На правах рукописи

Романов Александр Сергеевич

ФУНКЦИИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2008

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, доцент
Васильчик Михаил Юлианович

доктор физико-математических наук, профессор
Миклюков Владимир Михайлович

доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент РАН
Степанов Владимир Дмитриевич

Ведущая организация:

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Защита состоится 5 декабря 2008 г. в 15^{00} на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан 21 октября 2008 г

Ученый секретарь
диссертационного совета Гутман А. Е.

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации. Идеи, позволившие С. Л. Соболеву еще в тридцатых годах прошлого века прийти к определению функциональных пространств $W_p^l(G)$ и доказательству первых теорем вложения, оказались весьма плодотворными, а введенные им классы функций нашли широкое применение в различных разделах современной математики. В настоящее время невозможно представить без использования соболевских пространств современную теорию функций, геометрию, теорию уравнений в частных производных, вариационное исчисление ... При этом довольно быстро выяснилось, что шкала соболевских пространств не является самодостаточной даже при исследовании казалось бы внутренних вопросов теории, к примеру, при изучении следов соболевских функций. Это потребовало распространения теории на случай нецелых порядков дифференцирования. В результате были введены различные классы функций, гладкость которых понималась в некотором обобщенном смысле. В первую очередь следует отметить пространства Бесова, позволившие получить адекватное описание следов соболевских функций, и пространства потенциалов Бесселя, совпадающие при целых показателях гладкости с пространствами Соболева.

Изучение функциональных классов, в той или иной мере являющихся обобщением классических пространств Соболева, уже в течение многих лет является актуальной задачей, имеющей многочисленные приложения в разных областях математики. В настоящее время теория функциональных классов соболевского типа активно развивается в различных направлениях.

К уже традиционным направлениям, как правило, имеющим практические приложения, можно отнести введение и изучение в областях евклидова пространства новых классов вещественнозначных функций, гладкость которых понимается в некотором обобщенном смысле. Так в работе О. В. Бесова [5] введены и изучаются функции соболевского типа с "переменной гладкостью", а в книге Д. Эдмундса и В. Д. Эванса [22] рассматриваются "абстрактные пространства Соболева" $W^k(X(\Omega), Y(\Omega))$, функции которых принадлежат банахову пространству $X(\Omega)$ и имеют обобщенные производные, принадлежащие банахову пространству $Y(\Omega)$.

Наряду с традиционными направлениями можно отметить активно развивающиеся в последние десятилетия анализ на группах Карно и метрическую теорию функций соболевского типа.

В настоящее время на группах Карно активно изучаются различные вопросы, в которых важную роль играет принадлежность функций или отображений соответствующим классам Соболева. На группах Карно, в отличие от евклидова случая, во многих вопросах определяющую роль играет не полный дифференциал отображения, а дифференциал, вычисляемый лишь вдоль "горизонтальных" векторных полей. Групповая специфика не позволяет автоматического перенесения евклидовых результатов и требует новых подходов и методов доказательств, которые порой оказываются близки к используемым при изучении свойств функций на метрических пространствах. Подробное обсуждение вопросов теории отображений с ограниченным искажением и различных свойств соболевских функций на группах Карно можно найти в работе С.К.Водопьянова [37], содержащей обширную библиографию.

В последнее время появилось много работ, в которых изучаются различные обобщения функциональных классов соболевского типа, связанные с метрическими пространствами.

В работах Ю.Г. Решетняка [16,17,18] были введены и изучены классы функций соболевского типа со значениями в метрическом пространстве. Оригинальный подход к определению таких функциональных пространств позволил получить аналоги многих классических результатов, известных для пространств Соболева.

Нас же в первую очередь будет интересовать ситуация, когда метрическое пространство является областью определения функции.

В общем случае на метрических пространствах нет линейной структуры и как следствие нет адекватного понятия дифференциала функции. Поэтому определение функций соболевского типа на метрических пространствах естественным образом отличается от традиционного определения пространств Соболева, используемого в евклидовом случае. При всем внешнем различии формулировок, а порой и различии получаемых в итоге классов функций, в основе разных подходов к определению функциональных классов соболевского типа на метрических пространствах лежит единый принцип – для функций пространства $W_p^1(B)$ на шаре $B \subset R^n$ выделяется какое-либо характеристическое свойство, допускающее переформулировку в терминах произвольной метрики и подходящей борелевской меры, а затем это свойство используется в качестве аксиомы принадлежности функции соответствующему классу соболевского типа на метрическом пространстве. В результате получаемые классы функций, совпадая на шарах $B \subset R^n$ с классическими пространствами Соболева, в общем случае на метрических пространствах могут оказаться существенно различными.

Наиболее общий – аксиоматический подход к определению соболевских классов функций предложен в работе В. М. Гольдштейна и М. Троянова [24], формализовавших минимальный набор требований, позволяющий определить на метрическом пространстве функциональные классы, совпадающие в евклидовом случае с пространствами Соболева. В эту схему вписываются большинство из известных классов соболевского типа на метрических пространствах. К сожалению, минимальный набор условий позволяет получить лишь ограниченный набор содержательных утверждений о свойствах функций.

При изучении конкретных классов соболевского типа удается получить больший объем информации о свойствах функций и доказать аналоги различных классических результатов, связанных с пространствами Соболева.

На связном метрическом пространстве (X, d) стандартным образом определяются класс спрямляемых кривых и понятие интеграла по кривой.

Ю. Хейноненом и П. Коскелой для функции $u : X \to R$ было введено понятие "верхнего градиента" [32,33] – неотрицательной функции g такой, что

$$|u(x) - u(y)| \leq \int\limits_{\gamma} g\, dl$$

для всякой кривой γ, соединяющей точки x и y. Очевидно, что определение "верхнего градиента" является обобщением стандартной оценки, в которой в евклидовом случае вместо функции g стоит $|\nabla u|$. При этом класс функций соболевского типа $W_p^1(X, d, \mu)$ определяется как совокупность функций, у которых "верхний градиент" суммируем в степени p по мере μ [25,31,32,33]. В случае, когда метрика и мера достаточно хорошо согласованы между собой, свойства таких пространств во многом аналогичны свойствам классических пространств Соболева.

На метрическом пространстве (X, d) с борелевской мерой μ естественным образом записывается аналог p–неравенства Пуанкаре

$$\fint\limits_{B(x,\rho)} |u - u_{B(x,\rho)}|\, d\mu \leq \rho \left(\fint\limits_{B(x,\rho)} g^p\, d\mu \right)^{1/p}, \qquad (*)$$

где g – некоторая неотрицательная функция. Учитывая имеющуюся в евклидовом случае взаимосвязь между принадлежностью функции u

пространству Соболева $W_p^1(B)$ и выполнением для нее соответствующего неравенства Пуанкаре, вводятся пространства $P_p^1(X,d,\mu)$, функции которых удовлетворяют неравенству Пуанкаре $(*)$.

Свойства функций, удовлетворяющих на метрическом пространстве неравенствам Пуанкаре, довольно подробно изучатся в работе П. Хайлаша и П. Коскелы [30], а также рассматриваются в работах [25,27,28,33].

Одним из естественных вопросов является нахождение условий, обеспечивающих совпадение пространств соболевского типа $W_p^1(X,d,\mu)$ и $P_p^1(X,d,\mu)$, поскольку в этом случае удается получить довольно много содержательных результатов.

На метрическом пространстве (X,d) с борелевской мерой μ П.Хайлашем [26] были введены функциональные классы соболевского типа $M_p^1(X,d,\mu)$. В основе определения данного функционального пространства лежит выполнение для функции $u \in M_p^1(X,d,\mu)$ глобальной оценки "липшицевого типа"

$$|u(x) - u(y)| \leq d(x,y)(g(x) + g(y))$$

с некоторой допустимой функцией $g \in L_p(X,\mu)$.

В евклидовом случае оценки такого вида были получены и использованы при изучении различных свойств функций из пространств Соболева в работах Б. Боярского и П. Хайлаша [20,21].

В областях $G \subset R^n$ с достаточно регулярной границей (к примеру, липшицевой) при $p > 1$ пространство $M_p^1(G, |*|, m_n)$, определяемое по стандартной евклидовой метрике и мере Лебега, совпадает с классическим пространством Соболева $W_p^1(G)$, а в качестве допустимой может быть выбрана функция пропорциональная максимальной функции модуля градиента функции u [7,26].

В работе [26] показано, что получаемое функциональное пространство является банаховым, при этом липшицевы функции образуют в нем всюду плотное подмножество. Различные свойства пространств $M_p^1(X,d,\mu)$ и их взаимосвязь с другими классами функций изучаются в работах [25,26,27,28,29,30].

Вполне актуальным и целесообразным представляется введение и систематическое изучение на метрических пространствах новых классов функций с обобщенной "гладкостью", которые наследуют многие характеристические свойства классических пространств Соболева. При этом, получаемые результаты могут быть использованы и при изучении различных свойств соболевских функций в евклидовом случае.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми:

1. Для функций класса $M_p^1(X,d,\mu)$ определено понятие следа на множествах "меньшей размерности" и получены условия компактности оператора следа в пространствах Лебега и пространствах, определяемых гельдеровыми метриками.

2. На метрическом пространстве с борелевской мерой введены новые классы соболевского типа $W_{\alpha,p}(X,d,\mu)$, для которых установлены основные структурные свойства и получены аналоги классических соболевских теорем вложения.

3. В качестве приложения результатов для функций соболевского типа на метрических пространствах получены условия компактности вложения следов функций, принадлежащих классическим пространствам Соболева $W_p^1(G_\lambda)$, в пространства Лебега на границе евклидова "нулевого" пика G_λ с гельдеровой особенностью в вершине.

4. Получены достаточные условия s–абсолютной непрерывности функций, удовлетворяющих неравенству Пуанкаре на s–регулярном метрическом пространстве.

5. Установлены некоторые свойства нелинейной емкости, связанной с пространствами Соболева в областях евклидова пространства.

Теоретическая значимость. Результаты диссертации имеют теоретический характер и могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории обобщенных классов соболевского типа, при доказательстве различных теорем вложения, при изучении следов соболевских функций на множествах различной природы.

Методы исследования. Доказательства теорем вложения основаны на различных оценках для соответствующих уточненных максимальных функций. Приложения общих результатов основаны на доказываемой в работе взаимосвязи между классическими пространствами Соболева и обобщенными классами соболевского типа в евклидовых областях с гельдеровыми особенностями. Используются различные методы функционального анализа и теории функций.

Апробация работы. Вошедшие в диссертацию результаты докладывались на: Международной конференции по анализу и геометрии, Новосибирск, 1999; Международной конференции "Геометрия и приложения", Новосибирск, 2000; Международной школе-конференции по геометрии и анализу, Новосибирск, 2002; Международной конференции по анализу и геометрии, Новосибирск, 2004; Международной конференции "Геометрический анализ", Волгоград, 2004; Международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", Новосибирск, 2007; Российской конференции "Математика в современном мире", Новосибирск, 2007. Они обсуждались на общеинститутском семинаре ИМ СО РАН, на семинаре отдела анализа и геометрии (руководитель академик Ю. Г. Решетняк) и на семинаре по геометрической теории функций (руководитель д. ф.-м. н. С. К. Водопьянов).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора [39-49].

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на параграфы, и списка литературы.

В ссылках работы автора отмечены звездочкой.

Содержание диссертации

Введение содержит обзор основных результатов диссертации.

В первой главе рассматриваются введенные П. Хайлашем пространства $M_p^1(X,d,\mu)$.

В параграфе 1.1. обсуждаются определение и общие свойства функциональных классов $M_p^1(X,d,\mu)$, формулируются используемые далее результаты работ П. Хайлаша, П. Коскелы, Ю. Киннунена [26,29,30].

Если не предполагать никакой взаимосвязи между метрикой и мерой, то о свойствах функций классов M_p^1 удается получить лишь некоторые утверждения довольно общего характера. В случае, когда мера μ удовлетворяет условию s–регулярности ($\mu(B(x,\rho)) \geq C\,\rho^s$), П. Хайлашем [26] для пространств $M_p^1(X,d,\mu)$ был получен аналог классической соболевской теоремы вложения в пространства Лебега $L_q(X,\mu)$.

Для пространств $M_p^1(X,d,\mu)$ вполне содержательная теория, включающая в себя различные варианты теорем вложения, получается в случае, когда мера μ удовлетворяет простому геометрическому "условию удвоения"

$$\mu(B(x,2\rho)) \leq C_d\,\mu(B(x,\rho)),$$

т.е. мера шара удвоенного радиуса допускает оценку сверху через меру исходного шара. Всякая мера, удовлетворяющая условию удвоения, является s–регулярной с показателем $s = \log_2 C_d$, который в теоремах вложения для пространств $M_p^1(X,d,\mu)$ играет роль "размерности" метрического пространства (X,d).

В этом случае удается получить конструктивное описание пространств $M_p^1(X,d,\mu)$ через соответствующие максимальные функции [29].

Поскольку строение пространств $M_p^1(X,d,\mu)$ определяется метрикой d и мерой μ, то и соответствующие теоремы вложения по аналогии с терминологией книги С. М. Никольского [14] естественным образом можно разбить на два типа: теоремы вложения разных метрик и теоремы вложения разных мер.

Под теоремами вложения разных метрик обычно понимают вложения в пространства функций, имеющих гладкость меньшую чем гладкость исходного пространства. При $0 < \gamma < 1$ в определении пространств соболевского типа расстояние $d(x,y)$ можно заменить на $d_\gamma(x,y) = (d(x,y))^\gamma$ и получить соответствующие гельдеровы классы $M_p^\gamma(X,d,\mu)$. Однако $d_\gamma(x,y)$ в свою очередь является метрикой, поэтому возникающие гельдеровы классы $M_p^\gamma(X,d,\mu)$ относительно исходной метрики d часто оказывается более удобным рассматривать как пространства соболевского типа с "единичной гладкостью" $M_p^1(X,d_\gamma,\mu)$ относительно новой метрики d_γ. Достоинство такого подхода заключается в том, что для пространств $M_p^1(X,d_\gamma,\mu)$ не требуется новых доказательств теорем вложения, т.к. достаточно пересчитать показатель регулярности меры μ относительно новой гельдеровой метрики и воспользоваться уже имеющимся результатом. При этом термин "теоремы вложения разных метрик" можно понимать в буквальном смысле.

В параграфе 1.2. изучается взаимосвязь пространств соболевского типа M_p^1, определяемых разными метриками, а в параграфе 1.4. получены условия компактности соответствующего оператора вложения [42*,47*].

Теорема 1.4.2. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \gamma < 1$. Оператор вложения

$$I : M_p^1(X,d,\mu) \to M_r^1(X,d_\gamma,\mu)$$

является компактным при

1. $1 \le r < \dfrac{ps}{s-(1-\gamma)p}$, когда $(1-\gamma)p < s$;
2. $1 \le r < \infty$, когда $(1-\gamma)p = s$;
3. $1 \le r \le \infty$, когда $(1-\gamma)p > s$.

Теоремы вложения разных мер (разных измерений) обычно связывают задачей описания следов функций из соболевских классов на подмножествах, имеющих размерность меньшую чем исходное пространство.

Пусть мера μ удовлетворяет условию удвоения и является s – регулярной, $s > 1$, а подмножество $E \subset X$ и удовлетворяющая условию удвоения s'–регулярная мера ν таковы, что для произвольного шара $B(x,\rho)$ с центром $x \in E$ верна оценка

$$\nu(B(x,\rho)) \leq C\rho^{-\alpha}\mu(B(x,\rho)),$$

где $\alpha = s - s' > 0$.

Согласно определению, функция u, принадлежащая пространству $M_p^1(X,d,\mu)$, вообще говоря, может быть определена лишь μ–почти всюду в X и ее значения могут быть не заданы на множестве $A \subset E$, для которого $\nu(A) > 0$. Однако при $p > \alpha$ из доказываемой в работе леммы 1.3.1. следует, что ν–почти все точки множества E являются точками Лебега функции $u \in M_p^1(X,d,\mu)$. Это позволяет доопределить функцию u почти всюду на множестве E (в смысле меры ν) и получить корректно определенный оператор следа.

Как и в евклидовом случае для пространств Соболева, получить полное описание следов оставаясь в рамках шкалы пространств M_p^1 не удается, однако возникающие на множестве E гельдеровы пространства в некотором смысле близки к пространству следов.

В теореме 1.3.3. рассматривается вопрос о непрерывности оператора следа

$$Tr : M_p^1(X,d,\mu) \to M_r^1(E,d_\gamma,\nu),$$

а в параграфе 1.5. устанавливаются условия его компактности [47*].

Теорема 1.5.1. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \min\{s,p\}$ и $0 < \gamma < 1 - \alpha/p$. Тогда оператор следа

$$Tr : M_p^1(X,d,\mu) \to M_r^1(E,d_\gamma,\nu)$$

является компактным при

1. $1 \leq r < \dfrac{p(s-\alpha)}{s-(1-\gamma)p}$, когда $(1-\gamma)p < s$;
2. $1 \leq r < \infty$, когда $(1-\gamma)p = s$;
3. $1 \leq r \leq \infty$, когда $(1-\gamma)p > s$.

Из теоремы 1.5.1. и теоремы вложения 1.1.1. следует результат о компактности оператора следа в пространствах Лебега [47*].

Теорема 1.5.2. Пусть $1 < p < \infty$ и $0 < \alpha < \min\{s, p\}$. Тогда оператор следа
$$Tr : M_p^1(X, d, \mu) \to L_q(E, \nu)$$
является компактным при

1. $1 \le q < \dfrac{p(s-\alpha)}{s-p}$, когда $p < s$;
2. $1 \le q < \infty$, когда $p = s$;
3. $1 \le q \le \infty$, когда $p > s$.

Во второй главе изучаются введенные в работах [44*,45*] функциональные пространства $W_{\alpha,p}(X, d, \mu)$. Приращение функций, принадлежащих таким классам, контролируется мерой шара, содержащего точки x и y, и допустимой неотрицательной функцией, суммируемой в степени p, т.е.
$$|u(x) - u(y)| \le (M(x, y))^{1/\alpha}(g(x) + g(y)),$$
где $M(x, y)$ – мера соответствующего шара, содержащего точки x и y, а функция $g \in L_p(X, \mu)$.

При изучении пространств $M_p^1(X, d, \mu)$ можно было заметить, что в доказательствах теорем вложения, основную роль играет оценка приращения функции не через расстояние между точками x и y, а получаемая в процессе доказательства подходящая оценка через меру соответствующего шара, содержащего точки x и y. С другой стороны, оценки приращения функции через меру подходящего шара появляются и при изучении свойств функций других функциональных классов соболевского типа, к примеру, в работе [7] при изучении свойств монотонных функций из пространств Соболева на группах Карно. Поэтому представляется вполне естественным введение и изучение таких классов функций, формально не вписывающихся в аксиоматику работы В. М. Гольдштейна и М. Троянова [24]. В случае неоднородных мер, пространства $W_{\alpha,p}(X, d, \mu)$ можно воспринимать как классы функций с переменной гладкостью, зависящей от строения меры в окрестности данной точки. Такая точка зрения вполне согласуется с подходом О. В. Бесова к определению классов функций с переменной гладкостью в евклидовом случае [5].

В случае, когда существует двусторонняя степенная оценка меры шара через его радиус ($C_1 r^s \le \mu(B(x, r) \le C_2 r^s$), пространства $W_{s,p}(X, d, \mu)$ и $M_p^1(X, d, \mu)$ совпадают, а на произвольном шаре $B \subset R^n$ пространство $W_{n,p}(B, | * |, m_n)$ совпадает с классическим пространством Соболева $W_p^1(B)$. В общем случае пространства $W_{\alpha,p}(X, d, \mu)$ и $M_p^1(X, d, \mu)$

оказываются существенно различными, при этом в наиболее интересном (с точки зрения выполнения теорем вложения) случае s–регулярных мер

$$M_p^1(X,d,\mu) \subset W_{s,p}(X,d,\mu).$$

Норма в пространстве $W_{\alpha,p}(X,d,\mu)$ определяется равенствами

$$||u \mid L_{\alpha,p}|| = \inf ||g \mid L_p||, \quad ||u \mid W_{\alpha,p}|| = ||u \mid L_p|| + ||u \mid L_{\alpha,p}||,$$

где нижняя грань берется по множеству допустимых функций. Относительно такой нормы пространство $W_{\alpha,p}(X,d,\mu)$ является банаховым.

Для пространств $W_{\alpha,p}(X,d,\mu)$ выполняется аналог соболевской теоремы вложения в пространства Лебега.

Теорема 2.2.1. Пусть $\alpha > 1$ и функция $u \in W_{\alpha,p}(X,d,\mu)$.

1. Если $p < \alpha$, то $u \in L_q(\mu)$, где $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha}$, и

$$||u \mid L_q(X,\mu)|| \leq C||u \mid W_{\alpha,p}||.$$

2. Если $p = \alpha$, то существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что

$$\int\limits_X \exp\left(C_1 \frac{|u - u_X|}{||u \mid L_{\alpha,p}||}\right) d\mu \leq C_2.$$

3. Если $p > \alpha$, то

$$||u - u_X \mid L_\infty|| \leq C||u \mid L_{\alpha,p}||.$$

Отметим, что в отличие от теоремы вложения для пространств типа M_p^1 в данном случае не требуется дополнительных предположений о взаимосвязи метрики и меры, а роль "размерности" метрического пространства выполняет показатель α.

Приведенные в параграфе 2.2. примеры показывают, что при внешней схожести формулировок соответствующих теорем вложения для пространств M_p^1 и $W_{\alpha,p}$ внутреннее содержание получаемых результатов в общем случае оказывается весьма различным даже для функций одновременно, принадлежащих этим пространствам. В случае неоднородных мер оценка на показатель суммируемости q, получаемая в теореме 2.2.1. оказывается более точной.

В случае, когда мера μ удовлетворяет условию удвоения, для локально интегрируемой функции $u : X \to \overline{R}$ и $\alpha > 1$ вводятся максимальные функции специального вида

$$u^{\#}_{\alpha,\mu}(x) = \sup_{\rho>0} (\mu(B(x,\rho))^{-1/\alpha} \fint_{B(x,\rho)} |u - u_{B(x,\rho)}| \, d\mu$$

и доказывается (лемма 2.3.2.), что неравенство

$$|u(x) - u(y)| \le C(M(x,y))^{1/\alpha}(u^{\#}_{\alpha,\mu}(x) + u^{\#}_{\alpha,\mu}(y))$$

выполняется для всех точек Лебега функции u.

Описание рассматриваемых функциональных классов через соответствующие максимальные функции позволяет довольно просто получить результат характеризующий взаимосвязь пространств типа $W_{\alpha,p}$ с различными показателями "гладкости".

Теорема 2.4.1. Пусть $1 < p < \infty$, и $\alpha < l < \infty$. Тогда пространство $W_{\alpha,p}(X, d, \mu)$ непрерывно вложено в пространство $W_{l,q}(X, d, \mu)$, где

1. $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p} = \frac{1}{l} - \frac{1}{q}$ при $\frac{1}{p} > \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{l}$;
2. $1 \le q \le \infty$ при $\frac{1}{p} \le \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{l}$.

В шкале пространств $W_{\alpha,p}(X, d, \mu)$ удается получить и аналог теоремы вложения для пространства следов на множестве "меньшей размерности".

Теорема 2.5.2. Пусть $1 < p < \infty$, $\max(0, 1 - p/\alpha) < \gamma < 1$, $E \subset X$ и мера ν такова, что для произвольного шара с центром в точке $x \in E = \operatorname{supp} \nu$ выполняется оценка

$$C^{-1}(\mu(B(x,r)))^{\gamma} \le \nu(B(x,r)) \le C(\mu(B(x,r)))^{\gamma}.$$

Тогда пространство $L_{\alpha,p}(X, d, \mu)$ непрерывно вложено в пространство $L_{l,q}(E, d, \nu)$, где

1. $\gamma\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{l}\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha}$ при $\frac{1}{\alpha} - \frac{\gamma}{l} - \frac{1}{p} < 0$;
2. $1 \le q \le \infty$ при $\frac{1}{\alpha} - \frac{\gamma}{l} - \frac{1}{p} \ge 0$.

Отметим, что в евклидовом случае, получаемые в теореме 2.5.2. оценки для показателей "гельдеровости" и суммируемости согласуются (за исключением предельных значений) с соответствующими показателями для следов соболевских функций на гладкой гиперповехности.

Последовательное применение теоремы 2.5.2. и теоремы вложения 2.2.1. позволяет получить результат о вложении пространства следов в пространства Лебега.

Следствие 2.5.4 Пусть $1 < p < \infty$, $\min(0, 1 - p/\alpha) < \gamma \leq 1, E \subset X$ и мера ν такова, что для произвольного шара с центром в точке $x \in E = \operatorname{supp}\nu$ выполняется оценка

$$C^{-1}(\mu(B(x,r)))^\gamma \leq \nu(B(x,r)) \leq C(\mu(B(x,r)))^\gamma.$$

Тогда для функции $u \in L_{\alpha,p}(X,d,\mu)$ верны следующие утверждения.
1. Если $p < \alpha$, то $u \in L_q(\nu)$, где $\frac{\gamma}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha}$, и

$$||u - u_E \mid L_q(\nu)|| \leq C||u \mid L_{\alpha,p}||.$$

2. Если $p = \alpha$, то существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что

$$\int\limits_E \exp\left(C_1\frac{|u - u_{E,\nu}|}{||u \mid L_{\alpha,p}(X,d,\mu)||}\right) d\nu \leq C_2.$$

3. Если $p > \alpha$, то

$$||u - u_E \mid L_\infty|| \leq C||u \mid L_{\alpha,p}||.$$

В третьей главе рассматривается модельная ситуация, в которой результаты, полученные для классов функций соболевского типа на метрических пространствах, используются при изучении свойств функций, принадлежащих классическим пространствам Соболева в евклидовых областях с гельдеровой особенностью.

Нас будет интересовать вопрос о компактности вложения следов соболевских функций в лебеговские классы на границе "нулевого" пика.

Непрерывность и компактность оператора вложения

$$I : W_p^l(G) \to L_q(G)$$

для областей с гельдеровыми особенностями даже более общего вида достаточно подробно изучены в работах О. В. Бесова, Д. А. Лабутина, В. Г. Мазьи ... [2,3,4,9,10,12].

При этом вопрос о компактности оператора следа

$$Tr : W_p^1(G) \to L_q(\partial G)$$

для областей с нерегулярной границей исследован мало. Отметим работу М. Ю. Васильчика и В. М. Гольдштейна [6], согласно которой в "нулевом" пике $G_\varphi \subset R^n$ пространство следов соболевских функций класса $W_2^1(G_\varphi)$ компактно вложено в весовое пространство Лебега $L_{2,\varphi}(\partial G_\varphi)$ на границе пика.

Точку пространства R^n будем обозначать через (x, y), где $x \in R$, $y \in R^{n-1}$. Для $1 \le \lambda < \infty$ пик $G_\lambda \subset R^n$ определим условием:

$$G_\lambda = \{(x, y) \in R^n \mid 0 < x < 1,\ 0 < y_k < x^\lambda,\ k = 1, \dots, n-1\}.$$

Обозначим через m_n сужение $n-$ мерной меры Лебега на пик $\overline{G}_\lambda$, а через σ сужение $(n-1)-$ мерной меры Хаусдорфа на границу пика G_λ.

Введем показатель $\Lambda = 1 + (n-1)\lambda$. Поскольку для меры шаров с центром в вершине пика выполняется оценка $|B(0,r) \cap G_\lambda| \sim Cr^\Lambda$, то в различных оценках показатель Λ часто играет роль "размерности"пика G_λ.

Схема доказательства в данном случае основана на выяснении взаимосвязи пространств Соболева $W_p^1(G_\lambda)$ с пространствами $M_p^1(G_\lambda, d, \mu)$ и последующем применении уже имеющихся теорем вложения для пространств соболевского типа.

Основным результатом главы является

Теорема 3.4.8. Пусть $\frac{\Lambda}{\Lambda - \lambda + 1} < p < \infty$, тогда оператор следа

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \to L_q(\partial G_\lambda, \sigma)$$

является компактным при

1. $1 \le q < p\frac{\Lambda - \lambda}{\Lambda - p}$, когда $\frac{\Lambda}{\Lambda - \lambda + 1} < p < \Lambda$;
2. $1 \le q < \infty$, когда $p = \Lambda$;
3. $1 \le q \le \infty$, когда $p > \Lambda$.

Построенный в параграфе 3.2. пример показывает, что, не смотря на некоторую экзотичность используемого метода, полученная в первом пункте теоремы оценка на показатель суммируемости q является точной.

При $p > \frac{\Lambda}{n}$ удается показать, что

$$W_p^1(G_\lambda) = M_p^1(G_\lambda, |*|, m_n).$$

Поэтому интересующий нас результат является следствием теоремы 1.5.2. и цепочки вложений

$$W_p^1(G_\lambda) \Longrightarrow M_p^1(G_\lambda, |*|, m_n) \Longrightarrow L_q(\partial(G_\lambda), \sigma).$$

При достаточно больших показателях p доказательство совпадения в "нулевом" пике пространств Соболева и пространств M_p^1 основано на специальной конструкции оператора продолжения "с ухудшением класса"

$$Ext : W_p^1(G_\lambda) \to W_r^1(G_1),$$

где $1 < r < p$.

При $p \leq \frac{\Lambda}{n}$ таким приемом воспользоваться нельзя, т.к. оператор продолжения оказывается неограниченным, и доказать совпадение соответствующих функциональных классов не удается. Однако удается получить достаточное для наших целей вложение.

Введем в пике G_λ новую метрику d, полагая

$$d((x_1, y_1); (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1^\lambda - x_2^\lambda)^2 + |y_1 - y_2|^2},$$

и весовые меры μ и ν определяемые условиями:

$$d\mu = x^{p(\lambda-1)} dm_n, \quad d\nu = x^{p(\lambda-1)} d\sigma.$$

Тогда

$$W_p^1(G_\lambda) \subset M_p^1(G_\lambda, d, \mu).$$

Интересующий нас результат вновь является следствием цепочки вложений

$$W_p^1(G_\lambda) \Rightarrow M_p^1(G_\lambda, d, \mu) \Rightarrow M_r^1(\partial(G_\lambda), d_\gamma, \nu) \Rightarrow$$
$$L_s(\partial(G_\lambda), \nu) \Rightarrow L_q(\partial(G_\lambda), \sigma).$$

При этом на каждом шаге вложение либо уже известно, либо является простым следствием неравенства Гельдера.

В ходе доказательства кроме основного утверждения получаются и другие результаты о непрерывности и компактности оператора вложения и оператора следа в соответствующих функциональных пространствах. Как уже было отмечено, часть этих результатов, в первую очередь касающихся оператора вложения, иными способами были получены в работах О. В. Бесова, Д. А. Лабутина, В. Г. Мазьи, а часть результатов, в частности вложения в пространства M_q^1, являются новыми. Хотя соответствующие пространства M_q^1 относительно гельдеровых метрик отличаются от пространства следов, однако они близки к нему, и вложения в такие классы функций в некоторых случаях оказываются вполне информативными.

Условия компактности оператора вложения получены для случаев:

$$I : W_p^1(G_\lambda) \Longrightarrow M_r^1(G_\lambda, d_\gamma, \mu);$$

$$I : W_p^1(G_\lambda) \Longrightarrow M_q^1(G_\lambda, d_\gamma, m_n);$$

$$I : W_p^1(G_\lambda) \Longrightarrow M_q^1(G_\lambda, |*|^\gamma, m_n);$$

$$I : W_p^1(G_\lambda) \Longrightarrow C^{0,\gamma}(G_\lambda);$$

$$I : W_p^1(G_\lambda) \Longrightarrow L_r(G_\lambda, \mu).$$

Условия компактности оператора следа получены для случаев:

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \Longrightarrow M_r^1(\partial G_\lambda, d_\gamma, \nu);$$

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \Longrightarrow M_q^1(\partial G_\lambda, d_\gamma, \sigma);$$

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \Longrightarrow M_q^1(\partial G_\lambda, |*|^\gamma, \sigma);$$

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \Longrightarrow C^{0,\gamma}(\partial G_\lambda);$$

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \Longrightarrow L_r(\partial G_\lambda, \nu).$$

В четвертой главе исследуются вопросы, связанные с непрерывностью функций соболевского типа.

Согласно классической теореме вложения при $p > n$ соболевское пространство $W_p^1(R^n)$ вложено в пространство непрерывных функций, а пространство $W_n^1(R^n)$ уже содержит разрывные функции. Очевидно, что в рамках стандартной шкалы пространств Соболева нельзя получить ответ на вопрос о минимальных условиях, которые обеспечивают непрерывность функции, имеющей обобщенные производные.

В евклидовом случае близкий к оптимальному результат был получен в работе Ю. Кауханена, П. Коскелы, Я. Малы [34].

Пусть G – область в евклидовом пространстве R^n.

Функцию $f : G \to R$ называют n-абсолютно непрерывной, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого семейства непересекающихся шаров $B(x_k, r_k) \subset G$ из условия

$$\sum_k r_k^n < \delta$$

следует

$$\sum_k (\operatorname*{osc}_{B_k} f)^n < \varepsilon.$$

Согласно работе [34] всякая функция класса $W^1_{1,\,loc}(G)$, градиент которой принадлежит пространству Лоренца $L_{n,1}(G)$, эквивалентна некоторой n-абсолютно непрерывной функции. Это более тонкий результат по сравнению с классической соболевской теоремой вложения, поскольку для произвольной ограниченной области $G \subset R^n$ и любого $p > n$ выполняется вложение $L_p(G) \subset L_{n,1}(G) \subset L_n(G)$.

Отметим, что условие принадлежности градиента функции пространству Лоренца $L_{n,1}(G)$ ранее использовалось в работе И. Стейна [36] в связи с изучением вопроса о дифференцируемости функций с обобщенными производными.

В диссертационной работе рассматриваются классы функций, удовлетворяющих неравенству Пуанкаре на s-регулярных метрических пространствах. В довольно общей ситуации, включающей в себя евклидов случай, удается получить прямое доказательство s-абсолютной непрерывности функций, у которых "метрический аналог градиента" принадлежит соответствующему пространству Лоренца [48*]. При этом, в метрическом случае техника доказательств существенно отличается от методов, используемых в работе [34] для евклидова случая.

В параграфе 4.1. обсуждаются свойства функций из пространств Лоренца. В леммах 4.1.1. и 4.1.2. доказываются две оценки, связанные с нормировкой пространств Лоренца и используемые в последующих доказательствах. В параграфе 4.2. исследуется вопрос о непрерывности функций, удовлетворяющих неравенству Пуанкаре на s-регулярных метрических пространствах.

Полное метрическое пространство (X, d) называют s–регулярным ($s > 0$), если существуют такие постоянные $0 < L_1 < L_2 < \infty$ и такая борелевская мера μ, что для всякого шара $B(x, \rho) \subset X$ при $\rho \leq diam X$ выполняется оценка

$$L_1 \rho^s \leq \mu(B(x, \rho)) \leq L_2 \rho^s.$$

Будем говорить, что пара функций (f, g) удовлетворяет p–неравенству Пуанкаре на метрическом пространстве (X, d), если функция $f \in L_1(X)$, неотрицательная функция $g \in L_p(X)$ и для всякого шара $B = B(x, \rho) \subset X$ выполняется оценка

$$\fint_B |f - f_B| \, d\mu \leq L \cdot \rho \left(\fint_{\sigma B} g^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

где постоянные L и σ не зависят от выбора шара.

Основным результатом параграфа является следующее утверждение.

Теорема 4.2.2. Пусть $p \in [1, s)$, пара функций (f, g) удовлетворяет p–неравенству Пуанкаре на s–регулярном метрическом пространстве (X, d) с борелевской мерой μ, функция $f \in L_1(X, \mu)$, а неотрицательная функция g принадлежит пространству Лоренца $L_{s,1}(X)$. Тогда класс эквивалентности функции f содержит непрерывную функцию.

В параграфе 4.3. вводится понятие локально s–регулярного метрического пространства и в лемме 4.3.1. доказывается выполнение p–неравенства Пуанкаре специального вида для пары функций (f, h), где h – максимальная функция, построенная по функции g.

Доказательство абсолютной непрерывности основано на получаемой в лемме 4.3.2. оценке отклонения значения функции в произвольной точке шара от среднего значения по шару.

Лемма 4.3.2. Пусть $p \in [1, s)$, пара функций (f,g) удовлетворяет p–неравенству Пуанкаре на локально s–регулярном метрическом пространстве (X, d), функция $f \in L_1(X)$, а неотрицательная функция g

принадлежит пространству Лоренца $L_{s,1}(X)$. Тогда для всякого шара $B \subset X$ и произвольной точки $z \in B$, являющейся точкой Лебега функции f, выполняется неравенство

$$|f(z) - f_B| \leq C\,||h \cdot \chi_B||_{s,1},$$

где h – функция из леммы 4.3.1.

Эта оценка позволяет довольно просто получить основной результат главы.

Теорема 4.3.3. Пусть $p \in [1, s)$, пара функций (f, g) удовлетворяет p–неравенству Пуанкаре на локально s–регулярном метрическом пространстве (X, d), функция $f \in L_1(X)$, а неотрицательная функция g принадлежит пространству Лоренца $L_{s,1}(X)$. Тогда класс эквивалентности функции f содержит s-абсолютно непрерывную функцию.

По аналогии с введенными П. Хайлашем [26] функциональными пространствами соболевского типа пространство $M^1_{s,1}(X)$ определим как класс функций, у которых допустимые функции принадлежат пространству Лоренца $L_{s,1}(X)$.

Для функций из пространства $M^1_{s,1}(X)$ доказывается выполнение подходящего варианта неравенства Пуанкаре и как следствие теоремы 4.3.3. получается утверждение о том, что всякая функция $f \in M^1_{s,1}(X)$ эквивалентна некоторой s–абсолютно непрерывной функции.

Из теоремы 4.3.3. почти непосредственно следует соответствующий результат для евклидова случая, полученный ранее в работе [34] совершенно иным способом.

Результаты *пятой главы* объединяет между собой понятие нелинейной емкости, связанной с пространствами Соболева в областях евклидова пространства.

В параграфе 5.1. изучается одно свойство емкости, связанной с пространствами Соболева по произвольной мере. Несколько неожиданный эффект был обнаружен В. Д. Степановым и Д. В. Прохоровым [15] при изучении весовых неравенств на прямой - оказалось, что в одномерной ситуации значение емкости произвольного конденсатора полностью определяется абсолютно непрерывной составляющей меры, а вклад сингулярной части меры оказывается нулевым. В диссертации рассматривается взаимосвязь между сингулярными мерами и соответствующей емкостью в пространственном случае [43*].

Конечную регулярную борелевскую меру σ в D $(\sigma(D) > 0)$ будем называть p – тривиальной, если для любого конденсатора K и любой конечной абсолютно непрерывной меры ν

$$cap_p(K, \nu + \sigma) = cap_p(K, \nu).$$

Несложно показать, что всякая p – тривиальная мера является сингулярной. При этом линейная мера Хаусдорфа на отрезке $[\alpha, \beta] \subset R^n$ при $n \geq 2$ является сингулярной, но не является p – тривиальной.

Основным результатом параграфа является следующее утверждение.

Теорема 5.1.3. Пусть $E \subset D$ – множество нулевой линейной меры Хаусдорфа. Тогда всякая конечная регулярная борелевская мера, носитель которой содержится в множестве E, является p – тривиальной.

В основе доказательства, как и в работе [15], лежит перестройка допустимой функции, в результате которой функция становится локально постоянной на носителе сингулярной меры.

В параграфе 5.2. обсуждаются вопросы, связанные с существованием ограниченного оператора продолжения соболевских функций из области на все евклидово пространство.

Достаточные условия, характеризующие границу области и гарантирующие существование ограниченного оператора продолжения, как правило, являются универсальными и при их выполнении продолжение возможно сразу для всей шкалы пространств $W_p^1(G)$. При изучении необходимых условий обычно проявляется зависимость от показателя суммируемости p. К примеру, в емкостном условии $(\mathrm{cap}_p(K, R^n) \leq C\ \mathrm{cap}_p(K, G)$ для всякого конденсатора $K \subset G)$ зависимость от p вполне очевидна, т.к. при $p_1 < p_2$ довольно просто привести пример конденсатора, имеющего нулевую p_1–емкость и положительную p_2–емкость [13]. В работе В.Г. Мазьи [11] построена плоская ограниченная область ("акула" с обложки книги [12]), допускающая продолжение функций из пространств Соболева при $p \in [1, 2)$ и не допускающая продолжения при $p \geq 2$. В этом примере верхняя грань показателей суммируемости, для которых существует ограниченный оператор продолжения, одновременно является нижней гранью тех p, при которых пространство $W_p^1(R^2)$ вложено в пространство непрерывных функций. Нас интересовало, насколько существенно это совпадение? Иными словами, существует ли для некоторого числа $q \neq 2$ плоская ограниченная область, допускающая продолжение функций классов Соболева W_p^1 при $p < q$ и не допускающая продолжения при $p \geq q$.

Будем говорить, что область $G \subset R^2$ принадлежит классу Ext_p, если существует ограниченный оператор продолжения

$$Ext : W_p^1(G) \to W_p^1(R^2).$$

Основным результатом параграфа является следующее утверждение.

Теорема 5.2.1. Для произвольного числа $q \in (1,2)$ существует такая ограниченная плоская область G_q, что
a) $G_q \in Ext_p$ при $p \in [1,q)$;
b) $G_q \notin Ext_p$ при $p \geq q$.

Основная идея построения области G_q близка к используемой в примере В.Г. Мазьи, только в данном случае расположение "зубов акулы"и их размеры согласованы с некоторым канторовским множеством хаусдорфовой размерности α, где $\alpha \in (0,1)$. При этом значение q является границей тех показателей суммируемости p, при которых p–емкость канторовского множества равна нулю [13].

Плоскую ограниченную область G с отмеченными четырьмя граничными точками будем называть четырехсторонником и обозначать $G_\star$, а получаемые на границе замкнутые дуги будем называть его "сторонами".

В параграфе 5.3. устанавливается вполне естественная взаимосвязь между сопряженными емкостями двух конденсаторов, образованных парами противоположных "сторон" (F_0, F_1) и (E_0, E_1) четырехсторонника $G_\star$ [49*].

Теорема 5.3.3. При всех показателях $p \in (1, \infty)$ для произвольного четырехсторонника $G_\star \subset R^2$ выполняется равенство

$$[\mathrm{cap}_p(F_0, F_1)]^{1/p} \cdot [\mathrm{cap}_{p'}(E_0, E_1)]^{1/p'} = 1,$$

где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

В конформном случае на плоскости (p=2) это соотношение хорошо известно [1] и является следствием теоремы Римана о конформной эквивалентности односвязных областей и непосредственного вычисления емкости пары противоположных сторон прямоугольника. Для областей евклидова пространства R^n аналогичное соотношение между конформной емкостью $(p = n)$ и соответствующим модулем семейства разделяющих поверхностей тоже известно [8,38]. Однако найти какие-либо упоминания о подобных соотношениях для неконформной емкости автору обнаружить не удалось. Прогресс в вопросе о регулярности экстремалей p–функционала Дирихле [19,23,35], достигнутый со времени написания работы В. Цимера [38], позволяет использовать совершенно иную технику и структуру доказательств.

В диссертации доказательство основано на двух свойствах экстремальных функций:

1. экстремальная функция u является гладкой [19,23,35] и в обобщенном смысле удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u) = 0;$$

2. для почти всех $t \in (0,1)$

$$\int\limits_{u=t} |\nabla u|^{p-1}\, d\,l \equiv const,$$

лемма 5.3.4.

Используя эти свойства, довольно просто показывается, что векторное поле $\bar{A} = |\nabla u|^{p-2}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ является потенциальным, а функция v, являющаяся его потенциалом, пропорциональна экстремальной функции для сопряженной емкости двух других "сторон" четырехсторонника.

В результате возникает класс экстремальных отображений $\Phi(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, обладающих следующими свойствами:

1. отображение Φ является гомеоморфизмом области G и прямоугольника P со сторонами длины 1 и $\operatorname{cap}_p(F_0, F_1)$;

2. функция u является экстремальной для p–емкости пары "сторон" (F_0, F_1) и в обобщенном смысле удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u) = 0,$$

функция v пропорциональна экстремальной для p'–емкости пары "сторон" (E_0, E_1) и в обобщенном смысле удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p'-2} \cdot \nabla u) = 0;$$

3. градиенты функций u и v взаимно ортогональны;

4. функции u и v удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -|\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial y}, \end{cases}$$

которая при $p = 2$ превращается в систему Коши-Римана.

Рассмотрим совокупность всех четырехсторонников порождаемых областью G и класс всех соответствующих p–экстремальных гомеоморфизмов обозначим через $H_p(G)$.

Пусть $G_1, G_2 \subset R^2$ – ограниченные односвязные области с жордановыми границами. Будем говорить, что гомеоморфизм $L : G_1 \to G_2$ является p–экстремальным, если $L = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$, где $\Phi_1 \in H_p(G_1), \Phi_2 \in H_p(G_2)$. Класс соответствующих p–экстремальных гомеоморфизмов обозначим через $H_p(G_1, G_2)$.

Возможность отображения произвольного четырехсторонника на соответствующий прямоугольник показывает, что p–экстремальных гомеоморфизмов достаточно много. С одной стороны, свойства таких гомеоморфизмов должны существенным образом зависеть от показателя суммируемости p, с другой стороны, можно надеяться, что для них будут выполняться некоторые аналоги утверждений о конформных отображениях, известные из классического комплексного анализа . В частности, для p–экстремальных гомеоморфизмов удается довольно просто получить аналог теоремы Римана о конформной эквивалентности односвязных областей.

Теорема 5.4.1. Пусть $G_1, G_2 \subset R^2$ – две ограниченные односвязные области с жордановыми границами Γ_1 и Γ_2 соответственно. Фиксируем тройки попарно различных точек $a_1, a_2, a_3 \in \Gamma_1$ и $b_1, b_2, b_3 \in \Gamma_2$. Тогда существует такой гомеоморфизм $L : G_1 \to G_2$ класса $H_p(G_1, G_2)$, что $L(a_k) = b_k$.

При $p = 2$ отображение будет конформным, и мы получаем отличное от традиционного доказательство теоремы Римана.

Довольно просто доказывается и существование p–экстремальных гомеоморфизмов для двусвязных областей, имеющих одинаковый p –модуль семейства кривых, соединяющих граничные компаненты.

Можно надеяться, что изучение p–экстремальных отображений окажется содержательной задачей, представляющей практический интерес.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 96 - 01 - 01769, 02-01-01009, 05-01-00482-а, 08-01-00531-а), Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ 00 - 15 - 96165, НШ 311.2003.1, НШ 8526.2006.1, НШ-5682.2008.1) и Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН 2006, № 117.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир. 1969.

2. Бесов О. В. Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей // Докл. РАН. 2000. Т. 373, № 2. С. 151-154.

3. Бесов О. В. Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 3. С. 3-26.

4. Бесов О. В. О компактности вложений весовых пространств Соболева на области с нерегулярной границей // Труды МИАН. 2001. Т. 232. С. 72-93.

5. Бесов О. В. Вложения пространств дифференцируемых функций переменной гладкости // Труды МИАН. 1997. Т. 214. С. 25-58.

6. Васильчик М. Ю., Гольдштейн В. М. О разрешимости третьей краевой задачи для области с пиком // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 466-468.

7. Водопьянов С. К. Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269 - 1295.

8. Кривов В. В. Некоторые свойства модулей в пространстве // ДАН СССР. 1964. Т. 154, № 3, С. 510-513.

9. Лабутин Д. А. Интегральное представление функций и вложение пространства Соболева на областях с нулевыми углами // Мат. заметки. Т. 61, № 2. С. 201-219.

10. Лабутин Д. А. Неулучшаемость неравенства Соболева для класса нерегулярных областей // Труды МИАН. 2001. Т. 232. С. 218-222.

11. Мазья В. Г. О продолжении функций из пространств С. Л. Соболева // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1981. Т. 113. С. 231-236.

12. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Ленинград: ЛГУ, 1985.

13. Мазья В. Г., Хавин В. П. Нелинейная теория потенциала // Усп. мат. наук. 1972. Т. 27, Вып. 6. С. 67-138.

14. Никольский С. М. Приближения функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.

15. Прохоров Д. В., Степанов В. Д. О неравенствах с мерами типа теорем вложения Соболева на открытых множествах действительной оси // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 864-878.

16. Решетняк Ю. Г. Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657-675.

17. Решетняк Ю. Г. Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве, II // Сиб. мат. журн.. 2004. Т. 45, № 4. С. 855-870.
18. Решетняк Ю. Г. К теории соболевских классов функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн.. 2006. Т. 47, № 1. С. 146-168.
19. Уральцева Н. Н. Вырождающиеся квазилинейные эллиптические системы // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1968. Т. 7. С. 184-222.
20. Bojarski B. Remarks on some geometric properties of Sobolev mappings // Functional Analysis and Related Topics, ed. Shozo Koshi, World Scientific. 1991.
21. Bojarski B., Hajlasz P. Pointwise inequalities for Sobolev functions and some applications // Studia Math. 1993. V. 106, № 1. P. 77-92.
22. Edmunds D. E., Evans W. D. Hardy Operators, Function Spaces and Embeddigs. New York.: Springer. 2004.
23. Evans L. C. A New Proof of Local $C^{1,\alpha}$ Regularity for Solutions of Certain Degenerate Elliptic P.D.E.// J. Differential Equations. 1982. V. 45, № 3. P. 356-373.
24. Gol'dshtein V. M., Troyanov M. Axiomatic Theory of Sobolev Spaces // Expo. Math. 2001. V. 19, № 4. P. 289 - 336.
25. Franchi B., Hajlasz P., Koskela P. Definitions of Sobolev classes on metric spaces // Ann. Inst. Fourier. 1999. V. 49, № 6. P. 1903-1924.
26. Hajlasz P. Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces // Potential Analysis 1996. V. 5, №. 4. P. 403-415.
27. Hajlasz P. Sobolev spaces on metric-measure spaces // Contemporary Math. 2003. V. 338. P. 173-218.
28. Hajlasz P. A new characterization of the Sobolev space // Studia Math. 2003. V. 159. P. 263-275.
29. Hajlasz P., Kinnunen J. Hölder quasicontinuity of Sobolev functions // Rev. Mat. Iberoamericana. 1998. V. 14, № 3. P. 601-622.
30. Hajlasz P., Koskela P. Sobolev Met Poincare// Memoirs AMS, V. 145. № 688. P. 1-101.
31. Heinonen J. Lectures on analysis on metric spaces. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
32. Heinonen J., Koskela P. Quasiconformal maps on metric spaces with controled geometry // Acta Math. 1998. V. 181. 1-61.
33. Heinonen J., Koskela P. A note on Lipshitz functions, upper gradients and the Poincare inequality // New Zealand J. Math. 1999, V. 28. P. 37-42.

34. Kauhanen J., Koskela P., Maly J. On function with derivatives in a Lorentz space // Manuscripta Math. 100, 1 (1999), p.87-101.

35. Lewis J. Regularity of the derivatives of solutions to certain elliptic equations // Indiana Univ. Math. J., 1983, V. 32, N. 6, P. 849-858.

36. Stein E. M. Editor's note: The differentiability of function in R^n. // Annals of Math. 1981. V.113. P.383-385.

37. Vodopyanov S. K. Foundations of the Theory of Mappings with Bounded Distortion on Carnot Groups // Tte Interaction of Analysis and Geometry. Contemporary Mathematics. 2007. V. 424. P. 303-344.

38. Ziemer W. P. Extremal length and conformal-capacity // Trans. Amer. Math. Sos., 1967, V. 126, N. 3, P. 460-473.

Работы автора по теме диссертации

39. Романов А. С. Емкостной аналог теоремы Лебега о дифференцировании интеграла // ДАН СССР. 1989. Т. 304, № 4, С. 803-806.

40. Романов А. С. О продолжении функций из пространств Соболева // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 4, С. 149-152.

41. Романов А. С. Об одном обобщении пространств Соболева // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 949-953.

42. Романов А. С. О теоремах вложения для обобщенных пространств Соболева // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 931-937.

43. Романов А. С. Сингулярные меры и (1,p)-емкость в весовых пространствах Соболева // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 433-437.

44. Романов А. С. Теоремы вложения для одного класса функций соболевского типа на метрических пространствах // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 2. С. 452-465.

45. Романов А. С. О вложениях классов функций с обобщенной гладкостью на метрических пространствах // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 4. С. 871-880.

46. Романов А. С. О следах соболевских функций на границе пика с гельдеровой особенностью // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 176-184.

47. Романов А. С. О следах функций, принадлежащих обобщенным классам соболевского типа // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 848-866.

48. Романов А. С. О непрерывности функций соболевского типа на метрических пространствах // Доклады РАН. 2008. Т. 418, № 5. С. 599-602.

49. Романов А. С. Емкостные соотношения в плоском четырехстороннике // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 886-897.

Романов Александр Сергеевич

Функции соболевского типа на метрических пространствах

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Подписано в печать 23.09.08. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,7. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 100 экз. Заказ № 150

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6

10