На правах рукописи

УДК 519.6

Пинягина Ольга Владиславовна

МЕТОДЫ СПУСКА ДЛЯ НЕГЛАДКИХ РАВНОВЕСНЫХ ЗАДАЧ

01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ — 2006

Работа выполнена на кафедре экономической кибернетики Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова–Ленина".

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Коннов Игорь Васильевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Лапин Александр Васильевич

доктор технических наук,
профессор Галиев Шамиль Ибрагимович

Ведущая организация: Вычислительный центр РАН, г.Москва

Защита диссертации состоится 26 октября 2006 г. в 14.30 на заседании диссертационного совета К 212.081.07 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Казанском государственном университете (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, корпус 2, ауд. 217).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 14 сентября 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доцент Агачев Ю.Р.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Равновесные задачи и вариационные неравенства позволяют единым образом формулировать и исследовать разнообразные сложные проблемы, возникающие в математической физике, экономике, исследовании операций и других областях. Значительный вклад в общую теорию равновесных задач внесли работы Х.Никайдо и К.Исоды, Фань Цзы, Л.Ниренберга, К.Байокки и А.Капело, Е.Блюма и В.Эттли, Дж. Розена. Для решения равновесных задач различные методы предлагались в работах С.И. Зуховицкого, Р.А. Поляка, М.Е. Примака, В.З. Беленького, В.А. Волконского, А.С. Антипина, И.В. Коннова, С.П. Урясьева. В то же время эта область остается менее разработанной по сравнению с методами решения задач оптимизации и вариационных неравенств, составляющих подклассы общих равновесных задач. Наиболее сложными для решения являются задачи, содержащие не строго монотонные, а также негладкие функции.

Один из распространенных подходов к решению вариационных неравенств состоит в сведении их к оптимизационной задаче с помощью так называемых интервальных (или оценочных) функций и построении методов спуска, не использующих априорных сведений о задаче.

Интересный класс интервальных функций — D-интервальные функции — был предложен Дж. Пенгом. D-интервальные функции позволяют преобразовать вариационное неравенство в задачу безусловной дифференцируемой оптимизации без локальных минимумов, если отображение в вариационном неравенстве является сильно монотонным и дифференцируемым. И.В. Коннов распространил этот подход на смешанные вариационные неравенства, включающие негладкие выпуклые функции, и показал, что D-интервальные функции для негладких смешанных вариационных неравенств являются гладкими. Затем И.В. Коннов и С. Кум обобщили этот подход на случай гильбертовых пространств.

Для решения задач выпуклой оптимизации и *монотонных* вариационных неравенств широко используется метод регуляризации Тихонова–Браудера, в котором последовательность решений регуляризированных задач сходится к решению исходной задачи. Поскольку регуляризированные задачи не могут быть решены точно, возникает необходимость в конструктивных методах, гарантирующих заданную точность аппроксимации.

В данной работе решена проблема комбинирования интервальных функций и регуляризации применительно к негладким равновесным задачам и смешанным вариационным неравенствам в общем монотонном случае. Кроме этого, значительно расширен класс используемых регуляризирующих функций.

Цель работы. Целью работы является построение конструктивных методов решения негладких монотонных равновесных задач и смешанных вариационных неравенств в конечномерных и бесконечномерных пространствах на базе комбинированного применения аппарата интервальных функций и регуляризации.

Методы исследования. При формулировке и доказательстве результатов используется теория нелинейного и выпуклого анализа и математического программирования. Достоверность результатов подтверждается приведенными доказательствами всех предложений, лемм и теорем, сформулированных в работе, а также численными экспериментами, проведенными на тестовых и модельных задачах.

Научная новизна. Для негладких равновесных задач и смешанных вариационных неравенств построены методы спуска на основе интервальных функций при условиях сильной монотонности. Разработанные методы не требуют вычисления производных для интервальных функций. Построены сильно сходящиеся методы спуска по D-интервальной функции для негладких равновесных задач в гильбертовом пространстве. Установлено мажорирующее свойство интервальных функций для расстояния до множества решений, что позволило построить конструктивные методы решения монотонных равновесных задач в конечномерных и бесконечномерных пространствах.

Таким образом, на защиту выносятся следующие, полученные автором результаты:

На основе интервальных функций построен метод спуска без вычисления производных для решения негладких равновесных задач в конечномерном пространстве, доказана его сходимость при сильной монотонности задачи.

На базе D-интервальных функций построен и обоснован сильно сходящийся метод спуска без вычисления производных для негладких сильно монотонных равновесных задач в гильбертовом пространстве.

Для решения негладких монотонных равновесных задач в конечномерном пространстве построен двухуровневый метод, основанный на решении регуляризированных задач методом спуска по интервальной функции с заданным порядком точности приближения, доказана его сходимость.

Для решения негладких монотонных равновесных задач в гильбертовом пространстве построен двухуровневый метод, основанный на решении регуляризированных задач методом спуска по D-интервальной функции с заданным порядком точности приближения, доказана его сильная сходимость.

Для решения монотонных смешанных вариационных неравенств в конечномерном пространстве на основе комбинированного метода регуляризации и спуска по интервальной функции построен двухуровневый метод, доказана его сходимость. В этом методе для построения возмущенных задач используется широкий класс равномерно монотонных регуляризирующих функций.

Теоретическая и практическая значимость. На основе интервальных и D-интервальных функций для негладких равновесных задач и смешанных вариационных неравенств построены методы спуска при условиях сильной монотонности, не требующие вычисления производных интервальных функций. Комбинированное применение технологии регуляризации и аппарата интервальных функций позволило построить для не строго монотонных негладких равновесных задач и смешанных вариационных неравенств конструктивные итеративные методы в конечномерных пространствах. Показано, что в гильбертовом пространстве эти методы являются сильно сходящимися. Разработанные в диссертационной работе методы могут быть использованы для практического решения негладких равновесных задач и вариационных неравенств, возникающих в различных областях.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались: на Всероссийской конференции "Математическое программирование и приложения-2003"(г.Екатеринбург, 24–28 февраля 2003 г.), на "18 Международном симпозиуме по математическому программированию"(г. Копенгаген, Дания, 18–22 августа 2003 г.), на Пятом и Шестом Всероссийских семинарах "Сеточные методы для краевых задач и приложения"(г. Казань, 17–21 сентября 2004 г. и 30 сентября–2 октября 2005 г.), на итоговых научных конференциях Казанского государственного университета в 2002–2005 гг., на семинарах кафедры экономической кибернетики Казанского государственного университета.

Публикации. Результаты диссертации изложены в 11 работах.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Библиография включает 90 наименований. Работа изложена на 111 страницах и содержит 19 таблиц и 4 рисунка.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, описана структура диссертации и кратко изложено содержание работы.

В первой главе диссертации приводятся общие сведения из теории вариационных неравенств и равновесных задач.

Пусть U — непустое замкнутое выпуклое множество в вещественном гильбертовом пространстве H, $\psi : H \times H \to R$ — равновесная функция, т.е. $\psi(u, u) = 0$ для любого $u \in H$. Предполагается также, что ψ — дифференцируемая функция, $\psi(u, \cdot)$ — выпуклая функция для любого $u \in H$, $f : H \to R$ — выпуклая непрерывная, но необязательно дифференцируемая функция, $G : H \to H$ — дифференцируемое отображение. В качестве основных рассматривается класс негладких равновесных задач следующего вида: найти точку $u^* \in U$ такую, что

$$\psi(u^*, v) + f(v) - f(u^*) \geq 0 \qquad \forall v \in U, \tag{1}$$

а также класс смешанных вариационных неравенств вида: найти точку $u^* \in U$ такую, что

$$\langle G(u^*), u - u^* \rangle + f(u) - f(u^*) \geq 0 \qquad \forall u \in U. \tag{2}$$

В данной главе приведены также определения свойств монотонности, общие теоремы о существовании и единственности решений равновесных задач и вариационных неравенств, а также примеры приложений.

Во второй главе диссертации рассматривается аппарат интервальных функций применительно к негладким равновесным задачам. *В первом разделе* исследуются общие свойства интервальных функций в пространстве H. *Интервальной* или *оценочной* функцией (в англоязычной литературе — gap function) для некоторой задачи (оптимизации, равновесия, вариационного неравенства) называется функция, которая *неотрицательна* на допустимом множестве данной задачи и *равна нулю* в тех и только тех точках допустимого множества, которые принадлежат множеству решений этой задачи.

Интервальная функция для задачи (1) строится в виде

$$\mu(u) = \sup_{v \in U} L(u, v) = L(u, v(u)),$$

где $L(u, v) = -\psi(u, v) - f(v) + f(u) - 0.5\alpha\|v - u\|^2$. Доказано, что она обладает следующими свойствами:
(i) $\mu(u) \geq 0 \quad \forall u \in U$;
(ii) $\mu(u) = 0,\ u \in U \iff u \in U^*$, где U^* — множество решений задачи (1).

Отсюда, в частности, следует, что исходная задача (1) эквивалентна задаче *условной минимизации*

$$\min_{u \in U} \longrightarrow \mu(u).$$

Для задачи (1) также доказано условие оптимальности в форме неподвижной точки отображения $u \mapsto v(u)$: $u^* = v(u^*) \iff u^* \in U^*$.

Во втором разделе рассматривается задача (1) в пространстве R^n. Вводится следующее предположение.
(A1) *Для частного градиента $\nabla_v \psi(\cdot, v)$ выполняется условие Липшица с константой L_ψ для любого $v \in U$.*

Функция μ по построению является недифференцируемой. Доказано, что при выполнении предположения (A1) функция μ имеет производную в любой точке $u \in U$ по любому направлению $d \in R^n$, причем

$$\mu'(u; d) = f'(u; d) - \langle \nabla_u \psi(u, v(u)) + \alpha(u - v(u)), d \rangle.$$

Следующее предположение представляет собой вариант свойства сильной монотонности функции ψ.

(A2) *Для любых $u, v \in U$ выполняется неравенство:*

$$\langle \nabla_u \psi(u, v) + \nabla_v \psi(u, v), v - u \rangle \geq \kappa \|u - v\|^2,$$

где $\kappa > 0$.

Получено необходимое и достаточное условие оптимальности для задачи (1).

Теорема 2.1 *(Условие стационарности). Пусть выполняются условия (A1) и (A2). Тогда $\mu'(\tilde{u}; u - \tilde{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U \Longleftrightarrow \tilde{u} \in U^*$.*

Доказано, что если некоторая точка $u \in U$ не является решением задачи (1), то вектор $d = v(u) - u$ представляет собой направление убывания для функции μ в точке u.

Для решения задачи (1) предложен метод спуска по интервальной функции. Этот метод не требует вычисления производных равновесной функции ψ, поскольку использует направление спуска $d = v(u) - u$, но его сходимость существенно опирается на свойства частных градиентов этой функции по векторным аргументам.

Метод 1

Шаг 0. Выберем точку $u^0 \in U$ и параметр $\alpha > 0$. Положим $k = 0$.

Шаг 1. Вычислим $\mu(u^k)$ и $v(u^k)$ по формуле

$$\mu(u^k) = \max_{v \in U} L(u^k, v) = L(u^k, v(u^k)).$$

Если $\mu(u^k) = 0$, то u^k является решением задачи, процесс решения останавливается.

Шаг 2. Вычислим $w(u^k) = u^k + l_k d^k$, где $d^k = v(u^k) - u^k$, а l_k представляет собой решение задачи одномерной минимизации

$$\min_{0 \leq l \leq 1} \longrightarrow \mu(u^k + l d^k),$$

положим $u^{k+1} = w(u^k)$, заменим k на $k + 1$ и перейдем к шагу 1.

Вводится дополнительное предположение.

(A3) *Для любого $v \in U$ отображение $\nabla_v \psi(\cdot, v)$ является сильно монотонным на множестве U с константой $\tau > 0$.*

Тогда интервальная функция представляет собой мажоранту квадрата расстояния до множества решений задачи (1).

Теорема 2.2 *Пусть выполняется предположение (A3). Тогда найдется число* $\sigma > 0$ *такое, что* $\sigma\|u - u^*\|^2 \le \mu(u) \quad \forall u \in U$, *где* $u^* \in U^*$.

Вводится обозначение:

$$S(u) = \{v \in U \mid \mu(v) \le \mu(u)\} \quad \forall u \in U.$$

Доказано, что при выполнении предположения (A3) лебегово множество $S(u)$ функции μ для любого $u \in U$ является ограниченным, а задача (1) имеет единственное решение.

На этой основе доказана сходимость метода спуска по интервальной функции.

Теорема 2.3 *Пусть выполняются предположения (A1), (A2) и (A3). Тогда итерационная последовательность* $\{u^k\}$, *построенная методом 1, сходится к единственному решению задачи (1).*

В третьем разделе рассматриваются свойства D-интервальной функции $\Psi_{\alpha\beta} : H \to R$, определенной как разность (difference) двух интервальных функций: $\Psi_{\alpha\beta}(u) = \mu_\alpha(u) - \mu_\beta(u)$, где $0 < \alpha < \beta$. Здесь

$$\mu_\alpha(u) = \sup_{v \in U} L_\alpha(u, v) = L_\alpha(u, v_\alpha(u)),$$

$$L_\alpha(u, v) = -\psi(u, v) - f(v) + f(u) - 0.5\alpha\|v - u\|^2.$$

Доказано, что D-интервальная функция $\Psi_{\alpha\beta}$ обладает следующими свойствами:

(i) $\Psi_{\alpha\beta}(u) \ge 0$ для любых $u \in H$.

(ii) $\Psi_{\alpha\beta}(u^*) = 0 \iff u^* \in U^*$.

Таким образом, исходная равновесная задача (1) эквивалентна задаче *безусловной минимизации*

$$\min_{u \in H} \to \Psi_{\alpha\beta}(u).$$

В дальнейшем используются дополнительные предположения.

(B1) *При любом* $v \in H$, *для отображения* $\nabla_v \psi(\cdot, v)$ *выполняется условие Липшица на любом ограниченном подмножестве* H.

(B2) *Отображение* $\nabla_u \psi(\cdot, \cdot)$ *непрерывно.*

В следующей теореме доказано свойство дифференцируемости D-интервальной функции $\Psi_{\alpha\beta}$, несмотря на негладкость исходной равновесной задачи. Впервые свойство дифференцируемости D-интервальной функции было установлено И.В. Конновым для *смешанных вариационных неравенств*.

Теорема 2.4 *Пусть выполняются предположения (B1) и (B2). Тогда функция $\Psi_{\alpha\beta}$ непрерывно дифференцируема и ее градиент определяется по формуле:*

$$\nabla\Psi_{\alpha\beta}(u) = \nabla_u\psi(u, v_\beta(u)) - \nabla_u\psi(u, v_\alpha(u)) + \beta(u - v_\beta(u)) - \alpha(u - v_\alpha(u)).$$

В четвертом разделе на основе D-интервальных функций построен метод спуска для задачи (1) в гильбертовом пространстве.

Вводится предположение:

(C1) *Отображение $\nabla_u\psi(u, \cdot)$ является сильно монотонным с константой κ для любого фиксированного $u \in H$.*

Для задачи (1) доказано достаточное условие оптимальности в форме условия стационарности задачи безусловной минимизации:

Теорема 2.5 *Пусть выполняются предположения (B1), (B2) и (C1). Тогда из $\nabla\Psi_{\alpha\beta}(u^*) = 0$ следует, что $u^* \in U^*$.*

Обозначим $P(u) = \nabla_v\psi(u, v)|_{v=u}$. В дальнейшем используются следующие предположения относительно частных производных функции ψ:

(C2) *Отображение $P : H \to H$ сильно монотонно с константой τ.*

(C3) *Для отображения $\nabla_u\psi(\cdot, \cdot)$ выполняется условие Липшица на каждом ограниченном подмножестве $H \times H$.*

(C4) *Для отображения $\nabla_v\psi(\cdot, \cdot)$ выполняется условие Липшица с константой L'_ψ.*

В этих условиях задача (1) имеет единственное решение. Для задачи (1) доказана следующая оценка.

Теорема 2.6 *Пусть выполняются предположения (C2) и (C4). Тогда существует константа $\tilde{\gamma} > 0$ такая, что $\tilde{\gamma}\|u - u^*\|^2 \leq \Psi_{\alpha\beta}(u) \quad \forall u \in U$, где u^* является решением задачи (1).*

Определяются вспомогательные отображения $r : H \to H$, $s : H \to H$, где $r(u) = v_\alpha(u) - v_\beta(u)$, $s(u) = \alpha[u - v_\alpha(u)] - \beta[u - v_\beta(u)]$. Доказано, что если выполняются предположения (C1)–(C4), то найдется такое $\tilde{\rho} >$

0, что для любой точки $u \in S(u^0)$ и любого числа $\rho \in (0, \tilde{\rho})$, выполняется следующее неравенство

$$\langle \nabla \Psi_{\alpha\beta}(u), r(u) + \rho s(u) \rangle \leq -(\kappa/2)(\|r(u)\| + \rho\|s(u)\|)^2,$$

где u^0 – произвольная точка из H. Метод решения задачи (1) использует направление спуска $r(u) + \rho s(u)$ в точке u, т.е. также не связан с вычислением производных.

Метод 2.

Шаг 0: Выберем произвольную начальную точку $u^0 \in H$ и параметры $0 < \alpha < \beta$, $\rho > 0$, $\theta \in (0, 1), \gamma > 0$. Положим номер итерации $k = 0$.

Шаг 1: Вычислим $\Psi_{\alpha\beta}(u^k)$. Если $\Psi_{\alpha\beta}(u^k) = 0$, останов, u^k является решением задачи (1).

Шаг 2: Положим $d^k = r(u^k) + \rho s(u^k)$.

Шаг 3: Вычислим m как наименьшее неотрицательное целое число, такое что $\Psi_{\alpha\beta}(u^k + \theta^m d^k) - \Psi_{\alpha\beta}(u^k) \leq -\theta^m \gamma(\|r(u^k)\| + \rho\|s(u^k)\|)^2$.

Шаг 4: Положим $\lambda_k = \theta^m$, $u^{k+1} = u^k + \lambda_k d^k$, заменим k на $k+1$ и перейдем к шагу 1.

Теорема 2.7 *Пусть выполняются предположения (C1)–(C4). Тогда последовательность* $\{u^k\}$*, построенная методом 2 при* $\rho \in (0, \tilde{\rho})$ *и* $\gamma \leq \kappa/2$*, сильно сходится к единственному решению задачи (1).*

Таким образом, метод 2, основанный на применении D-интервальных функций, позволяет находить решение сильно монотонной негладкой равновесной задачи (1) в гильбертовом пространстве.

Третья глава диссертации посвящена монотонным равновесным задачам и вариационным неравенствам. Для их решения методы спуска применяются в комбинации с регуляризацией Тихонова–Браудера, при которой исходная монотонная задача заменяется на последовательность регуляризированных задач с усиленными свойствами монотонности.

В первом разделе рассматривается монотонная равновесная задача в конечномерном пространстве R^n: найти точку $u^* \in U$ такую, что

$$\Gamma(u^*, v) \geq 0 \qquad \forall v \in U. \tag{3}$$

Здесь U — непустое замкнутое выпуклое множество в R^n, $\Gamma : R^n \times R^n \to R$ — равновесная функция, т.е. $\Gamma(u, u) = 0$ для любого $u \in R^n$. Будем также предполагать, что Γ монотонна, т.е. для всех $u, v \in R^n$, выполняется

$$\Gamma(u,v) + \Gamma(v,u) \leq 0,$$

$\Gamma(u,\cdot)$ выпукла для любого $u \in R^n$ и $\Gamma(\cdot, v)$ полунепрерывна сверху для любого $v \in R^n$.

В качестве вспомогательной функции выбирается любая равновесная функция $\varphi : R^n \times R^n \to R$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\varphi(u,\cdot)$ выпукла для любых $u \in R^n$ и $\varphi(\cdot, v)$ полунепрерывна сверху для любых $v \in R^n$;

2) φ сильно монотонна с константой $\tau > 0$, т.е., для всех $u, v \in R^n$, выполняется

$$\varphi(u,v) + \varphi(v,u) \leq -\tau\|u - v\|^2;$$

3) для любых $u, v \in R^n$ выполняется условие $|\varphi(u,v)| \leq \|u\|\|v - u\|$.

Рассматривается возмущенная равновесная задача по отношению к задаче (3): найти точку $u_\varepsilon \in U$ такую, что

$$\Gamma(u_\varepsilon, v) + \varepsilon\varphi(u_\varepsilon, v) \geq 0 \qquad \forall v \in U, \tag{4}$$

где ε — фиксированный положительный параметр.

Через U^* обозначается множество решений задачи (3). Следующая теорема устанавливает базовое аппроксимирующее свойство задачи (4).

Теорема 3.1 Если $U^* \neq \emptyset$, тогда $\{u_\varepsilon\} \longrightarrow u_n^*$ *при* $\varepsilon \longrightarrow 0$, *где* u_ε *— решение задачи (4), а* u_n^* *— такая точка из* U^*, *что* $\varphi(u_n^*, w) \geq 0$ *для всех* $w \in U^*$.

Применим этот подход к негладкой монотонной равновесной задаче (1), где $\Gamma(u,v) = \psi(u,v) + f(v) - f(u)$. Предполагается, что ψ монотонна. В качестве вспомогательной функции φ выберем ее простейший вариант $\varphi(u,v) = \langle u, v - u\rangle$. Возмущенная задача для задачи (1) выглядит следующим образом: найти точку $u_\varepsilon \in U$ такую, что

$$\psi(u_\varepsilon, v) + f(v) - f(u_\varepsilon) + \varepsilon\langle u_\varepsilon, v - u_\varepsilon\rangle \geq 0 \qquad \forall v \in U, \tag{5}$$

где $\varepsilon > 0$ — фиксированный параметр.

Согласно теореме о существовании и единственности из главы 1, задача (5) имеет единственное решение, а по теореме 3.1, если $U^* \neq \emptyset$, тогда последовательность решений $\{u_\varepsilon\}$ возмущенных задач (5) при $\varepsilon \to 0$ сходится к решению задачи (1) с наименьшей нормой.

Обозначим для краткости $\psi_\varepsilon(u,v) = \psi(u,v) + \varepsilon\langle u, v-u\rangle$. Функция ψ_ε по построению является сильно монотонной с константой ε.

Для решения задачи (5) используется интервальная функция, определенная в главе 2:

$$\mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u) = \sup_{v\in U} L_\alpha^{(\varepsilon)}(u,v) = L_\alpha^{(\varepsilon)}(u, v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)),$$

где $\alpha > 0$ — фиксированный параметр, $L_\alpha^{(\varepsilon)}$ — вспомогательная функция, такая, что

$$L_\alpha^{(\varepsilon)}(u,v) = -\psi_\varepsilon(u,v) - f(v) + f(u) - 0.5\alpha\|v-u\|^2.$$

Введены предположения, аналогичные (A2) и (A3).

(A2') *Для любых $u, v \in U$ выполняется неравенство:*

$$\langle \nabla_u\psi(u,v) + \nabla_v\psi(u,v), v-u\rangle \geq 0.$$

Из условия (A2') следует, что $\langle \nabla_u\psi_\varepsilon(u,v)+\nabla_v\psi_\varepsilon(u,v), v-u\rangle \geq \varepsilon\|u-v\|^2$.

(A3') *Для любого $v \in U$ отображение $\nabla_v\psi(\cdot, v)$ является монотонным на множестве U.*

Из условия (A3') следует, что отображение $\nabla_v\psi_\varepsilon(\cdot, v)$ является сильно монотонным для любого $v \in U$ на множестве U с константой ε.

Доказаны теоремы 3.2 и 3.3, являющиеся аналогами теорем 2.2 и 2.3 из главы 2. Комбинированный метод решения исходной монотонной задачи (1) выглядит следующим образом.

Метод 3

Шаг 0. Выберем произвольное число $\theta > 0$, последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_l\} \searrow 0$ и точку $z^0 \in U$. Положим $l = 1$.

Шаг 1. Положим $\varepsilon = \varepsilon_l$ и $u^l = z^{l-1}$ и выберем произвольное число α, $0 < \alpha \leq \varepsilon$.

Шаг 2. Применим метод 1 из главы 2 для возмущенной сильно монотонной задачи (5) и найдем точку $u^l \in \{u \in U \mid \mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u) \leq \mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u^0)\}$ такую, что

$$\mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u^l) \leq \varepsilon^{1+\theta}. \qquad (6)$$

Шаг 3. Положим $z^l = u^l$, $l = l + 1$ и перейдем к шагу 1.

Условие (6) выполняется за конечное число шагов метода 1 в силу свойства сходимости к решению задачи (5), которое следует из теоремы 3.3.

Сходимость метода 3 доказывает следующая теорема.

Теорема 3.4 *Пусть выполняются предположения (A1), (A2') и (A3') и $U^* \neq \emptyset$. Тогда $\lim\limits_{l \to \infty} z^l = u_n^*$.*

Таким образом, показано, что последовательность приближенных решений $\{z^l\}$ вспомогательных задач (5) сходится к решению исходной монотонной задачи (1).

Во втором разделе рассматривается монотонная равновесная задача в гильбертовом пространстве H. Предполагается, что в задаче (3) Γ монотонна, $\Gamma(\cdot, v)$ хеминепрерывна для любых $v \in H$ и $\Gamma(u, \cdot)$ выпукла и полунепрерывна снизу для любых $u \in H$. Через U^* обозначается множество решений задачи (3).

Для построения регуляризированной задачи выбирается вспомогательная равновесная функция $\varphi : H \times H \to R$, которая обладает следующими свойствами:

1) φ сильно монотонна с константой $\tau > 0$,

2) для всех $u, v \in H$ выполняется условие $|\varphi(u, v)| \leq \|u\| \|v - u\|$;

3) $\varphi(\cdot, v)$ является хеминепрерывной для любого $v \in H$, а $\varphi(u, \cdot)$ выпукла и полунепрерывна снизу для любого $u \in H$.

Используя функцию φ, как и в конечномерном случае, определяем возмущенную задачу (4), которая в этих условиях имеет единственное решение, а также обладает базовым аппроксимирующим свойством по отношению к задаче (3) в гильбертовом пространстве H.

Теорема 3.5 Если $U^* \neq \emptyset$, тогда $\{u_\varepsilon\} \longrightarrow u_n^*$ *при* $\varepsilon \longrightarrow 0$, *где* u_n^* – *такая точка из* U^*, *что* $\varphi(u_n^*, w) \geq 0$ *для всех* $w \in U^*$.

Далее рассматривается негладкая задача (1), т.е., полагаем $\Gamma(u, v) = \psi(u, v) + f(v) - f(u)$ в задаче (3). Предполагаем, что ψ монотонна. Используется простейший вариант регуляризирующей функции $\varphi(u, v) = \langle B(u), v - u \rangle$, в качестве $B : H \to H$ выбирается линейный оператор, сильно монотонный с константой $\tau > 0$, удовлетворяющий условию

$\|B\| \le 1$. Тогда возмущенная задача имеет вид: найти точку $u_\varepsilon \in U$ такую, что

$$\psi(u_\varepsilon, v) + f(v) - f(u_\varepsilon) + \varepsilon\langle Bu_\varepsilon, v - u_\varepsilon\rangle \ge 0 \qquad \forall v \in U, \tag{7}$$

где $\varepsilon > 0$ — заданный параметр.

Через U^* обозначается множество решений задачи (1). В этих условиях задача (7) имеет единственное решение, а в силу теоремы 3.5, если $U^* \ne \emptyset$, то $\{u_\varepsilon\} \longrightarrow u_n^*$, при $\varepsilon \longrightarrow 0$, где u_n^* — такая точка из U^*, что $\langle Bu_n^*, w - u_n^*\rangle \ge 0$ для всех $w \in U^*$.

Для краткости обозначим $\psi_\varepsilon(u, v) = \psi(u, v) + \varepsilon\langle Bu, v - u\rangle$. По построению, ψ_ε сильно монотонна, поэтому для решения задачи (7) с фиксированным значением ε можно применять аппарат D-интервальных функций, рассмотренный в главе 2. D-интервальную функцию обозначим следующим образом:

$$\Psi_{\alpha\beta}^{(\varepsilon)}(u) = \mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u) - \mu_\beta^{(\varepsilon)}(u),$$

где $0 < \alpha < \beta$.

Формулируется аналог предположения (C1) из главы 2.

(C1') *Отображение $\nabla_u\psi(u, \cdot)$ монотонно для любого $u \in H$.*

Заметим, что из (C1') следует, что отображение $\nabla_u\psi_\varepsilon(u, \cdot)$ является сильно монотонным с константой $\varepsilon\tau$ для любого $u \in H$.

Обозначим $P(u) = \nabla_v\psi(u, v)|_{v=u}$, $P_\varepsilon(u) = \nabla_v\psi_\varepsilon(u, v)|_{v=u} = P(u) + \varepsilon Bu$ для любого $u \in H$.

Поскольку функция ψ монотонна, то монотонным является и отображение P. Более того, из определения следует, что равновесная функция ψ_ε является сильно монотонной с константой $\varepsilon\tau$, так же, как и отображение $P_\varepsilon : H \to H$.

Для регуляризированной задачи доказаны теоремы 3.6 и 3.7, которые являются аналогами теорем 2.6 и 2.7 из главы 2. Комбинированный метод для решения исходной монотонной задачи (1) выглядит следующим образом.

Метод 4

Шаг 0. Выберем произвольное число $\theta > 0$, последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_l\} \searrow 0$ и начальную точку $z^0 \in H$. Положим $l = 1$.

Шаг 1. Положим $\varepsilon = \varepsilon_l$ и $u^0 = z^{l-1}$.
Шаг 2. Применим метод 2 из главы 2 для сильно монотонной задачи (7) и найдем точку $u^k \in \{u \in H \mid \Psi^{(\varepsilon)}_{\alpha\beta}(u) \leq \Psi^{(\varepsilon)}_{\alpha\beta}(u^0)\}$ такую, что

$$\Psi^{(\varepsilon)}_{\alpha\beta}(u^k) \leq \varepsilon^{2+\theta}. \tag{8}$$

Шаг 3. Положим $z^l = u^k$, $l = l + 1$ и перейдем к шагу 1.

Условие (8) выполняется за конечное число шагов метода 2 в силу сильной сходимости к решению задачи (7), которая следует из теоремы 3.7.

Теорема 3.8 *Пусть выполняются предположения (C1'), (C3) и (C4), и $U^* \neq \emptyset$. Тогда $\lim\limits_{l\to\infty} z^l = u^*_n$.*

Таким образом, доказана сильная сходимость последовательности $\{z^l\}$ приближенных решений вспомогательных задач (7) к решению исходной монотонной задачи (1) в гильбертовом пространстве.

Третий раздел посвящен рассмотрению смешанного вариационного неравенства (2) с монотонным основным отображением в конечномерном пространстве R^n. Вводятся предположения:

(D1) *Множество U^* решений задачи (2) непусто.*

(D2) *Отображение G монотонно.*

Определяется вспомогательная равновесная функция $\varphi : U \times U \to R$, которая обладает следующими свойствами:

(E1) *φ равномерно монотонна с функцией θ, т.е., для всех $u, v \in R^n$, имеем*

$$\varphi(u, v) + \varphi(v, u) \leq -\theta(\|u - v\|)\|u - v\|,$$

где $\theta : R \to R$ — некоторая непрерывно возрастающая функция такая, что $\theta(0) = 0$, $\theta(\tau) \to +\infty$ при $\tau \to +\infty$;

φ равномерно ограничена с функцией σ, т.е., для всех $u, v \in R^n$, выполняется неравенство

$$|\varphi(u, v)| \leq \sigma(\|u\|)\|u - v\|.$$

где $\sigma : R \to R$ — неубывающая функция со свойствами $\sigma(0) = 0$ и $\sigma(\tau) > 0$ для любого $\tau > 0$;

$\varphi(u, \cdot)$ выпукла для любого $u \in U$.

(E2) *Функция $\varphi : U \times U \to R$ дифференцируема.*

Рассматривается возмущенная задача: пусть ε — положительный параметр, найти точку $u_\varepsilon \in U$ такую, что

$$\langle G(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon\rangle + f(v) - f(u_\varepsilon) + \varepsilon\varphi(u_\varepsilon, v) \geq 0 \qquad \forall v \in U. \tag{9}$$

В теореме 3.9 показано, что решения задач (9) аппроксимируют решение задачи (2) при $\varepsilon \to 0$.

Для возмущенной задачи (9) строится интервальная функция. Фиксируется число $\alpha > 0$ и выбирается произвольная вспомогательная функцию $\psi : U \times U \to R$, которая обладает следующими свойствами:

(F1) *ψ — дифференцируемая равновесная функция такая, что $\psi(u, v) > 0$ для всех $u, v \in U$, $u \neq v$; $\nabla_v\psi(u, u) \in N(U, u) = \{q \in R^n : \langle q, v - u\rangle \leq 0 \quad \forall v \in U\}$ для всех $u \in U$; и $\psi(u, \cdot)$ равномерно выпукла с функцией ζ для любого $u \in U$, т.е.*
$\psi(u, w) - \psi(u, v) \geq \langle\nabla_v\psi(u, v), w - v\rangle + \zeta(\|w - v\|)\|w - v\| \quad \forall v, w \in U$, где $\zeta : R \to R$ — некоторая непрерывно возрастающая функция такая, что $\zeta(0) = 0$, $\zeta(\tau) \to +\infty$ при $\tau \to +\infty$.

Определяется функция

$$\mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u) = -\min_{v \in U}\{\Phi_\alpha^{(\varepsilon)}(u, v)\} = -\Phi_\alpha^{(\varepsilon)}(u, v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)),$$

где $\Phi_\alpha^{(\varepsilon)}(u, v) = \langle G(u), v - u\rangle + f(v) - f(u) + \varepsilon\varphi(u, v) + \alpha\psi(u, v)$, и доказывается, что она является интервальной функцией для задачи (9).

Вводятся предположения:

(D3) *Для отображения G выполняется условие Липшица на U.*

(E3) *Для отображений $\nabla_u\varphi(\cdot, \cdot)$ и $\nabla_v\varphi(\cdot, \cdot)$ выполняется условие Липшица на $U \times U$; и для любой пары точек $u, v \in U$, имеем*
$\langle\nabla_u\varphi(u, v) + \nabla_v\varphi(u, v), v - u\rangle \geq \eta(\|u - v\|)\|u - v\|$, где $\eta : R \to R$ — непрерывно возрастающая функция такая, что $\eta(0) = 0$, $\eta(\tau) \to +\infty$ при $\tau \to +\infty$.

(F2) *Для отображений $\nabla_u\psi(\cdot, \cdot)$ и $\nabla_v\psi(\cdot, \cdot)$ выполняется условие Липшица на $U \times U$; и для любой пары точек $u, v \in U$, имеем $\langle\nabla_u\psi(u, v) + \nabla_v\psi(u, v), v - u\rangle \geq 0$.*

В этих условиях отображение $u \mapsto v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)$ непрерывно, а функция

$\mu_\alpha^{(\varepsilon)}$ имеет производную по любому направлению $d \in R^n$ в любой точке $u \in U$.

Формулируется необходимое и достаточное условие оптимальности для задачи (9).

Теорема 3.10 *(Условие стационарности). Пусть выполняются предположения (D2), (E1)–(E3), (F1) и (F2). Тогда точка $\tilde{u}$ является решением задачи (9) в том и только в том случае, когда $\mu_\alpha^{(\varepsilon)\prime}(\tilde{u}; u - \tilde{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U$.*

Доказывается, что если некоторая точка $u \in U$ не является решением задачи (9), то вектор $d = v_\alpha^{(\varepsilon)}(u) - u$ представляет собой направление убывания для функции $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}$ в точке u.

Для вспомогательной равномерно монотонной задачи (9) предложен **метод 5**, подобный методу 1 из главы 2.

Теорема 3.11 *Пусть выполняются предположения (D2), (D3), (E1)–(E3), (F1) и (F2). Тогда итерационная последовательность, сгенерированная методом 5, сходится к единственному решению задачи (9).*

Для решения исходного монотонного смешанного вариационного неравенства разработан следующий метод:

Метод 6

Шаг 0. Выберем произвольную точку $z^0 \in U$, число $\delta > 0$ и последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_i\} \searrow 0$. Положим $i = 1$.

Шаг 1. Применим метод 5 к вспомогательной равномерно монотонной задаче (9) при $y^0 = z^{i-1}$, $\varepsilon = \varepsilon_i$, и будем строить последовательность $\{y^k\}$ до тех пор, пока не выполнится условие

$$\|y^k - v_\alpha^{(\varepsilon)}(y^k))\| \leq \varepsilon^{1+\delta}. \tag{10}$$

Шаг 2. Положим $z^i = y^k$, заменим i на $i+1$ и перейдем к шагу 1.

Теорема 3.12 *Пусть выполняются предположения (D1)–(D3), (E1)–(E3), (F1) и (F2) и последовательность $\{z^i\}$ построена методом 6. Тогда: (i) каждая i-ая итерация метода является конечной;*
(ii) последовательность $\{z^i\}$ сходится к точке $u_n^* \in U^*$ такой, что выполняется условие $\varphi(u_n^*, v) \geq 0 \quad \forall v \in U^*$.

Четвертая глава диссертации посвящена численному исследованию методов, изложенных во 2 и 3 главах. В первом разделе четвертой главы рассмотрены примеры решения разнообразных тестовых задач. Размерность рассмотренных задач от 4 до 1000. Для построения части примеров использовался генератор тестовых задач. Результаты численных экспериментов показывают стабильную сходимость методов, при этом на скорость сходимости влияют многие факторы, такие как величина константы сильной монотонности, соотношение слагаемых гладкой и негладкой части и так далее.

Во втором разделе рассмотрен пример приложения вариационных неравенств к задаче потокового равновесия, приведены результаты численных экспериментов решения этой задачи на различных конфигурациях сети. Сравнение методов спуска по интервальной функции (метод 1) и по D-интервальной функции (метод 2) показывает, что второй метод работает быстрее. Также рассмотрена задача потокового равновесия в динамической постановке, т. е., на временном интервале $[0, T]$, которая формулируется в виде вариационного неравенства в гильбертовом пространстве. Для ее решения применяется метод спуска по D-интервальной функции (метод 2). Рассмотрены гладкий и негладкий вариант этой задачи, причем в негладком случае задача решается быстрее, т.е. здесь негладкость оказывает некоторый стабилизирующий эффект. В целом по итогам данной главы можно сделать вывод о работоспособности предложенных в работе методов.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. На основе интервальных функций построен метод спуска без вычисления производных для решения негладких равновесных задач в конечномерном пространстве, доказана его сходимость при сильной монотонности задачи.

2. На базе D-интервальных функций построен и обоснован сильно сходящийся метод спуска без вычисления производных для негладких сильно монотонных равновесных задач в гильбертовом пространстве.

3. Для решения негладких монотонных равновесных задач в конечномерном пространстве построен двухуровневый метод, основанный на решении регуляризированных задач методом спуска по интервальной

функции с заданным порядком точности приближения, доказана его сходимость.

4. Для решения негладких монотонных равновесных задач в гильбертовом пространстве построен двухуровневый метод, основанный на решении регуляризированных задач методом спуска по D-интервальной функции с заданным порядком точности приближения, доказана его сильная сходимость.

5. Для решения монотонных смешанных вариационных неравенств в конечномерном пространстве на основе комбинированного метода регуляризации и спуска по интервальной функции построен двухуровневый метод, доказана его сходимость. В этом методе для построения возмущенных задач используется широкий класс равномерно монотонных регуляризирующих функций.

ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Коннов И.В. Применение D-интервальных функций для решения общих задач равновесия [Текст] / И.В. Коннов, О.В. Пинягина // Информационный бюллетень №10. Тезисы докладов XII Всероссийской конференции "Математическое программирование и приложения-2003"(Екатеринбург, 24–28 февраля 2003 г.) – Екатеринбург, 2003. – С.154.

2. Konnov I.V. D-gap functions for a class of equilibrium problems in Banach spaces [Текст] / I.V. Konnov, O.V. Pinyagina // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2003. – V.3, №2. – P.274–286.

3. Konnov I.V. Application of the D-gap function approach to general equilibrium problems in Banach spaces [Текст] / I.V. Konnov, O.V. Pinyagina // 18th Intern. Symp. on Math. Programming : Abstracts (Copenhagen, Denmark, August 18-22, 2003) – Copenhagen, 2003. – P.53.

4. Коннов И.В. Метод спуска по интервальной функции для негладких задач равновесия [Текст] / И.В. Коннов, О.В. Пинягина // Изв.вузов. Математика. – 2003. – №12. – С.71–77.

5. Konnov I.V. D-gap functions and descent methods for a class of monotone equilibrium problems [Электронный ресурс] / I.V. Konnov, O.V. Pinyagina // Lobachevskii Journal of Mathematics (http://ljm.ksu.ru). – 2003. – V.13. – P.57–65.

6. Кашина О.А. Применение регуляризации для монотонных задач равновесия и оптимизации [Текст] / О.А. Кашина, И.В. Коннов, О.В. Пинягина // Тезисы Всероссийской конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач"(Екатеринбург, 2-6 февраля 2004 г.) – Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2004. – С. 278–279.

7. Пинягина О.В. Метод спуска по интервальной функции для негладких монотонных задач равновесия [Текст] / О.В. Пинягина // Вычислительные методы и программирование. – 2004. – Т.5. – С.154–160.

8. Пинягина О.В. Применение интервальных функций к негладким монотонным задачам равновесия [Текст] / О.В. Пинягина // Материалы Пятого Всероссийского семинара "Сеточные методы для краевых задач и приложения", посвященного 200-летию Казанского государственного университета (Казань, 17–21 сентября 2004 г.) – Казань, 2004. – С. 196–199.

9. Пинягина О.В. Метод спуска для монотонных смешанных вариационных неравенств [Текст] / О.В. Пинягина // Труды Второй Всероссийской научной конференции "Математическое моделирование и краевые задачи", Часть 3 (Самара, 1–3 июня 2005 г.) – Самара, 2005. – С.193–194.

10. Коннов И.В. Метод спуска для монотонных задач равновесия [Текст] / И.В. Коннов, О.В. Пинягина // Материалы Седьмой международной Казанской летней научной школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы"(Казань, 27 июня–4 июля 2005 г.) – Казань, 2005. – С. 86–87.

11. Пинягина О.В. Применение регуляризации и D-интервальных функций к монотонным задачам равновесия в банаховом пространстве [Текст] / О.В. Пинягина // Материалы Шестого Всероссийского семинара "Сеточные методы для краевых задач и приложения"(Казань, 30 сентября–2 октября 2005 г.) – Казань, 2005. – С. 182–184.