КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ШИРОКОВА ЕЛЕНА АЛЕКСАНДРОВНА

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ПРИБЛИЖЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ЗАДАЧ ГИДРОМЕХАНИКИ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Казань – 2006

Работа выполнена в Казанском государственном университете

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Артюхин Юрий Павлович,

доктор физико-математических наук,
профессор Кутрунов Владимир Николаевич,

доктор физико-математических наук,
профессор Сидоров Игорь Николаевич

Ведущая организация: Московский государственный университет

Защита состоится 16 марта 2006 г. в 16.00 на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18, корп. 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 8 февраля 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, кандидат физ.-мат. наук, доцент О. А. Задворнов

Объектом исследования настоящей работы являются актуальные проблемы теории упругости и гидромеханики, математическими моделями которых служат граничные задачи для различных дифференциальных уравнений — динамических уравнений, уравнений равновесия теории упругости, приближенных уравнений Стокса, а также уравнения Бельтрами.

Актуальность. Трудно переоценить важность решения задач определения внутренних характеристик тела по внешним — граничным — воздействиям. В теории упругости к таким задачам следует отнести задачи восстановления напряжений или смещений во внутренних точках тела по, соответственно, напряжениям или смещениям в точках поверхности тела. Задачи эти исследуются с середины 19-го века, но число точных решений таких задач в трехмерной постановке очень мало. Естественно, что соответствующие нестационарные задачи являются еще более сложными. Обычно такие задачи решаются приближенно, например, методом конечных элементов.

В случае плоских стационарных задач теории упругости аппарат теории функций комплексного переменного, впервые предложенный в работах Г.В.Колосова и Н.И.Мусхелишвили, позволил получить точные решения основных задач для достаточно широкого класса областей, в частности, для областей, получаемых при дробно-рациональном отображении круга или его внешности. Однако, способ решения Н.И. Мусхелишвили исключает возможность рассмотрения областей с граничными точками возврата — каспами. В то же время моделирование процессов разрушения требует описания точного асимптотического поведения граничных напряжений именно вблизи каспов, так как такие точки являются концентраторами напряжений.

Теория функций комплексного переменного и краевые задачи для аналитических функций имеют приложения также в теории фильтрации. Вопросы, связанные с фильтрацией, в 20-м веке приобрели особое значение в связи с интенсивным строительством гидросооружений. Именно в Казанском университете возникла и получила развитие теория обратных краевых задач фильтрации — задач определения формы подземного водонепроницаемого сооружения по заданным вдоль контура сооружения характеристикам процесса фильтрации, например, по эпюре фильтрационного давления или скорости фильтрации жидкости. В случае однородного изотропного грунта обратные краевые задачи фильтрации решаются с применением краевых задач для аналитических функций. В случае неоднородного грунта задача усложняется, и нетривиальные аналитические решения обратных задач фильтрации до сих пор не были построены. В последнее время актуальность задач фильтрации обусловлена также проблемами, связанными с загрязнением окружающей среды.

Целью настоящей работы является построение решений граничных задач теории упругости и гидромеханики новыми методами, а также приложение полученных решений в теории разрушений и теории фильтрации.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Впервые поставлены и решены следующие задачи: вариант смешанной задачи плоской теории упругости (аналог контактной задачи), обратная краевая задача плоской теории упругости, ряд краевых задач для тонких симметричных относительно срединной плоскости оболочек и покрытий плоских областей, граничная задача для полого цилиндра в трехмерной постановке, задача неустановившегося обтекания профиля вязкой жидкостью и задача течения жидкости в канале с динамичными стенками. В работе предложен новый метод решения основных задач плоской теории упругости для областей с граничными каспами. Этим методом, например, получены точные решения основных задач плоской теории упругости для бесконечных областей — плоскостей с C- и S-образными вырезами. Новыми являются все интерполяционные решения задач теории упругости и гидромеханики, итерационные решения задач фильтрации в неоднородном грунте, а также решение обратной краевой задачи для аналитической функции в обобщенной постановке и все достаточные условия корректности постановки этой задачи (однолистность и единственность решения).

Методы исследования. Основными методами, применяемыми в настоящей работе, являются
–методы краевых задач для аналитических функций и их обобщений,
–метод интегральных уравнений.

Достоверность полученных в диссертации результатов обусловлена тем, что применяются точные и строго обоснованные аналитические методы в рамках общепринятых гипотез и допущений механики сплошной среды. Кроме того, результаты диссертации являются обобщением или развитием полученных ранее результатов и совпадают с этими результатами в частных случаях.

Апробация. Основные методы и результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в 46 публикациях, приведенных в конце диссертации, перед списком цитированной литературы.

Результаты докладывались на семинарах по геометрической теории функций комплексного переменного при КГУ под руководством профессора Л.А. Аксентьева, на конференциях "Краевые задачи теории фильтрации и их приложения" (Казань, 1991), "Вторые математические чтения памяти М.Я.Суслина" (Саратов, 1991), "Алгебра и анализ" (Казань, 1994 и 1997), "Теория функций и ее приложения" (Казань, 1995, 1999, 2001, 2003), "Понтрягинские чтения - 10" (Воронеж, 1999), "Актуальные проблемы математики и механики" (Казань, 2000), "Краевые задачи аэрогидромеханики и их приложения" (Казань, 2000), "Геометрическая теория функций и краевые задачи" (Казань, 2002), на Международной конференции "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ", посвященной столетию С.М. Никольского (Москва, 2005), на научном семинаре при кафедре механики композитов МГУ (сентябрь 2005), на

Шестом Всероссийском семинаре "Сеточные методы для краевых задач и приложения" (Казань, 2005), на Международной конференции "Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования" (Воронеж, 2005), на семинаре в институте математического моделирования (руководитель — профессор Е.И. Леванов), на итоговых научных конференциях 2003 г. и 2004 г. Казанского научного центра РАН, а также, на ежегодных отчетных конференциях КГУ (секции "Геометрическая теория функций" и "Механика твердого тела").

Основные результаты, представленные в настоящей работе и выносимые на защиту.

– Получено интерполяционное решение нестационарной задачи — второй основной плоской задачи динамики упругих тел.

– Предложен новый метод решения основных задач плоской теории упругости для бесконечных областей, являющихся образами внешности единичного круга при действии дробно-рациональных функций.

– Найдены зависимости направлений начального роста трещин из каспов от формы выреза и способа нагружения на основе полученных точных решений задач для областей с граничными каспами.

– Решены граничные задачи для тонких покрытий плоских областей и для оболочек специального вида — симметричных относительно срединной плоскости.

– Построены интерполяционные решения основных граничных задач в трехмерной постановке для цилиндроидов. Решена интерполяционная задача для полого кругового цилиндра, внутренняя поверхность которого находится под давлением.

– Получены интерполяционные решения задач течения вязкой жидкости с малым числом Рейнольдса — нестационарного плоского обтекания изолированного профиля и стационарного течения в цилиндре.

– Построены решения краевых и обратных краевых задач при достаточно общих предположениях относительно исходных данных, получены достаточные условия корректности постановок таких задач.

– Разработан метод решения задач фильтрации в неоднородном грунте.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования и решаемых задач, дан обзор работ, близких к теме диссертации, и дано краткое описание содержания диссертации.

В **первой главе** рассматриваются плоские задачи теории упругости. Точные решения нестационарной задачи — второй основной задачи динамики упругих тел для плоского случая в классификации Н.И.Мусхелишвили — получены с помощью теории волн только в частных случаях. Обычно трудности в решении таких задач связаны с переменными краевыми условиями. В параграфе 1.1.1 ставится интерполяционная задача, позволяющая получать приближенное решение плоской динамической задачи в случае, когда граничные смещения интерполируются полиномом по переменной t — времени. Интерполирующее решение также ищется в виде полинома по степеням переменной t. Решение исходной системы уравнений движения упругой среды сводится к системе дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов полинома и далее, с учетом граничных условий, — к конечному числу плоских краевых задач. Каждая задача состоит в том, чтобы определить две аналитические в области D функции $f(z)$ и $g(z)$ по краевому условию вида

$$[kf(z) + z\overline{f'(z)} + \overline{g(z)}]_{|\partial D} = R(t). \qquad (1)$$

Таким образом, возникают задачи, математически совпадающие с основными задачами плоской теории упругости в постановке Н.И. Мусхелишвили. При этом получаемое решение совпадает с заданными граничными смещениями в заданные моменты времени и удовлетворяет динамическим уравнениям. Для приближения начальных условий в решение вводятся слагаемые, содержащие произвольные параметры. В параграфе 1.1.2 приводится интерполяционное решение задачи для круга с заданием граничных смещений в три момента времени. Соответствующие краевые задачи с граничным условием типа (1) решаются сведением к двум задачам Шварца.

Основные задачи плоской теории упругости имеют приложения в теории разрушений. Процессы разрушения связаны с концентрациями напряжений вблизи отверстий, особенно, с концентрацией напряжений вблизи конца трещины. Анализ этих напряжений на основе точного решения первой основной задачи теории упругости для прямолинейного разреза показал, что напряжения на таком конце имеют асимптотику типа $z^{-1/2}$. В связи с этим для анализа плоских задач развития трещин был введен комплексный коэффициент интенсивности напряжений $K_1 - iK_{11}$ — величина, пропорциональная коэффициенту при $(z - z_0)^{-1/2}$ в представлении суммы компонент тензора $(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ вблизи конца разреза z_0. В диссертации используются сформулированные Г.И.Баренблаттом и принятые в теории разрушений гипотезы, в соответствии с которыми, стенки трещины в ее конце должны плавно смыкаться под нулевым углом, при том, что уже на незначительном расстоянии от конца стенки не должны касаться друг друга. Поэтому прямолинейный разрез или узкий эллиптический вырез, применявшиеся вначале для моделирования трещин, не вполне адекватны реальной трещине. В настоящей диссертации рассматриваются области с вырезами, содержащими граничные каспы — точки возврата граничной кривой, моделирующие вершину трещины.

Хорошо известно, что в случае, когда область является R-областью, то есть, конформное отображение внешности круга на нее — дробно-рациональная функция, решения основных задач плоской теории упругости, используемые для моделирования напряжений или смещений, могут быть получены в замкнутом виде с применением интегралов типа Коши, плотность которых содержит в знаменателе производную отображающей функции. Поскольку у плотности интеграла типа Коши допускаются только слабые особенности, при решении задач делается обязательное предположение о том, что отображающая единичный круг на исследуемую область функция не может иметь на границе нуль первого порядка у производной. Следовательно, такой методом неприменим в случае области с граничным каспом. В работах, посвященных решению основных задач для вырезов с каспами, решения традиционно находятся либо приближенно — путем разложения в ряды, либо с применением метода предельного перехода, когда необходимые параметры вычисляются для близких к исследуемой областей с гладкой границей, и только затем делается предельный переход, соответствующий переходу к области с граничной точкой возврата.

В параграфе 1.2.1 настоящей диссертации предложен новый метод нахождения точного решения основных задач плоской теории упругости для бесконечных R-областей, в том числе, и областей с граничными каспами. Основой метода является сведение задачи с краевым условием (1) к двум краевым задачам Шварца для мероморфных функций. В итоге решение задачи приводится к конечной системе линейных алгебраических уравнений. С помощью указанного метода в параграфе 1.2.2 решены основные задачи для плоскости с вырезами четырех типов: каплеобразного с одним каспом, двоякосимметричного с двумя каспами, $C-$образного и $S-$образного. Так, плоскость с $S-$образным вырезом является образом внешности единичного круга $|\zeta| > 1$ при отображении функцией

$$z(\zeta) = \zeta + \frac{(b^2-1)^2\zeta}{(\zeta^2-b^2)(1+b^2)}, |b| < 1.$$

Для областей с граничными каспами, не являющимися R-областями, предложен способ решения, состоящий в сведении задачи к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Этот способ описан в параграфе 1.3 настоящей диссертации.

Следует заметить, что представленные методы решения основных задач плоской теории упругости в бесконечной области с граничными каспами можно успешно применять также в теории изгиба тонких пластин с трещинами, так как там задачи также сводятся к определению аналитических функций по краевому условию вида (1).

В параграфе 1.4.1 ставится и решается новая смешанная задача плоской теории упругости, которую можно трактовать как вариант контактной задачи теории упругости. Особенностью метода решения этой задачи является то, что она сводится к краевой задаче Гильберта. В параграфе 1.4.2 приведен пример точного решения такой задачи для плоскости с каплеобразным вырезом, имеющим граничный касп.

В параграфе 1.5 дана новая постановка обратной краевой задачи теории упругости: по заданным значениям смещений и напряжений на границе неизвестной области требуется определить саму область. В отличие от случая обратных краевых задач для аналитических функций при решении обратной задачи теории упругости в такой постановке приходится пользоваться перепараметризацией граничных данных, так как иначе задача является переопределенной.

В трех последующих параграфах приведены примеры применения решений основных задач плоской теории упругости для бесконечных областей с граничными каспами. Большой интерес в механике разрушений представляет изучение асимптотических напряжений вблизи граничных каспов, условий и направлений роста трещин из вершин каспов. В диссертации используется известная гипотеза, в соответствии с которой начальное распространение трещины происходит в направлении β, для которого нормальное разрывающее напряжение σ_β имеет максимальное значение коэффициента интенсивности. Трещина растет, если коэффициент интенсивности разрывающих напряжений в каспе достигает критического значения, определяемого для каждого материала экспериментально. В том случае, когда помимо разрывающих усилий в окрестности каспа действует поперечный сдвиг, влияние на разрушение оказывает комплексный коэффициент интенсивности $K_1 - iK_{11}$.

В параграфе 1.6 рассмотрен случай двоякосимметричного выреза, наиболее адекватно моделирующего симметричную трещину с плавно смыкающимися берегами. Решение основных задач плоской теории упругости для бесконечной плоскости с таким вырезом приведено в параграфе 1.2.2. Рассмотрены различные случаи напряжений в такой области. Получены комплексные коэффициенты интенсивности напряжений в каспе, направление и условие роста трещины из каспа в случае растяжения. Приведены графики зависимостей направления начального роста трещины из каспа и величины предельного напряжения от направления растяжения плоскости. Полученные зависимости практически совпадают с известными из литературы соответствующими зависимостями для прямолинейного разреза в том случае, когда берега выреза не слишком далеко отходят друг от друга. Это свидетельствует о том, что направление и предельное напряжение, необходимое для роста трещины из каспа, практически не зависят от степени "раскрытия" прямой трещины, и значит применение прямолинейного разреза для моделирования прямых трещин вполне оправдано. Такое свойство симметричных вырезов с каспами, хотя и полученных с помощью иных отображающих функций — для трещин с меньшим раскрытием и с большим числом каспов — было отмечено и ранее в работах А.А.Каминского, В.В.Панасюка и других.

В параграфе 1.7.1 указан общий способ определения начального направления роста трещины из каспа для случая, когда соответствующая область является R-областью. Этот способ применяется в параграфе 1.7.2 для нахождения зависимости направлений начального роста трещин из каспов от направления растяжения и от формы области для семейств бесконечных областей двух типов — плоскостей с каплеобразным и с S-образным вырезами. Графики направлений начального роста трещины в зависимости от направления растяжения плоскости с соответствующим вырезом показывают, как направления начального роста трещины меняются, когда вырез деформируется. Это доказывает, в частности, что в качестве модели изогнутой трещины при S-образном изгибе или выреза с одним каспом при достаточно большом раскрытии выреза нельзя брать разрезы по отрезку прямой.

Последние два параграфа первой главы посвящены изучению возможности применения аналитических функций для моделирования роста полостей в вязких телах. В случае вязкого тела компоненты тензора напряжений, как и в случае упругих тел, выражаются через те же аналитические функции — комплексные потенциалы, которые участвуют в краевых условиях вида (1) для основных задач плоской теории упругости. В исследованиях Г.П.Черепанова указана возможность применения однопараметрического семейства последовательно вложенных бесконечных областей для моделирования процесса роста внутренних полостей в вязких телах. Очевидно, что такие последовательно вложенные друг в друга области обязаны быть однолистными. Достаточные условия однолистности таких семейств с использованием соответствующих семейств отображающих функций — цепей подчинения — получено в параграфе 1.8.1. В параграфе 1.8.2 построен пример того, как с ростом параметра круговая полость превращается в полость с граничным каспом. Для такого семейства соответствующие комплексные потенциалы определяются из соотношения вида (1) на границе движущейся полости. Представляя вектор граничных напряжений через найденные комплексные потенциалы, определяем изменение напряжений на границе полости, обеспечивающее заданное изменение полости.

Вторая глава диссертации посвящена граничным задачам теории упругости в трехмерной постановке для однородных изотропных тел. Они сводятся к решению задач, аналогичных плоским задачам теории упругости. Ранее плоские задачи использовались для решения пространственных задач, в основном, в осесимметричном случае.

Первый шаг к применению основных задач плоской теории упругости к задачам в трехмерной постановке делается в параграфах

2.1.1 - 2.1.6. Здесь ставятся и решаются трехмерные задачи, аналогичные основным задачам плоской теории упругости для тонких покрытий плоских областей и для тонких оболочек, симметричных относительно срединной плоскости $\tilde{z} = 0$. Сначала рассматриваются постановки задач для покрытий, то есть тонких оболочек, одна из внешних поверхностей которых — плоскость $\tilde{z} = 0$. То, что эти трехмерные тела имеют малую толщину, позволяет предполагать, что компоненты вектора смещений в этих телах линейно зависят от соответствующей координаты $\tilde{z}$. Благодаря этому предположению получаем, что уравнения равновесия превращаются в линейные уравнения относительно $\tilde{z}$. Сравнение коэффициентов при соответствующих степенях приводит к соотношениям, позволяющим ввести аппарат аналитических функций и поставить задачи восстановления введенных комплексных потенциалов по заданным на границе плоских областей и на кромках поверхностей над ними значений смещений или напряжений. Задачи, решаемые в этих параграфах, продолжают идеи Г.З.Шарафутдинова в связи с применением аналитических функций к задачам для оболочек, симметричных относительно срединной плоскости.

В параграфе 2.1.1 для случая покрытий вводятся комплексные потенциалы — три аналитические функции, устанавливаются их связи с напряжениями и смещениями. В параграфе 2.1.2 приводятся различные постановки аналогов основных задач плоской теории упругости для тонких покрытий конечных односвязных плоских областей, находятся условия разрешимости таких задач и указывается способ решения. Так, например, безусловно разрешимой оказывается следующая

Задача. *Предположим, что уравнение границы плоской области D имеет вид $\{x(s), y(s), 0\}$, $s \in [0, l]$, уравнение верхней кромки покрытия D:*

$$x = x(s), y = y(s), \tilde{z} = \tilde{z}(s)\, s \in [0, l].$$

Пусть задан плоский вектор граничных смещений

$$(u(x(s), y(s), 0), v(x(s), y(s), 0))$$

на границе основания покрытия, значения касательной составляющей плоских смещений на верхней кромке покрытия

$$u(x(s), y(s), \tilde{z}(s))x'(s) + v(x(s), y(s), \tilde{z}(s))y'(s) = R_2(s),$$

и значения ортогональной к плоскости $\tilde{z} = 0$ составляющей вектора смещений $w(x(s), y(s), \tilde{z}(s))$ на верхней кромке покрытия. Требуется определить смещения во всех точках покрытия.

В параграфе 2.1.2 приводится схема решения такой задачи.

Пример решения поставленной задачи для случая конечной R-области приведен в параграфе 2.1.3. В параграфе 2.1.4 подобные задачи ставятся для случая, когда область D является бесконечной.

Следующие два параграфа посвящены решению трехмерных задач для оболочек, симметричных относительно срединной плоскости $\tilde{z} = 0$, при таком симметричном деформировании что первые две координаты вектора смещений зависят только от координат точки срединной плоскости, а третья координата линейно зависит от расстояния до срединной плоскости. В параграфе 2.1.5 ставятся задачи как для конечной, так и для бесконечной области на срединной плоскости, указывается метод их решения. В параграфе 2.1.6 указан способ получения точного решения для случая, когда область является бесконечной R-областью. Приведен пример решения задачи для бесконечной двоякосимметричной области с двумя граничными каспами.

В остальных параграфах второй главы находятся интерполяционные решения основных граничных задач теории упругости в случае цилиндрических тел. Для тел с достаточно гладкой поверхностью доказано, что граничные задачи теории упругости в трехмерной постановке — когда задаются смещения или напряжения на поверхности трехмерного тела и требуется определить смещения и напряжения в любой внутренней точке тела — имеют единственное решение. Построение такого решения сводится, даже при сравнительно простых краевых условиях и канонических телах, к интегральным уравнениям, обычно решаемым приближенно.

Суть интерполяционного решения задач для цилиндрических тел заключается в том, что напряжения или смещения задаются не на всей поверхности цилиндра, а только на конечном числе кривых, лежащих на цилиндрической поверхности, что более соответствует реальным задачам. Специальное представление смещений позволяет свести задачу к набору плоских задач. При этом, если такие плоские задачи имеют точное решение, мы получаем смещения и напряжения, удовлетворяющие уравнениям равновесия, в точности совпадающие с заданными на заданных кривых смещениями или напряжениями, и интерполирующие смещения (или напряжения) в точках цилиндрической поверхности, отличных от точек заданных кривых. Очевидно, что такая задача имеет бесчисленное множество решений, так как в точках поверхности тела, отличных от точек заданных кривых, вектор смещений (или напряжений) не задается. При достаточно плотном покрытии боковой поверхности цилиндра замкнутыми кривыми, проходящими через узлы достаточно хороших полиномиальных приближений граничных значений компонент смещений или напряжений на соответствующих отрезках, задание смещений или напряжений на этих замкнутых кривых может достаточно точно моделировать задание вектора смещений или напряжений на всей боковой поверхности. В этом случае точное частное решение задачи будет адекватно решению соответствующей граничной задачи в трехмерной постановке во внутренних точках цилиндрического тела, удаленных от его торцов.

В соответствии с количеством замкнутых кривых, на которых задаются смещения, при решении второй основной задачи для цилиндроида каждая координата вектора смещений ищется в виде полинома соответствующей степени по степеням $\tilde{z}$ (параграф 2.2.1). Уравнения равновесия при этом сводятся к уравнениям для неизвестных коэффициентов полинома.

Построение интерполяционного решения в параграфе 2.2.2 сводится к последовательным решениям краевых задач с граничным условием вида (1) для аналитических функций. При этом меняются лишь правые части в краевых условиях с использованием полученных ранее функций.

В случае, когда ортогональным сечением цилиндрического тела является конечная R-область, каждая из получаемых на каждом этапе краевых задач, а следовательно, и сама поставленная задача имеют точное решение. Точность интерполяционного решения задачи, удовлетворяющего уравнениям равновесия во всех точках цилиндроида, понимается в смысле совпадения заданных смещений со смещениями, полученными в результате решения, в заданных точках поверхности. В качестве примера в параграфе 2.2.3 приведено решение задачи для кругового цилиндра с заданием вектора смещений на трех уровнях боковой поверхности – когда цилиндр сжат и изогнут:

$$\vec{a}_{|\tilde{z}=1,x^2+y^2=1} = (0,0,\delta), \vec{a}_{|\tilde{z}=2,x^2+y^2=1} = (\epsilon,0,0),$$

$$\vec{a}_{|\tilde{z}=3,x^2+y^2=1} = (0,0,-\delta).$$

Интерполяционное решение такой задачи имеет вид

$$u(x,y,\tilde{z}) = -3\epsilon + (x^2+y^2-1)\frac{\epsilon\mu}{\lambda+3\mu} + 4\epsilon\tilde{z} - \epsilon\tilde{z}^2,$$

$$v(x,y,\tilde{z}) \equiv 0, \quad w(x,y,\tilde{z}) = 2\delta - \delta\tilde{z}.$$

В параграфах 2.2.4 и 2.2.5 ставится и решается интерполяционная задача в случае, когда на кривых на поверхности цилиндроида задаются не смещения, а напряжения. Схема решения является той же, но вследствие возникающих на каждом этапе условий разрешимости приходится накладывать дополнительные условия на задаваемые функции.

В параграфе 2.2.6 обсуждается возможность решения интерполяционной задачи в случае бесконечного цилиндрического тела конечной высоты — бесконечного пласта с цилиндрическим вырезом.

В следующих трех параграфах диссертации строится интерполяционное решение для кругового полого цилиндра. В этом случае помимо смещений на конечном числе уровней внешней цилиндрической поверхности дополнительно на внутренней поверхности задаются постоянное давление и условие скольжения. Компоненты вектора смещений также ищутся в виде полиномов относительно соответствующей координаты (параграф 2.3.1). В параграфе 2.3.2 для определения коэффициентов полиномов последовательно решаются краевые задачи с краевым условием вида (1) в кольце. Решение краевых задач, в свою очередь, сведено к решению линейных систем относительно коэффициентов разложения искомых функций в ряды Лорана. В качестве примера в параграфе 2.3.3 найдено решение задачи со смещениями на трех уровнях — полый цилиндр сжат и изогнут.

В параграфе 2.4 обсуждается возможность изменения краевых условий при построении интерполяционных решений трехмерных задач и приводятся примеры таких изменений. В частности, меняются граничные условия задачи для полого цилиндра, решенной в параграфе 2.3.3: дополнительно к сжатию и изгибу вводится обжатие на двух уровнях. Кроме того, указан способ решения интерполяционной задачи при задании смещений в конечном числе точек на торцах цилиндроида.

В параграфе 2.5 указывается способ построения непрерывных и гладких сплайн-интерполяционных решений трехмерных задач для цельного цилиндроида и для полого кругового цилиндра на основе интерполяционных решений таких задач.

Третья глава посвящена решениям краевых и обратных краевых задач для аналитических функций и их обобщений — решений уравнений эллиптического типа. В параграфах 3.1.1 - 3.1.4 проведено исследование возможности обобщения постановки внутренней обратной краевой задачи по параметру s (дуговой абсциссе). Такая задача была впервые поставлена и решена с применением вспомогательного конформного отображения М.Т. Нужиным. Интерес к обратным краевым задачам возник в Казанском университете в связи с важными приложениями этих задач к задачам механики. Обратные краевые задачи возникли вначале как гидромеханические задачи, связанные с проблемой построения профилей по заданному вдоль них распределению скоростей в работах Г.Г. Тумашева. Параллельно с большим количеством прикладных задач решались и вопросы, связанные с постановкой и обобщением основной обратной краевой задачи — задачи восстановления аналитической функции и области ее задания по краевым значениям функции в терминах определенного параметра, главным образом, дуговой абсциссы s искомого контура. Традиционная схема решения внутренней обратной краевой задачи такова: производится вспомогательное конформное отображение единичного круга $E = \{\zeta||\zeta| < 1\}$ на известную область D_w в плоскости значений искомой функции $w = f(z)$, в результате сравнения граничных параметров определяется зависимость $s = s(\theta)$, и граничные значения $\mathrm{Re}\,\ln z'(\zeta) = \ln ds/d\theta$ используются для восстановления аналитической в E функции $z(\zeta)$, отображающей E на неизвестную область D_z. В том случае, когда область D_z однолистна, функция $w = f(z)$ восстанавливается в этой области по граничным значениям с использованием интегральной формулы Коши.

Ф.Д. Гахов указал наиболее широкий класс функций, принадлежность к которому исходных данных обеспечивает разрешимость внутренней обратной краевой задачи. Особый интерес вызывает постановка задачи, приводящая к наличию угловых точек на известном и на искомом контурах.

В первых четырех параграфах третьей главы строится решение внутренней обратной краевой задачи по параметру s без применения вспомогательного отображения на единичный круг. В параграфе 3.1.1 решение задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма

$$q(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^l q(\tau)\{\arg[w(\tau) - w(s)]\}'_\tau d\tau - \frac{1}{\pi}\int_0^l p(\tau)\{\ln|w(\tau) - w(s)|\}'_\tau d\tau, \qquad (2)$$

где $p(s) = -(\ln[u'(s)^2 + v'(s)^2])/2$, в случае, когда исходные функции

$u(s)$ и $v(s)$ — вещественная и мнимая части граничных значений искомой аналитической функции — обладают гельдеровыми производными. Именно этот класс исходных данных использовался в работах основоположников теории обратных краевых задач Г.Г. Тумашева и М.Т. Нужина. Поэтому такая постановка задачи в диссертации названа классической. При этой постановке соответствующее интегральное уравнение (2) решается в пространстве гельдеровых функций. В параграфе 3.1.2 рассмотрен случай, когда условия классической постановки нарушаются при конечном числе значений $s = s_k$, соответствующих угловым точкам на искомом контуре. Сделав перепараметризацию известной кривой, мы приходим к решению интегрального уравнения в том же пространстве гельдеровых функций. В параграфе 3.1.3 предложена обобщенная постановка внутренней обратной краевой задачи по параметру s. В отличие от классической постановки здесь производные функций $u(s)$ и $v(s)$ не являются непрерывными, а принадлежат некоторому подпространству пространства функций, интегрируемых по Лебегу. Здесь также проводится перепараметризация, и задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма (2) в пространстве функций, интегрируемых по Лебегу. В параграфе 3.1.4 рассмотрен случай обобщенной постановки при наличии угловой точки на известном контуре. Решение такой задачи снова сводится к решению интегрального уравнения в пространстве функций, интегрируемых по Лебегу.

Параграфы 3.2.1 - 3.2.5 настоящей диссертации посвящены исследованию корректности постановок обратных краевых задач по параметру s. Термин "корректность" в применении к внутренним обратным краевым задачам по параметру s означает простоту границы Γ_z искомой ограниченной области действия неизвестной аналитической функции, заданной своими граничными значениями $w(s)$ в терминах дуговой абсциссы неизвестного контура. Помимо того, что однолистность искомой области необходима для реализации решений с точки зрения механики, именно в случае однолистности области D_z возможно восстановление искомой аналитической функции $w = w(z)$ с помощью интегральной формулы Коши. В большинстве случаев достаточные условия однолистности связаны со вспомогательным отображением на единичный круг и представляют собой ограничения, обеспечивающие однолистность отображения единичного круга на искомую область (слабая проблема однолистности). Более перспективной является задача получения достаточных условий однолистности D_z в виде ограничений на исходную функцию $w(s) = u(s) + iv(s)$, называемая сильной проблемой однолистности.

Достаточные условия выпуклости и почти выпуклости границы искомой области в рамках решения сильной проблемы однолистности получены в параграфах 3.2.1 - 3.2.4 диссертации. Результаты первых двух из указанных параграфов основаны на применении оценки Трикоми разности решений данного и измененного в терминах изменения ядра интегральных уравнений. Используя полученное в параграфе 3.1.1 интегральное уравнение, изменяя его и получая решение измененного уравнения, мы находим оценки для характеристик искомой граничной кривой, обеспечивающие ее простоту.

Большую роль в решении обратной краевой задачи по параметру s играет то, что параметр — дуговая абсцисса искомой кривой. Перепараметризовав уравнение известного контура $\Gamma_w = \{w = u(s) + iv(s), s \in [0, l]\}$, мы получим новую задачу, приводящую к новой области D_z. В параграфах 3.2.3 и 3.2.4 получены достаточные условия однолистности решения соответствующих внутренних обратных краевых задач при перепараметризации заданной функции $w(s)$. Примером подобных достаточных условий однолистности может служить
<u>ТЕОРЕМА 3.10.</u> *Пусть* $\tilde{w}(\sigma) = \tilde{u}(\sigma) + i\tilde{v}(\sigma), 0 \le \sigma \le \sigma_k,$ *— уравнение замкнутой кривой,* σ *— естественный параметр, причем*

$$\max_{0 \le \tau, \sigma \le \sigma_k} |\Phi^{(5)}_{\tau\tau\tau\sigma\sigma}| \frac{\sigma_k^5}{\pi 144} \equiv d < \frac{1}{\pi},$$

где $\Phi(\tau, \sigma) \equiv \arg[\tilde{w}(\tau) - \tilde{w}(\sigma)] - \arg[\exp(2\pi i\tau/\sigma_k) - \exp(2\pi i\sigma/\sigma_k)]$. *Если* $\sigma = \sigma(s), 0 \le s \le l,$ *— монотонная функция, удовлетворяющая условиям:* $0 < m_1 \le \sigma'(s) \le M_1 < \infty, |\sigma'(s_1) - \sigma'(s_2)| \le \omega(s_1 - s_2),$ *где*

$$\omega(0) = 0, \int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty, \delta > 0,$$

причем

$$\inf_{0<\delta\le\sigma_k/2}[\frac{1}{m_1}\int_0^\delta\frac{\omega(t)}{t}dt+2|\ln M_1||\ln(l/(2\delta))|]<\frac{\pi(1-2d)(1-\pi d)m_1}{2M_1},$$

то зависимость $w(s)=\tilde{w}(\sigma(s)), s\in[0,l]$, *представляет собой исходные данные, при которых решение соответствующей внутренней обратной краевой задачи по параметру* s *будет почти выпуклым.*

Внешняя обратная краевая задача при тех же граничных данных отличается от внутренней тем, что неизвестная область D_z обязана содержать бесконечно удаленную точку. Следовательно, если решать задачу с помощью вспомогательного конформного отображения на единичный круг, мы должны обеспечить существование простого полюса у функции $z(\zeta)$ в круге E. Поскольку полюс является корнем некоторого уравнения, называемого уравнением Гахова, то для того, чтобы обеспечить единственность решения внешней обратной краевой задачи, достаточно обеспечить единственность корня этого уравнения. Можно, как и в случае исследования однолистности, получать достаточные условия единственности внешней обратной краевой задачи по параметру s в виде ограничений на функцию, отображающую каноническую область на искомую область, то есть, уже получив решение. Более перспективным представляется получение достаточных условий единственности внешней обратной краевой задачи в виде ограничений на исходную функцию $w(s)$. Подобное условие найдено в параграфе 3.2.5.

Параграфы 3.3.1 – 3.3.4 настоящей диссертации посвящены решению краевых и обратных краевых задач для функций из более широкого класса, чем аналитические функции — удовлетворяющих уравнению эллиптического типа

$$f'_{\overline{z}}=\lambda(z)f'_z+h(z), z\in D, \tag{3}$$

где $|\lambda(z)|<1, z\in D$. Очевидно, что аналитические функции удовлетворяют такому уравнению с $\lambda(z)\equiv h(z)\equiv 0$. В случае $h(z)\equiv 0$ уравнение (3) называется уравнением Бельтрами, и его решения осуществляют квазиконформное отображение области D. Основным аппаратом для решения краевых задач для функций, удовлетворяющих уравнению (3), является интегральный оператор вида

$$T[\mu] = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D} \frac{\mu(t)}{t-\zeta} d\sigma_t, \tag{4}$$

и его модификации для конкретных областей.

Основой для решения обратных краевых задач для аналитических функций можно считать краевую задачу Шварца. В параграфе 3.3.1 найдено решение задачи Шварца для функций, удовлетворяющих уравнению (3). Задача решается как в области с гладкой границей, так и в области с граничной угловой точкой. В следующем параграфе (3.3.2) с использованием решения задачи Шварца ставятся и решаются обратные краевые задачи в классической и обобщенной постановках для функции $w = w(z)$, удовлетворяющих уравнению

$$w'_{\overline{z}} = -\lambda(w, \overline{w})\overline{w'_z}.$$

Параграфы 3.3.3 и 3.3.4 посвящены решению смешанной краевой задачи в полуполосе $D = \{w : |\mathrm{Re}\, w| < a, \mathrm{Im}\, w < 0\}$ для функции, удовлетворяющей уравнению (3) и краевым условиям

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, g(w)\mid_{w=u\in(-a,a)} & = \Omega(u); \\ \mathrm{Im}\, g(w)\mid_{w=\pm a+iv, v\in(-\infty,0)} & = 0. \end{cases} \tag{5}$$

При этом вводится не применявшееся ранее новое подпространство пространства функций, интегрируемых по Лебегу в полуполосе — пространство $\tilde{L}^p(D)$ функций $t(w)$, удовлетворяющих условию:

$$\sup_{A>0}\{(1+A)[\iint\limits_{w\in D, \mathrm{Im} w<-A} |t(w)|^p d\sigma_w]^{1/p}\} \equiv \|t\|_{\tilde{L}^p} < \infty.$$

Для решения задачи вводится и используется новый оператор $\tilde{T}$ с особенностью типа особенности оператора T из (4):

$$\tilde{T}[\omega] = -\frac{1}{4a}\iint\limits_{D} \omega(\tau)[\mathrm{ctg}\,\frac{\pi(\tau - w)}{4a} + \mathrm{tg}\,\frac{\pi(\tau + w)}{4a}]d\sigma_\tau +$$

$$+\frac{1}{4a}\iint\limits_{D}\overline{\omega(\tau)}[\operatorname{tg}\frac{\pi(\overline{\tau}+w)}{4a}+\operatorname{ctg}\frac{\pi(\overline{\tau}-w)}{4a}]d\sigma_{\tau}.$$

Характерным свойством оператора $\tilde{T}$ является то, что его областью значений при любой плотности $\omega(\tau), \tau \in D$ является пространство функций, удовлетворяющих однородным краевым условиям вида(5).

При решении смешанной задачи реализуются различные условия на поведение искомой функции в окрестности бесконечно удаленной точки.

В **четвертой главе** диссертации рассмотрены некоторые задачи гидромеханики, решение которых сводится к решению плоских краевых задач.

Методы решения краевых задач для функций, удовлетворяющих эллиптическому уравнению, применяются для решения обратных задач фильтрации в неоднородном грунте. Подкласс таких функций — аналитические функции — применяется для определения давления и скорости фильтрующейся жидкости, когда грунт однородный. В случае неоднородного грунта в законе фильтрации коэффициент уже не будет постоянным, и условия Коши-Римана заменяются на эллиптическое уравнение. Обратные задачи теории фильтрации, то есть задачи определения подземного профиля гидротехнических сооружений, были поставлены и решены для случая однородного грунта в известной монографии М.Т. Нужина и Н.Б. Ильинского. В настоящей диссертации предложен метод аналитического решения подобных задач для неоднородного грунта.

Параграф 4.1 посвящен описанию постановки и способа решения задачи построения подземного контура по заданной вдоль него эпюре фильтрационного давления $h = f(x), 0 \le x \le l$, где x — абсцисса точки искомого контура, для бесконечного неоднородного водонепроницаемого слоя, расположенного в нижней полуплоскости плоскости z. Здесь эта задача в случае коэффициента фильтрации, удовлетворяющего условию

$$k = \begin{cases} k(z), & \operatorname{Im} z < 0, |z| < M; \\ k_0, & \operatorname{Im} z < 0, |z| \geq M, \end{cases}$$

сводится к получению функции, удовлетворяющей уравнению

$$z'_{\overline{w}} = -\lambda(z(w))z'_w$$

в полуполосе $\operatorname{Im} w < 0, |\operatorname{Re} w| < k_0 H/2$, и краевым условиям

$$\operatorname{Re} z(w)|_{u \in (-k_0 H/2, k_0 H/2), v=0} = x(u), \operatorname{Im} z(w)|_{u=\pm k_0 H/2} = 0.$$

Здесь

$$\lambda(z) = \frac{k_0 - k(z)}{k_0 + k(z)},$$

H — перепад напора вдоль искомого контура, $x(u)$ — функция, обратная к функции $-k_0 f(x)$. Для построения решения используется итерационный процесс:

$$z_n(w) = z_0(w) + \tilde{T}[\omega_n],$$

где $z_0(w)$ — нулевая итерация, построенная для $\lambda \equiv 0$, а плотность $\omega_n(w)$ удовлетворяет в D уравнению

$$\omega_n(w) = \sigma_n[\omega_n](w) - \lambda(z_{n-1}(w))z'_0(w).$$

В последнем уравнении $\sigma_n[\omega](w) \equiv -\lambda(z_{n-1}(w))\tilde{S}[\omega](w)$, где сингулярный оператор $\tilde{S}[\omega]$ получен из оператора $\tilde{T}$ дифференцированием по w. При этом для реализуемости решения при каждой итерации выбираются значения параметра, содержащегося в $z_0(w)$, при котором получаемый при итерации контур лежит ниже вещественной оси.

В параграфе 4.2.1 дана новая интерпретация построения квазирешения задачи определения подземного контура по заданной вдоль него скорости для однородного грунта. Для разрешимости такой задачи приходится вводить дополнительное ограничение на заданную функцию для того, чтобы начальная и конечная точки контура оказались на уровне, задаваемом прямолинейными границами верхнего и нижнего бьефов. Предложенный в параграфе 4.2.1 способ изменения исходных данных является способом перепараметризации граничных значений потенциальной функции. В следующем параграфе (4.2.2) такой метод изменения исходных данных указан как основа для построения квазирешений подобной задачи в случае неоднородного грунта. Предложен способ построения итераций на основе решенных в параграфах 3.3.3 и 3.3.4 задач.

В трех следующих параграфах (4.3.1 - 4.3.3) приведена модификация известного метода решения задачи о шпунте Жуковского с учетом неоднородности грунта. Здесь также в качестве канонической области использована полуполоса, что позволяет применять для решения вспомогательных краевых задач оператор $\tilde{T}$, исследованный в третьей главе, а также его модификацию — оператор $\grave{T}$. Задача о шпунте Жуковского так же, как и задача из параграфа 4.1, решается методом итераций. Получено условие сходимости итерационного процесса.

Последние три параграфа четвертой главы посвящены двум интерполяционным задачам, связанным с течением вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса. В этом случае уравнения Навье-Стокса заменяются приближенными уравнениями Стокса, то есть линейными уравнениями. Следовательно, так же, как и в первых двух главах, решение с известными граничными значениями в отдельные моменты времени (нестационарная задача) или на отдельных уровнях (стационарная задача для цилиндра), представленное в виде полинома, позволяет свести задачу с тремя переменными к конечному числу плоских задач для двух аналитических функций с граничным условием вида (1). В этих интерполяционных задачах возможно точное решение соответствующих краевых задач на каждом этапе в том случае, когда соответствующие области являются R-областями. Задачи для течения вязкой жидкости с малым числом Рейнольдса могут найти применение, например, при изучении процессов, связанных с нанотехнологиями. Кроме того, интерполяционное решение для приближенных уравнений Стокса может служить начальной итерацией при построении интерполяционных решений уравнений Навье-Стокса.

Список работ автора по теме диссертации.

1. Широкова Е.А. Применение интегрального уравнения Фредгольма при исследовании внутренней обратной краевой задачи/ Е.А. Широкова// Тр. семин. по краевым задачам, вып. 21: сб.ст./ Изд. КГУ. – Казань, 1984. – С. 233-239.
2. Широкова Е.А. Использование интегрального уравнения при решении внутренней обратной краевой задачи в случае угловых точек на искомом контуре/ Е.А. Широкова// Тр. семин. по краевым задачам, вып. 22: сб.ст./ Изд. КГУ. – Казань, 1985. – С. 209-213.
3. Широкова Е.А. Об однолистном изменеии однолистных функций/ Е.А. Широкова// Тр. семин. по краевым задачам, вып. 23: сб.ст./ Изд. КГУ. – Казань, 1986. – С. 258-263.
4. Широкова Е.А. Решение внутренней обратной краевой задачи для уравнения Бельтрами по параметру s путем сведения к интегральным уравнениям/ Е.А. Широкова// Тр. семин. по краевым задачам, вып. 24: сб.ст./ Изд. КГУ. – Казань, 1990. – С. 240-248.
5. Широкова Е.А. Получение достаточных условий единственности решения внешней обратной краевой задачи в виде ограничений на исходные данные/ Е.А. Широкова// Конструктивная теория функций и функциональный анализ: сб.ст./ Изд. КГУ. – Казань, 1990. – С. 95-102.
6. Широкова Е.А. Внутренняя обратная краевая задача по параметру s для уравнения Бельтрами, заданного в плоскости искомой области/ Е.А. Широкова// Тр. семин. по краевым задачам, вып. 25: сб.ст./ Изд. КГУ. – Казань, 1990. – С. 238-247.
7. Широкова Е.А. Решение смешанной краевой задачи для уравнения эллиптического типа в полуполосе/ Е.А. Широкова// Вторые математические чтения памяти М.Я.Суслина: сб.тез.докл./ Изд. СГПИ.

– Саратов, 1991. – С. 81.
8. Широкова Е.А. Краевые задачи для уравнений эллиптического типа в полуполосе и их применение к решению задачи о шпунте Жуковского в неоднородном грунте/ Е.А. Широкова// Краевые задачи теории фильтрации и их приложения: сб.тез.докл./ Изд. КГУ. – Казань, 1991. – С. 101.
9. Широкова Е.А. Решение обратной задач напорной фильтрации в неоднородном изотропном грунте при задании распределения напоров как функции параметра x/ Е.А. Широкова// Тр. семин. по краевым задачам, вып. 27: сб.ст./ Изд. КГУ. – Казань, 1992. – С. 140-147.
10. Широкова Е.А. Об одной смешанной задаче в полуполосе для уравнения эллиптического типа// Изв.вузов. Математика. – 1992. – N 10. – С. 61-67.
11. Широкова Е.А. О сведении обратной краевой задачи к решению интегрального уравнения/ Е.А. Широкова// Алгебра и анализ: сб.тез.докл./ Изд. КГУ. – Казань, 1994. – С. 151-152.
12. Широкова Е.А. О сведении решения обратной краевой задачи к решению интегрального уравнения Фредгольма// Изв.вузов. Математика. – 1994. – N 8. – С. 72-80.
13. Shirokova E.A. The exact solution of the plane elasticity problem for the symmetric airfoil cracks// Mech.Res.Com. – 1994. – V.21. – N 6. – P. 407-414.
14. Иваньшин Н.А. Решение задач теории упругости для плоскости с двоякосимметричным вырезом, имеющим два нулевых угла/ Н.А. Иваньшин, Е.А. Широкова// Прикл.матем.и мех-ка. – 1995. – Т.59. – N 3. – С. 524-528.
15. Широкова Е.А. Решение основных задач теории упругости для одного класса областей/ Е.А. Широкова// Теория функций и ее приложения: сб.тез.докл./ Изд. Казанский фонд "Математика". – Казань, 1995. – С. 75.
16. Shirokova E.A. The exact solution of the plane elasticity second basic problem for the symmetric airfoil cracks// Mech.Res.Com. – 1995. – V.22. – N 5. – P. 447-451.

17. Shirokova E.A. The exact solution of the plane elasticity problems for the non-symmetric airfoil crack/ E.A. Shirokova and R.G. Salahudinov// Mech.Res.Com. – 1997. – V.24. – N 2. – P. 131-136.
18. Shirokova E.A. Stress intensity factors at the cusp of the doubly symmetric cut with various boundary displacements and stresses/ E.A. Shirokova and N.A. Ivan'shin// Mech.Res.Com. – 1997.– V.24. – N 35. – P. 303-307.
19. Широкова Е.А. Сведение основных задач теории упругости для плоскости с вырезом, имеющим две граничные точки возврата, к системе линейных уравнений/ Е.А. Широкова// Алгебра и анализ: сб.тез.докл./ Изд. Казанск.мат.об-ва. – Казань, 1997. – С. 246.
20. Иваньшин Н.А. Решение второй основной задачи теории упругости для плоскости с двоякосимметричным вырезом, имеющим два нулевых угла/ Н.А. Иваньшин, Е.А. Широкова// Прикл. матем. и мех-ка. – 1997. – Т.61. – N 2. – С. 350-351.
21. Shirokova E.A. The exact solution of the plane elasticity problems for the airfoil crack with two cusps/ E.A. Shirokova and N.A. Ivan'shin// Mech.Res.Com. – 1998. – V.25. – N 2. – P. 179-182.
22. Shirokova E.A. The solution of the plane elasticity basic problems for the unbounded domains with boundary cusps// Mech.Res.Com. –1999. – V.26. – N 1. – P. 61-64.
23. Shirokova E.A. The exact solution of the plane elasticity problems for S-cut with cusps/ E.A. Shirokova and P.N. Ivan'shin// Mech.Res.Com. – 1999. – V.26. – N 1. – P. 65-68.
24. Широкова Е.А. Внутренняя обратная краевая задача в обобщенной постановке/ Е.А. Широкова// Современные методы в теории краевых задач: сб.тез.докл./ Изд. ВГУ. – Воронеж, 1999. – С. 269.
25. Широкова Е.А. Внутренняя обратная краевая задача в обобщенной постановке/ Е.А. Широкова// Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: сб.тез.докл./ Изд. Казанск.мат.об-ва. – Казань, 1999. – С. 251.
26. Shirokova E.A. The direction of initial crack growth for the class of cuts with cusps on the plane// Mech.Res.Com. – 2000. – V.27. – N 2. – P. 181-184.

27. Широкова Е.А. Получение классов данных для корректной постановки обратной краевой задачи с помощью перепараметризации выпуклой кривой/ Е.А. Широкова// Тр. мат. центра им.Н.И. Лобачевского, т.55: сб.тез.докл./ Изд.УНИПРЕСС. – Казань, 2000. – С. 229.
28. Широкова Е.А. Сведение решения внутренней обратной краевой задачи к интегральному уравнению в случае угловых точек на искомом и на известном контурах// Изв.вузов. Математика. – 2000. – N 9. – С. 74-78.
29. Иваньшин Н.А. Коэффициенты интенсивности напряжений и направление начального распространения трещины в точках возврата двоякосимметричного выреза/ Н.А. Иваньшин, Е.А. Широкова// Изв. вузов. Авиационная техника. – 2000. – N 3. – С. 3-5.
30. Широкова Е.А. Способ оптимального изменения граничных условий в задаче о построении подземного контура по заданному распределению скорости фильтрации/ Е.А. Широкова// Тр. мат. центра им. Н.И.Лобачевского, т.7: сб.тез.докл./ Изд.ДАС. – Казань, 2000. – С. 350-351.
31. Широкова Е.А. Способ постановки обратной краевой задачи теории упругости/ Е.А.Широкова// Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского, т.8: сб.тез.докл.// Изд.ДАС. – Казань, 2001. – С. 244-246.
32. Широкова Е.А. Направления начального роста трещин для некоторых вырезов с каспами// Изв.вузов. Авиационная техника. – 2001. – N 4. – С. 26-28.
33. Широкова Е.А. Решение задачи Шварца для уравнения эллиптического типа в области с негладкой границей/ Е.А. Широкова// Тр. мат. центра им.Н.И. Лобачевского, т.13: сб.ст./ Изд. Казанск.мат.об-ва. – Казань, 2002. – С. 166-170.
34. Широкова Е.А. Аналоги основных задач плоской теории упругости в трехмерной постановке/ Е.А. Широкова// Тр. мат. центра им.Н.И. Лобачевского, т.13: сб.ст./Изд. Казанск. мат.об-ва. – Казань, 2002. – С. 170-176.
35. Широкова Е.А. Получение классов данных для корректной постановки обратной краевой задачи путем перепараметризации// Изв.

вузов. Математика. – 2002. – N 4. – С. 64-70.
36. Shirokova E.A. The analogues of the basic problems of the theory of elasticity for the special 3-d strain in the plates// Mech.Res.Com. – 2002. – V.29. – N 2-3. – P. 153-158.
37. Shirokova E.A. On 3-d strains in a thin coat of a plane domain// Mech.Res.Com. – 2002. – V.29. – N 4. – P. 317-324.
38. Широкова Е.А. Трехмерные аналоги второй основной задачи плоской теории упругости для цилиндрических упругих тел/ Е.А. Широкова// Тр. мат. центра им.Н.И.Лобачевского, т.19: сб.тез. докл./ Изд.Казанск. мат.об-ва. – Казань, 2003. – С. 240.
39. Широкова Е.А. О смешанных задачах в полуполосе для уравнения эллиптического типа// Изв.вузов. Математика. – 2003. – N 10. – С. 77-83.
40. Shirokova E.A. On 3-d analog of the second basic problem of the theory of elasticity for a cylindrical solid// Mech.Res.Com. – 2004. – V.31. – N 1. – P. 29-37.
41. Shirokova E.A. The boundary value problems for thin coats// Mech. Res. Com. – 2004. – V.31. – N 4. – P. 387-393.
42. Shirokova E.A. Elastic solutions for a pressurised tube with given exterior
displacements// Int.J.Pressure Vessels and Piping – 2004. – V.81. – N 9. – P. 731-738.
43. Ермолаева В.В. Направления начального роста трещины из граничного каспа в полубесконечной области/ В.В. Ермолаева, Е.А. Широкова// Изв.вузов. Авиационная техника. – 2003. – N 4. – С. 3-6.
44. Широкова Е.А. Аналог второй основной задачи теории упругости с заданием смещений в торцах цилиндрических тел/ Е.А. Широкова// Тр. мат. центра им.Н.И. Лобачевского, т.25: сб.тез.докл./ Изд. Казанск. мат.об-ва. – Казань, 2004. – С. 286-287.
45. Широкова Е.А. Пространственные задачи для одного класса пластин, аналогичные основным задачам теории упругости// Изв.вузов. Математика. – 2005. – N 2. – С. 54-61.
46. Широкова Е.А. Интерполяционное решение второй основной

плоской задачи динамики упругих тел/ Е.А. Широкова// Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского, т.30: сб.тез.докл./ Изд.Казанск.мат.об-ва. – Казань, 2005. – С. 166-167.