На правах рукописи

ДМИТРИЕВА ТАТЬЯНА ВЛАДИМИРОВНА

ГЕОМЕТРИЯ ЭКВИАФФИННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

01.01.04 — геометрия и топология

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

К а з а н ь — 2 0 0 6

Работа выполнена на кафедре геометрии и методики преподавания математики ГОУ ВПО "Владимирский государственный педагогический университет"

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Степанов Сергей Евгеньевич

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Столяров Алексей Васильевич
доктор физико-математических наук, профессор
Шапуков Борис Никитович

Ведущая организация:
ГОУ ВПО "Московский государственный педагогический университет"

Защита состоится " 21 " декабря 2006 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д. 212.081.10 при Казанском государственном университете (420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 18, корпус 2, ауд. конференц. зал в Научной библиотеке)

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета (г. Казань, ул. Кремлёвская, 18)

Автореферат разослан "___" _________2006 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук, доцент М. А. Малахальцев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность темы исследования. Аффинная дифференциальная геометрия является одним из важных разделов геометрии. Начиная с первых работ Бляшке первой четверти прошлого века, она постоянно привлекала к себе внимание геометров. Был издан ряд монографий, специально посвящённый аффинной дифференциальной геометрии. Начиная с 1986 года (конференция в Обервольфахе[1]) стали проводиться международные конференции по аффинной дифференциальной геометрии.

Следует констатировать, что если для отечественных геометров аффинная дифференциальная геометрия была традиционным объектом изучения, интерес к которой к концу прошлого века постепенно сошёл на нет, то у зарубежных геометров, наоборот, с конца прошлого века активность исследований в этой области резко возросла.

Толчком для возрождения их интереса послужила лекция[2], прочитанная одним из классиков геометрии Номидзу в Мюнстерском университете в 1982 году с названием "Что такое аффинная дифференциальная геометрия?".

В лекции Номидзу выдвинул новую структурную точку зрения, согласно которой под аффинной дифференциальной геометрией следует понимать геометрию n-мерного гладкого многообразия M с эквиаффинной структурой (ω, ∇), где ω — элемент объема на M, а ∇ — аффинная связность без кручения такая, что $\nabla\omega = 0$.

За лекцией последовал цикл статей Номидзу, который завершила его монография[3]. В пропаганде нового направления исследований приняли участие такие известные геометры, как Яу, Калаби, Саймон и др. К настоящему времени число работ "новой волны" по аффинной дифференциальной геометрии исчисляется уже десятками.

Нельзя сказать, что эти события не нашли отклика у нас в стране. В качестве подтверждения этого факта приведем обзор работ [4], в которых изучался аффинный аналог техники Бохнера для многообразий с

[1] *Affine differential geometrie.* No. 48. - Oberwolfach: Tagungsber. Math. Forschungsinst., 1986. - P.1-24.

[2] Nomizu K. *What is affine differential geometry?* /Nomizu K. //Different. Geom. Meeting Univ. M?nster. - Tagunsbericht, 1982. - P.42-43.

[3] Nomizu K. *Affine differential geometry* /Nomizu K., Sasaki T. - Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. - 263p.

[4] Степанов С.Е. *Теоремы исчезновения в аффинной, римановой и лоренцевой геометриях* /Степанов С.Е. //Фундаментальная и прикладная математика - Центр новых информационных технологий МГУ: Издательский дом "Открытые системы", 2005 - Т. 11 - № 1 - С.35-84.

эквиаффинными структурами и описывалась локальная геометрия тензорных полей на таких многообразиях.

В этих работах эквиаффинная структура рассматривалась в рамках теории G-структур, а именно, как $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$-структура, которая согласно общей теории является интегрируемой[5], допускающей сводимую к ней аффинную связность без кручения, т.е. эквиаффинную связность.

При построении дифференциальной геометрии многообразий наряду с объектами этой теории, которыми являются многообразия, снабженные той или иной структурой, равноправную роль играют отображения, сохраняющие эти структуры. Так, в римановой геометрии многообразий это изометрии, а в аффинной дифференциальной геометрии многообразий это будут изучаемые в данной диссертации *эквиаффинные отображения*. Точнее, такие диффеоморфизмы n-мерных многообразий с эквиаффинными $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$-структурами, которые индуцируют изоморфизмы данных структур этих многообразий.

Несмотря на то, что теория G-структур и их изоморфизмов (в частности, автоморфизмов) хорошо разработана, теория изоморфизмов $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$-структур бедна геометрически содержательными теоремами[5]. Присоединение к $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$-структуре эквиаффинной связности позволило в диссертационном исследовании построить геометрически содержательную теорию изоморфизмов этих структур (теорию эквиаффинных отображений) при том, что работ в данном направлении еще не было.

Цель работы. Целью настоящего диссертационного исследования является изучение геометрии эквиаффинных отображений. Достижение поставленной цели включает в себя решение следующих ключевых задач:

1) дать определение эквиаффинных отображений многообразий с эквиаффинными структурами и псевдоримановых многообразий; установить их основные свойства;

2) сформулировать и доказать ряд необходимых и достаточных условий эквиаффинности отображений многообразий с эквиаффинными стру-ктурами и псевдоримановых многообразий;

3) провести классификацию эквиаффинных (в частности, эквиобъемных) отображений псевдоримановых многообразий;

4) изучить как локальную, так и глобальную геометрии выделенных классов.

[5] Кобаяси Ш. *Группы преобразований в дифференциальной геометрии* /Кобаяси Ш. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 224с.

Методы исследования. Изучение геометрии диффеоморфизмов n-мер-ных многообразий с эквиаффинными $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$-структурами, а также геометрии выделенных классов эквиаффинных отображений псевдоримановых многообразий проведено классическими методами дифференциальной геометрии. Классификация эквиаффинных отображений псевдоримановых многообразий проведена с использованием теории представлений групп, изложенной в классической монографии Г. Вейля[6], а также с помощью некоторых модификаций этой теории[7].

Глобальный аспект геометрической теории эквиаффинных отображений будет изучен с помощью техники Бохнера — аналитического метода, основанного на применении интегральных формул Вейценбока[8].

Научная новизна. Все результаты диссертационного исследования являются новыми и получены автором самостоятельно. Среди них отметим следующие:

1. дано определение эквиаффинных отображений многообразий с эквиаффинными структурами и псевдоримановых многообразий; установлены их основные свойства;

2. сформулирован и доказан ряд необходимых и достаточных условий эквиаффинности отображений многообразий с эквиаффинными структурами и псевдоримановых многообразий;

3. проведена классификация эквиаффинных (в частности, эквиобъемных) отображений псевдоримановых многообразий на основе теории представлений ортогональных групп;

4. изучена как локальная, так и глобальная геометрии выделенных семи классов эквиаффинных отображений, найдены условия, препятствующие существованию этих отображений.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа носит теоретический характер; ее результаты могут найти применение в исследованиях в аффинной и римановой геометриях.

Апробация. Результаты диссертационного исследования докладывались на следующих конференциях:

- XII Международной конференции "Математика в высшем образовании", г. Чебоксары в 2006 г.;

[6] Вейль Г. *Классические группы, их инварианты и представления* /Вейль Г. - М.: ИЛ, 1947. - 408с.

[7] Бессе А. *Четырехмерная риманова геометрия: Семинар Артура Бессе 1978/1979* /Бессе А. - М.: Мир, 1985. - 334с.

[8] Wu H. *The Bochner technique in differential geometry* /Wu H. //Mathematical Reports. - London-Paris-New York: Hardwood Academic Publishers, 1988. - Vol. 3. - Part 2. - 132p.

- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Владимир, 2004 г.

- XVI Международная летняя школа-семинар по современным проблемам теоретической и математической физики, г. Казань, 2004 г.

- Международная конференция "Актуальные проблемы математики и механики", посвященная 200-летию Казанского университета и 70-летию НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева, КГУ, г. Казань, 2005 г.

- Четвертая молодежная научная школа-конференция, г. Казань, 2005 г.

- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Владимир, 2006 г.

Основные результаты диссертации обсуждались на научных семинарах кафедры геометрии КГУ (рук. проф. Б.Н. Шапуков) и кафедры геометрии ВГПУ (рук. проф. С.Е. Степанов).

Публикации. Основные научные результаты, включённые в диссертационную работу, опубликованы в 9 печатных работах автора (см. [1] - [9]).

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. Четыре опубликованные научные работы по теме исследования выполнены без соавторов.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения (исторический обзор, общая характеристика и содержание диссертации), трёх глав и списка литературы, включающего 81 наименование. Полный объём диссертации составляет 109 страниц машинописного текста.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

П е р в а я г л а в а состоит из четырех параграфов и посвящена дифференцируемым многообразиям и их отображениям. В этой главе приводится материал, носящий реферативный характер.

В § 1 содержатся сведения о геометрии дифференцируемого многообразия размерности $n(n \geq 2)$ и сообщаются основные факты тензорного исчисления, используемые в диссертационном исследовании.

В § 2 приводятся сведения о гладких отображениях дифференцируемых многообразий со связностями и псевдоримановых многообразий, в частности, даны определения и указаны основные свойства проективного, субпроективного, конформного и гармонического отображений.

В § 3 рассмотрены основные сведения теории G-структур на дифференцируемых многообразиях и их изоморфизмов. В качестве приложения общей теории установлено, что необходимым и достаточным условием изоморфизма $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$-структур многообразий M и $\overline{M}$ служит равенство $f^*\bar{\omega} = C\omega$ для диффеоморфизма $f : M \to \overline{M}$ и n-форм ω и $\bar{\omega}$, порождаемых $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$-структурами этих многообразий.

В § 4 приведены необходимые в диссертационном исследовании факты из теории представлений групп.

Во в т о р о й г л а в е рассмотрена аффинная дифференциальная геометрия многообразия M с эквиаффинной структурой (ω, ∇), где ω — элемент объема на M, а ∇ — аффинная связность без кручения такая, что $\nabla\omega = 0$.

В § 2 сформулировано

Определение 2.1. *Диффеоморфизм $f : M \to \overline{M}$ n-мерных связных многообразий с эквиаффинными $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$-структурами (ω, ∇) и $(\bar{\omega}, \overline{\nabla})$ соответственно называется эквиаффинным отображением, если $f_* : TM \to T\overline{M}$ будет индуцировать изоморфизм $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$-структур этих многообразий.*

Доказана

Теорема 2.1. *Диффеоморфизм $f : M \to \overline{M}$ n-мерных связных многообразий с эквиаффинными $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$-структурами (ω, ∇) и $(\bar{\omega}, \overline{\nabla})$ соответственно будет эквиаффинным отображением тогда и только тогда, когда $traceT = 0$ для $T = \overline{\nabla} - \nabla$ — тензора деформации связности ∇ в связность $\overline{\nabla}$.*

Характеристику эквиаффинным отображениям дает

Следствие 1. *Диффеоморфизм $f : M \to \overline{M}$ многообразий с эквиаффинными $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$-структурами будет эквиаффинным отображением тогда и только тогда, когда $divX = div(f_*X)$ для любого $X \in TM$.*

Также доказано утверждение, которое указывает на особую роль эквиаффинных отображений.

Следствие 2. *Произвольный диффеоморфизм $f : M \to \overline{M}$ многообразий с эквиаффинными $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$-структурами (ω, ∇) и $(\bar{\omega}, \overline{\nabla})$ соответственно представим в виде композиции $f = f'' \circ f'$ эквиаффинного $f' : M \to M'$ и проективного $f'' : M' \to \overline{M}$ отображений для диффеоморфного M многообразия M' с эквиаффинной $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$-структурой (ω, ∇').*

В § 3 на основании критерия эквиаффинности отображения $f: M \to \overline{M}$ многообразий с эквиаффинными структурами дано следующее

Определение 3.1. *Диффеоморфизм $f: M \to \overline{M}$ псевдоримановых многообразий (M, g) и $(\overline{M}, \bar{g})$ называется эквиаффинным отображением, если для любого $X \in TM$ выполняется равенство $divX = div(f_*X)$.*

В качестве примеров эквиаффинного отображения псевдоримановых многообразий доказаны следующие утверждения:

Теорема 3.2. *Эквиобъемное отображение псевдоримановых многообразий является эквиаффинным.*

Теорема 3.3. *Композиция $f = \bar{f} \circ \tilde{f}$ конформного $\tilde{f}: M \to \widetilde{M}$ и проективного $\bar{f}: \widetilde{M} \to \overline{M}$ диффеоморфизмов является эквиаффинным отображением $f: M \to \overline{M}$ псевдориманова многообразия (M, g) на псевдориманово многообразие $(\overline{M}, \bar{g})$, если метрика многообразия $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ определяется равенством $\tilde{g} = e^{2\sigma} g$ для $\sigma = \frac{1}{2n} \ln \sqrt{\left|\frac{det\bar{g}}{detg}\right|} + const.$*

В третьей главе проведена классификация эквиаффинных (в частности, эквиобъемных) отображений псевдоримановых многообразий на основе теории представлений ортогональных групп, а также изучена как локальная, так и глобальная геометрии выделенных семи классов и найдены условия препятствующие существованию этих отображений.

В § 1 на основе теории представлений ортогональных групп доказывается классификационная теорема для эквиаффинных отображений псевдоримановых многообразий.

Как было установлено в § 3 главы II, для того, чтобы диффеоморфизм $f: M \to \overline{M}$ псевдориманова многообразия (M, g) на псевдориманово многообразие $(\overline{M}, \bar{g})$ был эквиаффинным необходимым и достаточным является условие $g^{ij}T_{ijk} = 0$ для тензора деформации связности Леви-Чивита $\overline{\nabla}$ многообразия $(\overline{M}, \bar{g})$ в связность Леви-Чивита ∇ многообразия (M, g). Следствием этого будет разложение T в поточечно ортогональную сумму трех тензорных полей, соответствующих неприводимым компонентам действия ортогональной группы $\mathrm{O}(n, k, \mathbf{R})$. Справедлива

Теорема 1.1. *Инвариантным образом выделяются семь классов эквиаффинных отображений $f: M \to \overline{M}$ псевдоримановых многообразий (M, g) и $(\overline{M}, \bar{g})$, для каждого из которых поле $T = \overline{\nabla} - \nabla$, рассматриваемое как сечение расслоения $T^*M \otimes S^2M = \Im_1(TM) \oplus \Im_2(TM) \oplus \Im_3(TM)$, является сечением соответствующего поточечно инвариант-*

ного подрасслоения $\Im_1(TM)$, $\Im_2(TM)$ и $\Im_3(TM)$, одной из их прямых сумм или же подрасслоения $\Im_1(TM)\cap\Im_2(TM)\cap\Im_3(TM)$.

В § 2 сформулированы условия, характеризующие эквиаффинные отображения классов $\Im_1\oplus\Im_2$; $\Im_2\oplus\Im_3$; $\Im_1\oplus\Im_3$ и описана геометрия каждого.

Так в пункте 1 этого параграфа для эквиаффинного отображения $f: M\to\overline{M}$ класса $\Im_1\oplus\Im_2$ доказана следующая

Теорема 2.1. *Эквиаффинные отображения $f: M\to\overline{M}$ класса $\Im_1\oplus\Im_2$ псевдоримановых многообразий исчерпываются эквиаффинными гармоническими отображениями*[9].

В пункте 2 § 2 главы III для эквиаффинного отображения $f: M\to\overline{M}$ класса $\Im_2\oplus\Im_3$ доказана, характеризующая его

Теорема 2.2. *Эквиаффинное отображение $f: M\to\overline{M}$ псевдоримановых многообразий (M,g) и $(\overline{M},\bar g)$ будет отображением класса $\Im_2\oplus\Im_3$ тогда и только тогда, когда g будет для многообразия $\overline{M}$ конформно киллинговым тензорным полем в связности Леви-Чивита $\overline{\nabla}$.*

Для произвольной точки $\bar x\in\overline{M}$ обозначим через $D_\lambda(\bar x)\in T_{\bar x}\overline{M}$ собственное подпространство соответствующего $g_{\bar x}$ линейного оператора $G_{\bar x}$ с собственным значением $\lambda(\bar x)$. Если рассмотреть открытое всюду плотное подмножество $\overline{U}_g$ в $\overline{M}$, состоящее из точек, в которых число различных собственных значений оператора G постоянно, то собственные значения оператора G определяют попарно различные гладкие собственные функции и каждая такая функция λ задает гладкое распределение $D_\lambda: \bar x\in\overline{U}_g\to D_{\lambda(\bar x)}(\bar x)\subset T_{\bar x}\overline{U}_g$. В этом случае справедлива

Теорема 2.3. *Пусть $f: M\to\overline{M}$ — эквиаффинное отображение класса $\Im_2\oplus\Im_3$ псевдориманова многообразия (M,g) на псевдориманово многообразие $(\overline{M},\bar g)$ и λ — собственная функция тензора g на множестве $\overline{U}_g\subset\overline{M}$. Тогда собственное распределение D_λ будет омбилическим, а в случае его неизотропности $2g\left(trace_g\left(\overline{\nabla}-\nabla\right),X\right)+(n+2)\,X\left(\ln|\lambda|\right)=0$ для всех полей $X\in C^\infty D_\lambda$.*

В случае если тензор g имеет на $(\overline{M},\bar g)$ только две собственные функции λ и μ постоянных кратностей m и $n-m$, используя интегральную формулу для компактного ориентированного риманова многообразия[10], доказано

[9] Stepanov S.E. *Geometry of infinitesimal harmonic transformations* /Stepanov S.E., Shandra I.G. //Annals of Global Analysis and Geometry. - 2003. - Vol. 24. - Issue 3. - P.291-299.

[10] Stepanov S.E. *An integral formula for a Riemannian almost - product manifold* /Stepanov S.E. //Tensor. - 1994. - Vol. 55. - № 3. - P.209-214.

Следствие. *Пусть $f : M \to \overline{M}$ — эквиаффинное отображение класса $\Im_2 \oplus \Im_3$ псевдориманова многообразия (M, g) на компактное ориентированное риманово многообразие $(\overline{M}, \bar{g})$.*

1) *Если на $\overline{M}$ всюду секционная кривизна $\overline{K} \leq 0$ и тензор g имеет только две различные собственные функции постоянных кратностей, то $\overline{M}$ локально изометрично прямому произведению $\overline{M}_\lambda \times \overline{M}_\mu$;*

2) *Если $\overline{M}$ — многообразие неположительной секционной кривизны, обладающее, по меньшей мере, одной точкой, в которой секционная кривизна по всем двумерным направлениям строго отрицательна, то тензор g на $\overline{M}$ не может иметь только две различные собственные функции постоянных кратностей.*

В пункте 3 § 2 главы III для эквиаффинного отображения $f : M \to \overline{M}$ класса $\Im_1 \oplus \Im_3$ справедлива, характеризующая его

Теорема 2.4. *Эквиаффинное отображение $f : M \to \overline{M}$ псевдоримановых многообразий (M, g) и $(\overline{M}, \bar{g})$ будет отображением класса $\Im_1 \oplus \Im_3$ тогда и только тогда, когда g будет для многообразия $\overline{M}$ конформно кодацциевым тензорным полем в связности Леви-Чивита $\overline{\nabla}$.*

Если же $\omega = grad\ \bar{\sigma}$ для некоторой функции $\bar{\sigma} \in C^1\overline{M}$, то справедливо

Следствие. *Пусть $f : M \to \overline{M}$ — эквиаффинное отображение класса $\Im_1 \oplus \Im_3$ псевдориманова многообразия (M, g) на псевдориманово многообразие $(\overline{M}, \bar{g})$. Если $trace_g \left(\overline{\nabla} - \nabla\right) = grad\ \bar{\sigma}$ для некоторой функции $\bar{\sigma} \in C^1\overline{M}$, то $\tilde{g} = e^{\frac{2}{n-2}\bar{\sigma}} g$ будет тензором Кодацци для многообразия $(\overline{M}, \bar{g})$.*

Для собственной функции λ, которая задает гладкое распределение $D_\lambda : \bar{x} \in \overline{U}_g \to D_{\lambda(\bar{x})}(\bar{x}) \subset T_{\bar{x}}\overline{U}_g$ доказана теорема 2.5, аналогичная теореме 2.3 и сформулировано соответствующее следствие.

В § 3 главы III сформулированы условия, характеризующие эквиаффинные отображения классов $\Im_1$; $\Im_2$; $\Im_3$ и описана геометрия каждого из этих классов.

Так в пункте 1 этого параграфа для эквиаффинного отображения $f : M \to \overline{M}$ класса $\Im_1$ справедлива

Теорема 3.1. Для того чтобы отображение $f : M \to \overline{M}$ псевдориманова многообразия (M, g) на псевдориманово многообразие $(\overline{M}, \bar{g})$ было эквиаффинным отображением класса $\Im_1$ необходимо и достаточно, чтобы f было гармоническим отображением и g — тензором Кодацци в связности Леви-Чивита $\overline{\nabla}$.

Опираясь на известные факты о геометрии римановых многообразий, несущих тензорные поля Кодацци[11] доказана

Теорема 3.2. *Пусть $f : M \to \overline{M}$ — эквиаффинное отображение класса $\Im_1$ риманова многообразия (M, g) на риманово многообразие $(\overline{M}, \bar{g})$ постоянной кривизны K, тогда тензор g имеет вид $g = \overline{\nabla}(dF) + \overline{K}F\bar{g}$, где функция F находится как решение уравнения Пуассона для $\triangle F + \overline{K}(trace_g \bar{g}) F = n$ лапласисана Ходжа-де Рама $\triangle$ многообразия (M, g).*

Здесь же отмечено, что на компактном римановом многообразии (M, g) в силу леммы Хопфа[12] выполняется равенство $F = const$, которое означает, что $g = Cg$ для $C > 0$, а потому отображение f — гомотетия[13], при этом F и $\overline{K}$ должны быть одного знака, поскольку $C = \overline{K}F$.

В пункте 2 § 3 главы III для сопряженных связностей[14] доказаны следующие утверждения:

Предложение 3.1. *Диффеоморфизм $f : M \to \overline{M}$ псевдоримановых многообразий со связностями Леви-Чивита ∇ и $\overline{\nabla}$ соответственно будет эквиаффинным класса $\Im_1$ отображением тогда и только тогда, когда на многообразии $(\overline{M}, \bar{g})$ существует линейная связность $\widetilde{\overline{\nabla}}$ без кручения такая, что связность Леви-Чивита ∇ является средней связностью сопряженной чебышевской пары $\left(\overline{\nabla}, g, \widetilde{\overline{\nabla}}\right)$.*

Предложение 3.2. *Если $f : M \to \overline{M}$ эквиаффинное класса $\Im_1$ отображение псевдоримановых многообразий, то*

$$J = \frac{1}{n(n-1)}\left(Scal - trace_g \overline{Ric}\right).$$

Здесь J — инвариант Пика[15], в случае римановых многообразий $J \geq 0$, а потому $trace_g \overline{Ric} \leq Scal$. Это позволяет доказать

Следствие. *Пусть $f : M \to \overline{M}$ — диффеоморфное отображение римановых многообразий. Если*

1) $trace_g \overline{Ric} \geq Scal$ и $f \in \Im_1$, то либо (M, g) — локально приводимое многообразие, либо f - гомотетия;

2) $trace_g \overline{Ric} > Scal$, то $f \notin \Im_1$.

---

[11] Бессе А. *Многообразия Эйнштейна: В 2-х т. Т. 2* /Бессе А. - М.: Мир, 1990. - С. 590-598.

[12] Кобаяси Ш. *Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. Т. 2.* /Кобаяси Ш., Номидзу К. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. - С. 38.

[13] Кобаяси Ш. *Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. Т. 2.* /Кобаяси Ш., Номидзу К. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. - С. 264.

[14] Норден А.П. *Пространства аффинной связности* /Норден А.П. - М.: Наука, 1976. - 432с.

[15] Широков П.А. *Аффинная дифференциальная геометрия* /Широков П.А., Широков А.П. - М.: Физматгиз, 1959. - С. 164.

В пункте 3 § 3 главы III для эквиаффинного отображения $f : M \to \overline{M}$ класса $\Im_2$ справедлива, характеризующая его

Теорема 3.3. *Для того чтобы отображение $f : M \to \overline{M}$ псевдориманова многообразия (M, g) на псевдориманово многообразие $(\overline{M}, \bar{g})$ было эквиаффинным отображением класса $\Im_2$ необходимо и достаточно, чтобы данное отображение было гармоническим, а g — тензором Киллинга в связности Леви-Чивита $\overline{\nabla}$.*

Используя факты из геометрии многообразий, допускающих тензоры Киллинга[16−17] доказаны следующие два утверждения

Следствие. *Если псевдориманово многообразие (M, g) допускает эквиаффинное отображение $f : M \to \overline{M}$ класса $\Im_2$ на некоторое псевдориманово многообразие $(\overline{M}, \bar{g})$ постоянной кривизны, то его метрический тензор g в общей по отображению f системе координат $x^1, \ldots, x^n$ имеет компоненты*

$$g_{ij} = e^{\frac{4}{n+1}\sqrt{|\det \bar{g}|}} \left(A_{ijkl} x^k x^l + A_{ijk} x^k + A_{ij} \right)$$

для симметричных по первым двум индексам постоянных A_{ijkl}, A_{ijk}, A_{ij} таких, что

$$A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl} = 0; \qquad A_{ijk} + A_{jki} + A_{kij} = 0.$$

Теорема 3.4. *Эквиаффинное отображение $f : M \to \overline{M}$ класса $\Im_2$ псевдориманова многообразия (M, g) на компактное ориентированное риманово многообразие $(\overline{M}, \bar{g})$ неположительной секционной кривизны, которое имеет, по меньшей мере, одну точку, в которой секционная кривизна по всем двумерным направлениям строго отрицательная, является гомотетией.*

Используя теорию сопряженных связностей[18], нами была доказана

Теорема 3.5. *Пусть диффеоморфизм $f : M \to \overline{M}$ римановых многообразий со связностями Леви-Чивита ∇ и $\overline{\nabla}$ соответственно будет эквиаффинным класса $\Im_2$ отображением, тогда на многообразии $(\overline{M}, \bar{g})$ существует линейная связность $\widetilde{\nabla}$ с кручением S такая, что*

1) *связность $\overline{\nabla}$ является средней связностью взаимной пары связностей $\widetilde{\nabla}$ и $\widetilde{\nabla} + S$;*

2) *$\overline{\nabla}$ и $\widetilde{\nabla}$ образуют сопряженную относительно поляритета g пару $\left(\overline{\nabla}, g, \widetilde{\nabla}\right)$;*

[16] Степанов С.Е. *Аффинная дифференциальная геометрия тензоров Киллинга* /Степанов С.Е., Смольникова М.В. //Известия вузов. Математика. - 2004. - №11. - С.82-86.

[17] Степанов С.Е. *О применении одной теоремы П.А. Широкова в технике Бохнера* /Степанов С.Е. //Известия вузов. Математика. - 1996. - № 9. - С.53-59

[18] Норден А.П. *Пространства аффинной связности* /Норден А.П. - М.: Наука, 1976. - 432с

3) *пара сопряженных связностей* $\left(\overline{\nabla}, g, \widetilde{\nabla}\right)$ *является чебышевской.*

В случае римановых многообразий получено равенство $trace_g\overline{Ric} = Scal + 1/2\left\|T\right\|^2$, на основе которого доказано утверждение, аналогичное следствию предложения 3.2.

В пункте 4 § 3 главы III для эквиаффинного отображения $f : M \to \overline{M}$ класса $\Im_3$ справедлива, характеризующая его

Теорема 3.6. *Эквиаффинное класса* $\Im_3$ *отображение* $f : M \to \overline{M}$ *псевдориманова многообразия* (M, g) *на некоторое псевдориманово многообразие* $(\overline{M}, \bar{g})$ *является субгеодезическим отображением*[19]*, переводящим изотропные геодезические многообразия* (M, g) *в геодезические многообразия* $(\overline{M}, \bar{g})$.

Здесь же указаны канонические виды метрических форм $ds^2 = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$ и $d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}dx^i \otimes dx^j$ римановых многообразий (M, g) и $(\overline{M}, \bar{g})$ при условии, что среди корней уравнения $\det\left(\bar{g}_{ij} - r^2 g_{ij}\right) = 0$ имеются различные.

В пункте 5 § 3 главы III показано, что эквиаффинное отображение $f : M \to \overline{M}$ класса $\Im_1 \cap \Im_2 \cap \Im_3$ характеризуется условием $T = 0$ и, следовательно, носит название *аффинного.* Наличие подобного эквиаффинного отображения приводит к двум взаимоисключающим случаям:

1) риманово многообразие (M, g) является приводимым, т.е. локально изометричным произведению римановых многообразий $M_{\bar{\lambda}_1} \times \ldots \times M_{\bar{\lambda}_m}$ для $2 \leq m \leq n$, если тензорное поле $\bar{g}$ имеет на различные собственные функции $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m$ постоянных кратностей;

2) $\bar{g} = Cg$ для $C > 0$ и, следовательно, f — гомотетия.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. дано определение эквиаффинных отображений многообразий с эквиаффинными структурами и псевдоримановых многообразий; установлены их основные свойства;

2. сформулирован и доказан ряд необходимых и достаточных условий эквиаффинности отображений многообразий с эквиаффинными структурами и псевдоримановых многообразий;

[19] Nicolescu Liviu. *Les espaces de Riemann en representation subgeodesique* /Nicolescu Liviu. //Tensor, N.S. - 1978. - Vol. 32. - №. 2. - P.182-187.

3. проведена классификация эквиаффинных и, в частности, эквиобъемных отображений псевдоримановых многообразий на основе теории представлений ортогональных групп;

4. изучена как локальная, так и глобальная геометрии выделенных семи классов эквиаффинных отображений, найдены условия, препятствующие существованию этих отображений.

РАБОТЫ АВТОРА, ОПУБЛИКОВАННЫЕ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Дмитриева Т.В. (Зудина Т.В.) Эквиаффинные диффеоморфизмы псевдоримановых многообразий /Зудина Т.В. //Математика в высшем образовании: Тезисы докладов 12-й международной конференции. - Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2004. - С.142. (0,06 п.л.)

2. Дмитриева Т.В. (Зудина Т.В.) Эквиобъемные отображения псевдоримановых многообразий /Зудина Т.В., Степанов С.Е. //Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. - Владимир, 2004. - С.98-100. (0,06 п.л., вклад соискателя составляет 90% работы)

3. Дмитриева Т.В. (Зудина Т.В.) Диффеоморфизмы многообразий с SL(m, R)-структурами /Зудина Т.В., Степанов С.Е. //Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Актуальные проблемы математики и механики. Материалы международной научной конференции (Казань, 26 сентября - 1 октября 2004 года). - Казань: Казанское математическое общество, 2004. - Т. 25. - С.127. (0,06 п.л., вклад соискателя составляет 85% работы)

4. Дмитриева Т.В. (Зудина Т.В.) Эквиаффинные отображения псевдоримановых многообразий /Зудина Т.В., Степанов С.Е. //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. - Калининград: Изд-во КГУ, 2004. - Вып. 35. - С.48-55. (0,44 п.л., вклад соискателя составляет 95% работы)

5. Дмитриева Т.В. (Зудина Т.В.) Пример эквиаффинного отображения /Зудина Т.В. //Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Лобачевские чтения - 2005. Материалы Четвертой молодежной научной школы-конференции (Казань, 16 - 18 декабря 2005 года). - Казань: Казанское математическое общество, 2005. - Т. 31. - С.74-76. (0,13 п.л.)

6. Дмитриева Т.В. (Зудина Т.В.) Об одном классе эквиаффинных отображений /Зудина Т.В., Степанов С.Е. //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. - Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2004. - Вып. 36. - С.43-49. (0,44 п.л., вклад соискателя составляет 85% работы)

7. Дмитриева Т.В. (Зудина Т.В.) О классе эквиаффинных отображений /Зудина Т.В. //Математика в образовании: Сб. статей. Выпуск 2 /Под ред. Емельяновой И.С. - Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2006 - С.241-243. (0,25 п.л.)

8. Дмитриева Т.В. (Зудина Т.В.) Дифференциальные уравнения некоторых классов эквиобъемных отображений /Зудина Т.В. //Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. - Владимир: Владимирский государственный университет, 2006. - С.106-108. (0,13 п.л.)

9. Дмитриева Т.В. (Зудина Т.В.) О классификации эквиобъемных отображений псевдоримановых многообразий /Зудина Т.В., Степанов С.Е. //Известия вузов. Математика. - 2006. - № 8 - С.19-28. (1,19 п.л., вклад соискателя составляет 80% работы)

Подписано к печати ________. Формат $60 \times 84/_{16}$.
Бумага писчая. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ ______.

Московский автомобильно-дорожный институт
(Государственный технический университет)
Волжский филиал
428028, Чебоксары, пр-т Тракторостроителей, д. 101, корп. 30.