– Установлена разрешимость линейных функциональных уравнений для функций, голоморфных вне одного или двух разрезов.

– Исследована проблема моментов Стильтьеса и интерполяционная задача, связанные с рассмотренным линейным функциональным уравнением для функций, голоморфных вне одного или двух разрезов. Построены биортогонально сопряженные системы и биортогональные разложения, связанные с проблемой моментов.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация носит теоретический характер. Ее методы и результаты могут быть использованы для решения различных линейных функциональных уравнений.

Апробация работы

Основные результаты работы были доложены на седьмой Казанской международной летней научной школе – конференции "Теории функций, ее приложения и смежные вопросы"(Казань, КГУ, 27 июня – 4 июля 2005 года) и неоднократно на научном семинаре по геометрической теории функций при кафедре математического анализа под руководством проф. Аксентьева Л. А.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 5 работах, список которых приведен в конце автореферата. В двух работах, написанных в соавторстве с научным руководителем, ему принадлежит постановка задачи и определение общего метода исследования.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, содержащих семь параграфов, списка литературы из 43 наименований и 10 рисунков. Общий объем диссертации – 86 страниц.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы работы, приведен обзор литературы и результатов по теме исследования и дано краткое описание содержания диссертации по главам.

Первая глава состоит из трех параграфов, в которых исследуются проблема обращения особого интеграла

$$(A\varphi)(t) \equiv \frac{1}{\pi i}\int_{\partial D} \varphi(\tau)E(t,\tau)d\tau = \psi(t), \quad t \in \partial D, \tag{1}$$

с различными ядрами $E(t,\tau)$ и линейное функциональное уравнение

$$(V\phi)(z) \equiv \sum_{k=1}^{n} \phi[\sigma_k(z)] = g(z), \ z \in D, \tag{2}$$

где D – круговой сектор. Если удалить часть границы ∂D, то получим фундаментальное множество конечной группы вращений диэдра.Особый интеграл (1) от каждого из слагаемых, составляющих ядро $E(t,\tau)$, понимается в смысле главного значения по Коши. Функции φ и ψ удовлетворяют условию Гёльдера на ∂D. Для уравнения (2) решение ищем в классе функций ϕ, голоморфных вне

$\Gamma = \partial D$ и исчезающих на бесконечности. В вершинах у него допускаются, самое большее, логарифмические особенности. Граничное значение $\phi^-(t)$ на каждой открытой стороне Γ должно удовлетворять условию Гёльдера. Функция $(V\phi)(z)$ голоморфна в D. Предполагаем, что свободный член $g(z)$ голоморфен в D, а его граничное значение $g^+(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера на замыкании любой стороны. Решение уравнения (2) будем отыскивать в виде интеграла типа Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{\lambda\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \quad z \notin \Gamma,\ \lambda \in \{1, 2\}, \tag{3}$$

с неизвестной плотностью, удовлетворяющей условию Гёльдера на Γ.

С учетом представления (3) перейдем от уравнения (2) к интегральному уравнению

$$(A\varphi)(z) \equiv \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \varphi(\tau)E(z,\tau)d\tau = g(z), \quad z \in D. \tag{4}$$

В **§1** рассмотрена проблема обращения особого интеграла (1) с ядром

$$E(z,\tau) = \frac{1}{\tau - iz} + \frac{1}{\tau + iz} + \frac{1}{\tau - z^{-1}}. \tag{5}$$

Здесь D – круговой сектор, ограниченный отрезками $\Gamma_{1,3} = \{z : \mathrm{Re}\ z = \mp \mathrm{Im}\ z\}$ соответственно и дугой окружности $\Gamma_2 = \{z : |z| = 1,\ |\arg z| \le \pi/4\}$. Порождающие преобразования группы $\sigma_1(z) = iz$, $\sigma_2(z) = z^{-1}$ и преобразование $\sigma_3 = \sigma_1^{-1} = -iz$ индуцируют гомеоморфизм $\alpha(t) : \Gamma \to \Gamma$, изменяющий ориентацию границы,

$$\alpha(t) = \bar{t} = \sigma_j(t),\ t \in \Gamma_j,\ j = 1, 2, 3; \quad \alpha(\alpha(t)) \equiv t.$$

Производная $\alpha^{'}(t)$ разрывна в вершинах $t_1 = 0$, $t_{2,3} = \sqrt{2}/2 \mp i\sqrt{2}/2$, а сам сдвиг $\alpha(t)$ принадлежит классу $C(\Gamma)$. Заметим, что для соответствующей функции $(A\varphi)(z)$ справедлив аналог формулы Ю. В. Сохоцкого – Й. Племеля

$$A^+ = -W + A, \tag{6}$$

где инволютивный оператор W определяется формулой $W : \varphi(t) \to \varphi[\alpha(t)]$.

Поэтому $\quad (A^2\varphi)(t) \equiv (T_{-1}\varphi)(t) = -\varphi(t) + \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \varphi(\tau)K(t,\tau)d\tau = (A\psi)(t),$

где $K(t,\tau) = E(t,\tau) - \alpha^{'}(\tau)E(\alpha(t), \alpha(\tau))$, причем это ядро ограничено. Основным результатом §1 является

Теорема 1.1. *Проблема обращения особого интеграла (1) с ядром (5), понимаемого в смысле главного значения по Коши, безусловно разрешима и имеет единственное решение*

$$\varphi = T_{-1}^{-1}(A\psi).$$

В **§2** в пункте **2.1** рассмотрена проблема обращения особого интеграла (1), где

$$E(z,\tau)=\frac{1}{\tau+z}+\frac{1}{\tau-z^{-1}}, \tag{8}$$

D – полукруг $|z|<1, \mathrm{Re}\ z>0$, ограниченный отрезками $\Gamma_1=[-i,i]^-$ (отрезок мнимой оси $[-i,i]$ с противоположной ориентацией) и дугой окружности $\Gamma_2=\{z:\ |z|=1,\ 0\leq|\arg z|<\pi/2\}$. В этом случае порождающими преобразованиями группы являются $\sigma_1(z)=-z,\quad \sigma_2(z)=z^{-1}$. Соответствующая проблема обращения решена в явном виде.

Теорема 2.1. *Проблема обращения особого интеграла (1) с ядром (8), понимаемого в смысле главного значения по Коши, безусловно разрешима и имеет единственное решение*

$$\varphi(t)=-(A\psi)(t)+\frac{2}{\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{(A\psi)(\tau)}{\tau}d\tau,$$

Далее в пункте **2.2** рассмотрено линейное функциональное уравнение (2), причем

$$(V\phi)(z)\equiv\phi(z)+\phi(-z)+\phi(z^{-1})+\phi(-z^{-1})=g(z),\quad z\in D. \tag{9}$$

Здесь Γ – это верхняя часть полукруга и $\lambda=1$. При $t\in\Gamma$ имеет место аналог формулы Ю. В. Сохоцкого – Й. Племеля $(A^+\varphi)(t)=\varphi(t)+(A\varphi)(t)$. Заметим, что $(A^+\varphi)(\alpha(t))=(A\varphi)(\alpha(t))$. Тогда получим интегральное уравнение

$$(T\varphi)(t)=(A^+\varphi)(t)-(A^+\varphi)[\alpha(t)]=\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\varphi(\tau)K(t,\tau)d\tau=g^+(t)-g^+[\alpha(t)],$$

где $K(t,\tau)=E(t,\tau)-E[\alpha(t),\tau]\equiv 0$ т. е. $\varphi(t)=g^+(t)-g^+[\alpha(t)]$.

С помощью краевых условий $(V^+\phi)(t)-(V^+\phi)[\alpha(t)]=g^+(t)-g^+[\alpha(t)]$ обратно переходим от уравнения $(T\varphi)(t)$ к задаче (9), откуда находим, что $(V\phi)(z)=g(z)+c,\ z\in D$. Доказана

Теорема 2.2. *Линейное функциональное уравнение (9) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие разрешимости*

$$g(z_0)=(V\phi)(z_0)\Longleftrightarrow\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\varphi(\tau)E(z_0,\tau)d\tau=g(z_0), \tag{10}$$

где z_0 – произвольная точка D. При этом уравнение имеет единственное решение. Это интеграл типа Коши (3) с плотностью $\varphi(t)=g^+(t)-g^+[\alpha(t)]$.

В **§3** исследуется четырехэлементное линейное функциональное уравнение

$$(V\phi)(z)\equiv\phi(ze^{i\pi/3})+\phi(ze^{-i\pi/3})+\phi(-z)+\phi(z^{-1})=g(z),\quad z\in D, \tag{11}$$

где D – круговой сектор, ограниченный отрезками $\Gamma_1=\{z,\ z=xe^{-i\pi/3},\ x\in[0,\ 1]\}$, $\Gamma_2=\{z,\ |z|=1,\ |\arg z|\leq\pi/6\}$, $\Gamma_3=\{z,\ z=xe^{i\pi/3},\ x\in[0,\ 1]\}$.

Порождающие преобразования соответствующей группы диэдра $\sigma_1(z) = ze^{i\pi/3}$, $\sigma_2(z) = z^{-1}$, $\sigma_3(z) = \sigma_1^{-1}(z)$, $\sigma_3 = \sigma_1^{-1}$ и $\sigma_4 = \sigma_1^3$. Производная $\alpha'(t)$ разрывна в точках $t_1 = 0, \quad t_{2,3} = \sqrt{3}/2 \pm i/2$. В этом случае $\lambda = 2$.

С помощью аналога формулы Ю. В. Сохоцкого – Й. Племеля получим $(A^+\varphi)(t) = -\varphi[\alpha(t)]/2 + (A\varphi)(t) = \varphi(t)/2 + (A\varphi)(t)$, поскольку без ограничены общности можно считать, что $\varphi = -W\varphi$. Тогда φ удовлетворяет уравнению Фредгольма второго рода

$$(T\varphi)(t) = (A^+\varphi)(t) - (A^+\varphi)[\alpha(t)] = \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi(\tau)K(t,\tau)d\tau = g^+(t) - g^+[\alpha(t)],$$

где ядро $K(t,\tau) = E(t,\tau) - \alpha'(\tau)E[\alpha(t),\alpha(\tau)]$ – ограниченное. Уравнение $(T\varphi)(t)$ безусловно разрешимо при любой правой части и имеет единственное решение $\varphi(t) = T^{-1}[g^+(t) - g^+[\alpha(t)]]$ (теорема 3.1).

Обратно, переходя от уравнения Фредгольма к задаче (11) аналогично тому, как это было проделано в пункте 2.2, получим

Теорема 3.2. *Линейное функциональное уравнение (11) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие разрешимости (10). При этом, уравнение имеет единственное решение – интеграл типа Коши (3) с плотностью* $\varphi(t) = T^{-1}[g^+(t) - g^+[\alpha(t)]]$.

Вторая глава состоит из четырех параграфов. Рассматривается уравнение

$$(V\phi)(z) \equiv (V_1\phi)(z) \pm (V_1\phi)(iz) = g(z),\ z \in R, \tag{12}$$

где R – квадрат с вершинами $1 \pm i,\ -1 \pm i, V_1$ – некоторый линейный разностный оператор с постоянными коэффициентами. Дробно-линейные преобразования $\sigma_k(z)$ заданы не на R, а на отрезке мнимой оси или совокупности двух вертикальных отрезков L. Множество

$$H = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \sigma_k(L)$$

несвязно. Квадрат R является одним из связных компонентов множества H, содержащем точку $z = 0$. Это позволяет применить при исследовании функциональных уравнений хорошо известные свойства двоякопериодических функций.

Решение ищется в классе B четных функций, голоморфных вне L и исчезающих на бесконечности, и отыскивается в виде интеграла типа Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau,\ z \notin L. \tag{13}$$

Граничное значение $\phi^-(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера на L, а в вершинах допускаются, самое большее, логарифмические особенности. Для рассматриваемых в этой главе разностных операторов V_1 множество особых точек функции

$(V\phi)(z)$ разделяет множество L и бесконечно удаленную точку. Также в этой главе, рассматриваются приложения этих уравнений.

В **§4** рассматривается уравнение (13) в случае, когда $L = [-i, i]$ – отрезок мнимой оси и линейный разностный оператор имеет вид

$$(V_1\phi)(z) \equiv \phi(z+i-1) + \phi(z-i-1) + \phi(z+i+1) + \phi(z-i+1).$$

Плотность интеграла (13) здесь нечетная. Аналоги формул Ю. В. Сохоцкого – Й. Племеля для соответствующего оператора $(A\varphi)(z)$ имеют вид

$$\lim_{z\longrightarrow t_1\pm 1}(A\varphi)(z) = (A^+\varphi)(t_1 \pm 1) = \pm\varphi(t)/2 + (A\varphi)(t_1 \pm 1),$$

где $t_1 = \{t + i, \mathrm{Im}\ t < 0; \quad t - i, \mathrm{Im}\ t > 0\},\ t \in L$. Они позволяют перейти от уравнении (13) к уравнению Фредгольма второго рода

$$(T\varphi)(t) \equiv (A^+\varphi)(t_1 + 1) - (A^+\varphi)(t_1 - 1) = \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\tau)K(t,\tau)d\tau =$$

$$= g^+(t_1 + 1) - g^+(t_1 - 1),$$

где $K(t,\tau) = E(t_1 + 1, \tau) - E(t_1 - 1, \tau)$, $E(z,\tau) = E_1(z,\tau) + E_1(iz,\tau)$,

$$E_1(z,\tau) = \frac{1}{\tau - z - i + 1} + \frac{1}{\tau - z + i + 1} + \frac{1}{\tau - z - i - 1} + \frac{1}{\tau - z + i - 1}.$$

Этот уравнение безусловно разрешимо при любой правой части и имеет единственное решение $\varphi(t) = T^{-1}[g^+(t_1 + 1) - g^+(t_1 - 1)]$(теорема 4.1).

Обратно, переходя от уравнения Фредгольма к задаче (12) и используя теорию краевых задач со сдвигом Карлемана, свойства двоякопериодических функций и применяя принцип непрерывности, получим два следующих результата

Теорема 4.2. *Линейное функциональное уравнение*

$$(V\phi)(z) \equiv (V_1\phi)(z) + (V_1\phi)(iz)$$

в классе функций B разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие разрешимости (10), где $\varphi(t) = T^{-1}[g^+(t_1 + 1) - g^+(t_1 - 1)]$.При его выполнении оно имеет единственное решение – интеграл типа Коши (13).

Теорема 4.3. *Линейное функциональное уравнение*

$$(V\phi)(z) \equiv (V_1\phi)(z) - (V_1\phi)(iz)$$

в классе функций B безусловно разрешимо.

В **§5** рассматриваются различные случаи уравнения (12), когда $L \equiv L_1 = l_1 \bigcup l_2$, где $l_1 = [-1 + i, -1 - i]$ и $l_2 = [1 - i,\ 1 + i]$. Решения ищутся в виде интеграла типа Коши (13) с четной плотностью, удовлетворяющей условию $\varphi(\tau) = -\varphi[\alpha(\tau)]$, где сдвиг Карлемана $\alpha(\tau) = \{\tau+2,\ \tau \in l_1, \quad \tau-2,\ \tau \in l_2\}$ переводит L_1 в себя с изменением ориентации.

Вначале рассматривается случай, когда

$$(V_1\phi)(z) \equiv \phi(z-2) + \phi(z+2) + \phi(z-2i) + \phi(z+2i). \tag{14}$$

Имеем $(A^+\varphi)(t) = -\varphi[\alpha(t)]/2 + (A\varphi)(t),\ t \in L_1$. Поэтому из (12) следует,что

$$(T\varphi)(t) = (A^+\varphi)(t) - (A^+\varphi)[\alpha(t)] = \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \varphi(\tau)K(t,\tau)d\tau = g^+(t) - g^+[\alpha(t)],$$

где $K(t,\tau) = E(t,\tau) - E[\alpha(t),\alpha(\tau)]$, $E(z,\tau) = E_1(z,\tau) + E_1(iz,\tau)$ и

$$E_1(z,\tau) = \frac{1}{\tau-z+2} + \frac{1}{\tau-z-2} + \frac{1}{\tau-z+2i} + \frac{1}{\tau-z-2i}.$$

Полученное уравнение – это уравнение Фредгольма второго рода. Оно безусловно разрешимо при любой правой части и имеет такое единственное решение $\varphi(t) = T^{-1}[g^+(t) - g^+[\alpha(t)]]$, что $\varphi(\tau) = -\varphi[\alpha(\tau)]$ (теорема 5.1).

Осуществляя обратной переход от уравнения Фредгольма к исходной задаче (12), получим

Теорема 5.2. *Линейное функциональное уравнение (12) со знаком "плюс"в классе функций B разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие разрешимости (10), где функция $\varphi = T^{-1}[g^+(t) - g^+[\alpha(t)]]$. При его выполнении уравнение имеет единственное решение – интеграл типа Коши*

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau,\ z \notin L_1.$$

Линейное функциональное уравнение (12) со знаком "минус"в классе функций B безусловно разрешимо (замечание 5.1).

Пусть теперь

$$(V_1\phi)(z) \equiv \phi(z) + \phi(z-2i) + \phi(z+2i). \tag{15}$$

Отметим, что в данном случае аналог теоремы 5.2 и замечания 5.1 остаются справедливыми.

В **§6** рассмотрены приложения функциональных уравнений, исследованных в §4. Используя преобразование Бореля, перейдем от уравнения (12) со знаком "плюс" для четных нижних функций $\phi(z)$ к некоторой проблеме моментов Стильтьеса для ассоциированных с ними по Борелю нечетных ц.ф.э.т. $\Phi(z)$ класса A, при $z \in D_\epsilon : |z| < \epsilon$, где ϵ "достаточно мало". Затем, дифференцируя в точке $z = 0$ обе части полученого равенства, имеем

Теорема 6.1. *Проблема моментов*

$$8\int_0^\infty \Phi(x)e^{-x}x^{4n}\cos xdx = g^{(4n)}(0) = a_{4n}, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

где $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{4n}}{(4n)!} z^{4n}$, *причем радиус сходимости ряда* $\rho > \sqrt{2}$, *разрешима и имеет единственное решение в классе ц. ф. э. т.* $\Phi(z)$, *нижняя функция которых принадлежит классу* B *и удовлетворяет условию разрешимости (10).*

Замечание 6.1. Если мы перейдем в уравнении (12) со знаком "минус" от четных нижних функций $\phi(z)$ к ассоциированным с ними по Борелю нечетным ц.ф.э.т. $\Phi(z)$, то в отличие от предыдущего случая, проблема моментов

$$\int_0^\infty \Phi(x)e^{-x}x^{4n+2}\cos xdx = g^{(4n+2)}(0) = a_{4n+2}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

в классе целых функций $\Phi(z)$, нижняя функция которых принадлежит классу B, безусловно разрешима и имеет единственное решение. В этом случае ряд

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{4n+2}}{(4n+2)!} z^{4n+2}, \quad \text{с радиусом сходимости} \quad \rho > \sqrt{2}.$$

Для конструирования биортогональных систем введём функции

$$E^{(4k+2)}(\tau) = \frac{\partial^{4k+2}E(z,\tau)}{(\partial z)^{4k+2}}|_{z=0}, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

$$\text{и} \quad \{\varphi_{4m+2}(\tau)\} : \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi_{4m+2}(\tau)E(z,\tau)d\tau = \frac{z^{4m+2}}{(4m+2)!}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi_{4m+2}(\tau)E^{(4k+2)}(\tau)d\tau = \delta_{m,k}.$$

Система ц.ф.э.т. $\{\Phi_{4m+2}\}$, ассоциированных по Борелю с интегралами типа Коши

$$\phi_{4m+2}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_{4m+2}(\tau)}{\tau - z}d\tau, \quad z \notin L,$$

обладает следующим свойством биортогональности

$$\int_0^\infty \Phi_{4m+2}(x)e^{-x}x^{4k+2}\cos xdx = \delta_{m,k}.$$

Предложение. *Неоднородная проблема моментов Стильтьеса*

$$\int_0^\infty \Phi_{4m+2}(x)e^{-x}x^{4k+2}\cos xdx = a_{4m+2}, \quad m = 0, 1, 2, ...,$$

в классе ц.ф.э.т. $\Phi(z)$, имеющих нижние функции из класса B, равносильна уравнению $(V\phi)(z) \equiv (V_1\phi)(z) - (V_1\phi)(iz) = g(z),\ z \in D_\epsilon$. Здесь функция $g(z)$ голоморфна в R и $g^+(t) \in H_\nu(\partial R)$.

Теорема 6.2. *Коэффициенты Маклорена b_{2n+1} четной ц.ф.э.т.*

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{4k+2}}{(4k+2)!} z^{4k+2}; \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[4k+2]{|b_{4k+2}|} < 1,$$

могут быть представлены в виде:

$$b_{4k+2} = (4k+2)! \int_0^{\infty} \Phi(x)\Phi_{4m+2}(x) e^{-x} \cos x\ dx, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

т.е. найдены с учетом биортогональности.

В **§7** рассматриваются различные приложения функциональных уравнений, рассмотренных в §5: биортогональные разложения, связанные с проблемой моментов Стильтьеса, некоторая интерполяционная задача. Для функционального уравнения с оператором (14) введем нечетную функцию

$$\widetilde{\varphi}(\tau) = \varphi(\tau+1) = -\varphi(\tau-1),\ \tau \in L.$$

Пусть $\widetilde{E}(z,\tau) = E(z,\tau+1) + E(z,\tau-1),\ z \in R$. Здесь функция $\widetilde{\varphi}(\tau)$ нечетная. Тогда функциональное уравнение (12) со знаком "минус" можно записать в виде

$$(V\widetilde{\phi})(z) \equiv (V_1\widetilde{\phi})(z) - (V_1\widetilde{\phi})(iz) = g(z), \quad z \in R. \tag{16}$$

Здесь соответствующее ядро интегрального уравнения $(A\varphi)(z)$ имеет вид

$$\widetilde{E}(z,\tau) = \widetilde{E_1}(z,\tau) - \widetilde{E_1}(iz,\tau), \tag{17}$$

$$\text{где} \quad \widetilde{E_1}(z,\tau) = \frac{1}{\tau - z + 1} + \frac{1}{\tau - z - 1} + \frac{1}{\tau - z + 3} + \frac{1}{\tau - z - 3} +$$
$$+ \frac{1}{\tau - z + 1 + 2i} + \frac{1}{\tau - z + 1 - 2i} + \frac{1}{\tau - z - 1 + 2i} + \frac{1}{\tau - z - 1 - 2i}.$$

Аналоги теоремы 5.1 и замечания 5.1 остаются справедливыми. Из безусловной разрешимости уравнения (12) со знаком "минус" немедленно вытекает, что уравнения (16) безусловно разрешимо и имеет единственное решение

$$\widetilde{\phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\widetilde{\varphi}(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

При этом имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \widetilde{\varphi}_{4m+2}(\tau) \widetilde{E}^{4k+2}(\tau) d\tau = \delta_{m,k}, \tag{18}$$

$$\text{где} \quad \widetilde{\varphi}_{4m+2}(\tau) = \varphi_{4m+2}(\tau+1) \quad \text{и} \quad \widetilde{E}^{(4k+2)}(\tau) = \frac{\partial^{4k+2}\widetilde{E}(z,\tau)}{(\partial z)^{4k+2}}|_{z=0},\ k = 0, 1, 2, ...$$

Условие биортогональности (18), в силу равенства (17) и с учетом нечетности $\widetilde{\varphi}$, можно переписать в равносильном виде

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \widetilde{\varphi}_{4m+2}(\tau)\widetilde{E}_1^{4k+2}(\tau)d\tau = \delta_{m,k}.$$

Пусть $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{4n+2}}{(4n+2)!} z^{4n+2}$, причем радиус сходимости ряда $\rho > \sqrt{2}$. Используя преобразования Бореля, перейдем в уравнении (16) от четных нижних функции $\widetilde{\phi}(z)$ к нечетным верхним $\widetilde{\Phi}(z)$ при $z \in D_\epsilon$. Тогда получим проблему моментов

$$4\int_0^\infty \widetilde{\Phi}(x)e^{-x}x^{4n+2}(1+e^{-2x}+2\cos 2x)dx = g^{(4n+2)}(0) = a_{4n+2}, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

которая безусловно разрешима.

Пусть теперь

$$g_m(z) = \frac{1}{4}\frac{z^{4m+2}}{(4m+2)!}, \quad m = 0, 1, 2, ...$$

Для системы ц.ф.э.т. $\{\widetilde{\Phi}_m\}$, ассоциированных с $\{\widetilde{\phi}_m\}$ по Борелю имеем

$$\int_0^\infty \widetilde{\Phi}_m(x)e^{-x}x^k(1+2\cos 2x+e^{-2x})dx = \delta_{m,k}.$$

Пусть $\widetilde{R}$ – круговая луночка, ограниченная дугами $\Gamma_{1,2}$ двух окружностей $|z \pm 1| = \sqrt{2}$ (знаки согласованы), причем $0 \in \widetilde{R}$. Функции $\widetilde{\varphi}_{4m+2}$ голоморфны в замыкании $\widetilde{R}$. Возьмем нечетную функцию $F(z) \in A(\widetilde{R})$, и предположим, что $F^+(z) \in C^2(\Gamma)$. Доказана

Теорема 7.1. *Пусть $F(i) = 0$. Тогда*

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{4m+2}\widetilde{\varphi}_{4m+2}(z), \ z \in \widetilde{R}, \ \textit{где}$$

$$\beta_{4m+2} = \frac{1}{\pi i}\int_L F(t)\widetilde{E}_1^{(4m+2)}(t)dt,$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно всюду в замыкании $\overline{\widetilde{R}}$.

Для функционального уравнения с оператором (15), используя преобразования Бореля, доказана

Теорема 7.3. *Интерполяционная задача*

$$2\phi^{(4n+2)}(0) + 4\int_0^{i\infty} \Phi(x)e^{2ix}x^{4n+2}dx = g^{(4n+2)}(0) = a_{4n+2}, \quad n = 0, 1, ...,$$

в области D_ϵ безусловно разрешима и равносильна уравнению (12) со знаком "минус", где функция

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{4m+2}}{(4m+2)!} z^{4m+2}.$$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю проф. Ф. Н. Гарифьянову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Литература

[1] Гарифьянов Ф.Н. *Проблема обращения особого интеграла и разностные уравнения для функций, аналитических вне квадрата*// Изв. вузов. Матем. – 1993. – №7. – С. 7-16.

[2] Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* – М.: Наука, 1982.

[3] Бибербах Л. *Аналитическое продолжение.* – М.: Наука, 1967.

[4] Зверович Э.И. *Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях*// Успехи мат. наук. - 1971. - Т.26. - №1. - С. 113-179.

[5] Гарифьянов Ф.Н. *Функциональные уравнения, связанные с автоморфными формами.* - Казань: Изд-во КГЭУ, 2005. - 124 с.

[6] Агаев Г.Н. *К теории сингулярного уравнения в пространствах Банаха*// Тр. ин-та физ. и мат. АН АзССР. Сер. мат. - 1959. - Т.8. - С. 23-27.

[7] Голубев В.В. *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.* - М. - Л.: ГИТТЛ, 1950.

[8] Гарифьянов Ф.Н. *Биортогональные ряды, порожденные группой диэдра*// Изв. вузов. Матем. - 2001. - №4. - С. 11-15.

[9]Коробейник Ю.Ф. *Представляющие системы*// Успехи матем. наук. - 1981. - Т.36. - №1. - С. 73-126.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Гарифьянов Ф. Н. *Проблема обращения особого интеграла на круговом секторе*/ Ф. Н. Гарифьянов, Б. Туре // Изв. вузов. Матем. – 2005. – № 10. – С.14-16.

2. Гарифьянов Ф. Н. *Проблема обращения особого интеграла на границе кругового сектора*/ Ф. Н. Гарифьянов, Б. Туре // Тр. Матем. центра имени Н. И. Лобачевского. – Казань: Казанск. матем. об-во, – 2005. – Т.30. – С.43.

3. Туре Б. *О двух уравнениях для функций, голоморфных в плоскости с разрезами*/ Б. Туре // Казан. ун-т. - Казань, 2005. – 11с. - Деп. в ВИНИТИ 11.07.05. – № 985-В2005.

4. Туре Б. *Многоэлементные уравнения для функций, голоморфных в плоскости с разрезом*/ Б. Туре // Ред. ж. "Изв. вузов. Матем."– Казань, 2006. – 7с. – Деп. в ВИНИТИ 05.04.06. – № 375-В2006.

5. Туре Б. *Об одном уравнении для функций, голоморфных в плоскости с разрезом*/ Б. Туре //Тр. Матем. центра имени Н. И. Лобачевского. – Казань: Казанск. матем. об-во, – 2005. – Т.30. – С.156.