На правах рукописи

Икузнец

КУЗНЕЦОВА ИРИНА АНАТОЛЬЕВНА

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2009

Работа выполнена на кафедре высшей математики Самарского государственного архитектурно-строительного университета

Научный руководитель: *доктор физико-математических наук, профессор Репин Олег Александрович*

Официальные оппоненты: *доктор физико-математических наук, профессор Плещинский Николай Борисович*

доктор физико-математических наук, профессор Пулькина Людмила Степановна

Ведущая организация: *научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации при Кабардино-Балкарском научном центре Российской академии наук*

Защита состоится 23 апреля 2009 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете имени В.И. Ульянова - Ленина по адресу: г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан "24" февраля 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета кандидат физ.-мат. наук, доцент Е.К. Липачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория краевых задач для уравнений смешанного и гиперболического типов является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений с частными производными, что объясняется как теоретической значимостью результатов, так и наличием их практических приложений в газовой динамике, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, в безмоментной теории оболочек, в магнитной гидродинамике, в математической биологии и других областях.

Начало исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в работах Ф. Трикоми и С. Геллерстедта, где впервые были поставлены и изучены краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа.

Позднее фундаментальные результаты в исследованиях гиперболических уравнений, а также уравнений смешанного типа были получены в работах Ф.И. Франкля, М.А. Лаврентьева, А.В. Бицадзе, К.И.Бабенко, С.П. Пулькина, М.М. Смирнова и других авторов.

Успехи современного естествознания требуют дальнейшего развития теории дифференциальных уравнений в частных производных, что приводит к необходимости исследования локальных и нелокальных краевых задач, в том числе задач со смещением. Исследованию краевых задач как с локальным, так и нелокальным смещением для гиперболического и смешанного типов уравнений посвящены работы В.И. Жегалова, А.М. Нахушева, М.М. Смирнова, В.Ф. Волкодавова, М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева, Е.И. Моисеева, С.К. Кумыковой, О.А. Репина, К.Б. Сабитова, Л.С. Пулькиной, Р.С. Хайруллина, Ф.Г. Мухлисова, Н.Б. Плещинского и других авторов.

С появлением работ А.М. Нахушева, посвященных интегралам и производным дробного порядка, начинает развиваться исследование краевых задач с операторами дробного интегродифференцирования в краевых условиях. Первые работы по исследованию задач со смещением содержали в краевых условиях классические операторы Римана-Лиувилля. Естественным обобщением этих операторов являются операторы, введенные Э. Лавом (Австралия), А. Мак-Брайдом (Англия), М. Сайго (Япония). Исследованием краевых задач с обобщенными операторами в краевых условиях занимались М. Сайго, М.М. Смирнов, А.А. Килбас, О.А. Репин, Д. Аманов, С.И. Макаров и другие математики.

Особенностью данной диссертационной работы является наличие в краевых условиях не классических операторов, а обобщенных операторов дробного интегродифференцирования в смысле М. Сайго с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре.

Цель работы. Целью работы является исследование вопросов однозначной разрешимости новых нелокальных задач с обобщенными операторами дробного интегродифференцирования в краевых условиях для уравнений Геллерстедта и Бицадзе–Лыкова в ограниченных и неограниченных областях.

Методика исследований. При доказательстве единственности и существования решения поставленных задач применяется аппарат специальных функций, интегральное преобразование Ганкеля, методы теории интегральных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, свойства обобщенных операторов дробного интегродифференцирования, принципы экстремума для дифференциальных уравнений с частными производными.

Научная новизна заключается в следующих результатах.

1. Для модельного уравнения смешанного типа (уравнения Геллерстедта) с вырождением первого и второго рода в явном виде получено решение новых задач со смещением, краевые условия которых содержат линейную комбинацию обобщенных операторов дробного интегродифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре. При этом представлен широкий спектр изменения функций и констант, входящих в краевые условия.
2. Для уравнения влагопереноса (уравнения Бицадзе–Лыкова) доказаны теоремы существования и единственности решений нелокальных задач, содержащих производные и интегралы дробного порядка в смысле М. Сайго. Выявлены условия, при которых справедлив принцип экстремума.
3. Развита методика сведения краевых задач со смещением к разрешимости интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма второго рода или сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши.

Практическая и теоретическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты и методы исследования представляют научный интерес и могут быть использованы для дальнейшей разработки теории нелокальных краевых задач для уравнений смешанного и гиперболического типов, а также для решения прикладных задач, приводящих к таким уравнениям.

Положения, выносимые на защиту.

1. Постановка и исследование новых нелокальных задач со смещением для уравнения Геллерстедта с вырождением первого и второго рода с обобщенным оператором дробного интегродифференцирования в смысле М. Сайго в краевых условиях для ограниченных и неограниченных

областей.
2. Определение значений параметров операторов, входящих в краевые условия, для которых справедливы теоремы существования и единственности решения рассмотренных задач.
3. Изучение новых нелокальных задач для уравнения Бицадзе–Лыкова, краевые условия которых содержат линейную комбинацию операторов дробного интегродифференцирования в смысле Римана – Лиувилля и М. Сайго.
4. Доказательство однозначной разрешимости исследуемых задач методом редукции к интегральным уравнениям Вольтерра и Фредгольма второго рода или сингулярным интегральным уравнениям с ядром Коши.

Апробация работы. Результаты исследования, приведенные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на ежегодных научных межвузовских конференциях "Математическое моделирование и краевые задачи" в 2005–2007 гг. (г. Самара, СамГТУ), на международной научной конференции "Современные методы физико-математических наук", посвященной 75-летию Орловского государственного университета (г. Орел, 2006 г.), на международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", посвященной 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа (г. Новосибирск, 2007 г.), на V школе молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы анализа и информатики", посвященной 50-летию Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова и 15-летию Адыгской (Черкесской) Международной академии наук (г. Нальчик – п. Эльбрус, 2007 г.), на всероссийской научно-практической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.П. Пулькина "Интегративный характер современного математического образования" (г. Самара, 2007 г.), на международном Российско-Азербайджанском симпозиуме "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики" (г. Нальчик – п. Эльбрус, 2008 г.), на международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и и смежные проблемы" (г. Стерлитамак, 2008 г.), на XII международной научной конференции им. академика М. Кравчука (г. Киев, 2008 г.), на научном семинаре кафедры "Дифференциальные уравнения" Казанского государственного университета в 2009 году (руководитель д. ф.-м. н., профессор В.И. Жегалов).

Публикации. По теме диссертации опубликованы 11 работ, список которых приведен в конце автореферата. Из совместных работ [3] и [11] в диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично диссертанту. О.А. Репину принадлежит постановка задач и идея доказательства, а автору диссертации — точные формулировки и доказательства утверждений.

Структура и объем работы. Диссертационная работа изложена на 120 страницах и состоит из введения, вводных сведений, двух глав, заключения и библиографического списка, содержащего 84 наименования, причем работы автора приведены в конце списка.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приведен краткий обзор литературы по теме диссертации, показана актуальность темы исследований, излагается краткое содержание работы и сформулированы основные результаты, которые выносятся на защиту.

Раздел **некоторые вводные сведения** содержит необходимые для исследований понятия и утверждения теории дробного исчисления и интегральных уравнений, в том числе определения дробных интегралов и производных с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре, введенные японским математиком М. Сайго:

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} F(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;1-\frac{t}{x}) f(t)dt, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha > 0), \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n} f)(x), (\alpha < 0, n = [-\alpha]+1). \end{cases}$$

$$(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x) = \begin{cases} \frac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^1 (t-x)^{\alpha-1} F(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;\frac{t-x}{1-x}) f(t)dt, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha > 0), \\ \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{1-}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n} f)(x), \\ \qquad\qquad (\alpha < 0, n = [-\alpha]+1), \end{cases}$$

где $\alpha, \beta, \eta \in \mathbb{R}$ и $0 < x < 1$.

Если $\beta = -\alpha$, то операторы сводятся к дробным интегралам и производным Римана-Лиувилля.

Первая глава посвящена изучению краевых задач для уравнения Геллерстедта

$$sign y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0. \qquad (1)$$

В **п. 1.1** поставлена и исследована нелокальная задача для уравнения (1) при $m > -1$ в смешанной области D , ограниченной при $y > 0$ гладкой кривой Γ с концами $A(0,0)$ и $B(1,0)$, а при $y \leq 0$ — характеристиками $AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$ и $BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$. Пусть $D_1 = D \cap (y > 0)$ — эллиптическая часть, а $D_2 = D \cap (y < 0)$ — гиперболическая часть области D , $\Theta_0(x) = \frac{x}{2} - i(x\frac{m+2}{4})^{\frac{2}{m+2}}$ — точка пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точек $(x,0)$, $0<x<1$, с характеристикой AC.

Единственность решения задачи для уравнения (1) в ограниченной области, которая будет сформулирована ниже при различных значениях m, доказывается на основе принципа экстремума А.В. Бицадзе, а существование решения сводится к разрешимости характеристического сингулярного интегрального уравнения на конечном отрезке при условии, что кривая Γ является "нормальной кривой": $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}=\frac{1}{4}$.

Определение 1. *Регулярным решением уравнения (1) в области* D_1 *назовем функцию* $u(x,y)$, *непрерывную в* $\overline{D_1}$ *и дважды непрерывно дифференцируемую в* D_1, *являющуюся решением этого уравнения.*

Определение 2. *Обобщенное решение уравнения (1) в области* D_2 *принадлежит классу* R_2, *если* $\nu_2(x)=u_y(x,-0)$ *непрерывна и интегрируема в* $(0,1)$ *и* $\tau(x)=u(x,0)$ *есть интеграл дробного порядка* $1-2\beta$ *от некоторой функции* $T(x)$, *непрерывной и интегрируемой на интервале* $(0,1)$, *то есть*
$\tau(x)=\tau(0)+\int_0^x(x-t)^{-2\beta}T(t)\,dt, -1<2\beta<0.$

Задача 1.1 (-1<m<0). Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:
1) $u(x,y)\in C\left(\overline{D}\right)$;
2) $u(x,y)$ — регулярное решение уравнения (1) в области D_1;
3) $u(x,y)$ — обобщенное решение класса R_2 уравнения (1) в области D_2;
4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_\Gamma=\varphi(x,y),\qquad (x,y)\in\Gamma,$$

$$A\left(I_{0+}^{a,b,-(a+1-\beta)}u[\Theta_0(t)]\right)(x)+$$

$$+B\left(I_{0+}^{1+a-\beta,b+2\beta-1,-(a+1-\beta)}u_y(t,0)\right)(x)=\psi(x)\qquad \forall x\in J$$

и условию сопряжения

$$u_y(x,-0)=-u_y(x,+0)\qquad \forall x\in J,$$

где $(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x)$ — обобщенный оператор дробного интегродифференцирования в смысле М. Сайго.

Теорема 1.2. *Пусть*
1) кривая Γ совпадает с "нормальной кривой":
$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}=\frac{1}{4}$;
2) $\varphi(x,y),\psi(x)\in C[0,1]$, *причем* $\varphi(x,y)=y^{1+\gamma}\overline{\varphi}(x)$,
$\overline{\varphi}(x)\in C[0,1],\gamma\geq 1+m,\ \ \psi(x)\in H^\lambda[0,1],0<a+1-\beta<\lambda\leq 1;$

3) $u_y(x,-0) = -u_y(x,+0) \quad \forall x \in J$;
4) $\beta = \frac{m}{2(m+2)}, \quad -\frac{1}{2} < \beta < 0, \quad 0 < b + 2\beta - 1 < 1, \quad AB < 0$.

Тогда задача 1.1 для уравнения (1) имеет и притом единственное решение.

Задача 1.2 (m=0). Найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$, являющуюся решением уравнения (1) в области D, удовлетворяющую краевым условиям

$$u(x,y)\,|_\Gamma = \varphi(x,y), \qquad (x,y) \in \Gamma,$$

$$A\left(I_{0+}^{a,b,c} u[\Theta_0(t)]\right)(x) + B\left(I_{0+}^{a+1,b-1,c} u_y(t,0)\right)(x) = \psi(x) \quad \forall x \in J.$$

Теорема 1.4. *Пусть*

1) *кривая* Γ *совпадает с "нормальной кривой":* $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$;
2) $\varphi(x) = x(1-x)\varphi_0(x)$, $\varphi_0(x) \in C(\overline{J})$;
3) $\psi(x) \in H^\lambda[0,1]$, $0 < a+1 < \lambda \leq 1$, $1 - b < min[0, a+c+2]$;
4) $u_y(x,0)$ *на концах интервала* J *может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы;*
5) $AB < 0$.

Тогда задача 1.2 имеет и притом единственное решение.

Задача 1.3 (m>0). Найти решение уравнения (1) в области D из класса $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,y)\,|_\Gamma = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma,$$

$$A\left(I_{0+}^{a,b,b+2\beta-1} u[\Theta_0(t)]\right)(x) +$$

$$+B\left(I_{0+}^{a-\beta+1,b+2\beta-1,b+\beta-1} u_y(t,0)\right)(x) = \psi(x) \quad \forall x \in J.$$

Теорема 1.6. *Пусть*

1) *кривая* Γ *совпадает с "нормальной кривой":*
$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = \frac{1}{4}$;
2) $\varphi(x,y) = y^2 \overline{\varphi}_1(x)$, $\quad \overline{\varphi}_1(x) \in C[0,1]$;
3) $\psi(x) \in H^\lambda[0,1]$, $a + \beta < \lambda \leq 1$;
4) $\beta = \frac{m}{2(m+2)}$, $-\beta < a < 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $b > max[0, a+b+2\beta]$, AB<0.

Тогда задача 1.3 для уравнения (1) имеет и притом единственное решение.

Содержание **п. 1.2** включает исследование двух задач для уравнения (1) при $m > 0$ в бесконечных областях.

Для доказательства единственности решения данных задач исследованы соответствующие однородные задачи, которые имеют только тривиальные решения. Существование решения задач сведено к разрешимости сингулярного интегрального уравнения.

Пусть $D = D_1 \cup D_2 \cup J$, D_1 — полуплоскость $y > 0$, D_2 — характеристический треугольник в полуплоскости $y < 0$, J — интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Задача 1.4. Найти решение $u(x, y)$ уравнения (1) в области D со свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup J_1 \cup J_2) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$, причем $u(\infty) = 0$, $u(0) = 0$ и $u_x(x, 0)$ при $x = 0$, $x = 1$ может обращаться в бесконечность порядка ниже 2β;

2) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, 0) = \varphi_i(x) \quad \forall x \in J_i, \qquad i = 1, 2,$$

$$A\left(I_{0+}^{a,b,b+2\beta-1} u[\Theta_0]\right)(x) +$$

$$+B\left(I_{0+}^{a-\beta+1,b+2\beta-1,b+\beta-1} u_y(t, 0)\right)(x) = \psi(x) \quad \forall x \in J,$$

где $J_1 = \{(x,y) : -\infty < x < 0, y = 0\}, J_2 = \{(x,y) : 1 < x < +\infty, y = 0\}$, $\Theta_0(x)$ — точка пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точек $(x, 0) \in J$, с характеристикой AC.

Теорема 1.8. *Пусть*

1) $u(\infty) = 0, u(0) = 0$, $u_x(x, 0)$ *при* $x = 0$, $x = 1$ *может обращаться в бесконечность порядка ниже* 2β;

2) $\varphi_i'(x) \in C(J_i), i = 1, 2$, *и могут обращаться в бесконечность порядка ниже* 2β *при* $x = 0, x = 1$ *соответственно, а при достаточно больших* $|x|$ *удовлетворяют неравенству*
$|\varphi_i(x)| \le M|x|^{-1-\sigma}, \qquad M, \sigma > 0;$

3) $\psi(x) \in H^\lambda(\overline{J}), 0 < a - \beta + 1 < \lambda \le 1$;

4) $\beta = \frac{m}{2m+4}, |a| < \beta, 1 - 2\beta < b \le 2 - 2\beta, AB < 0.$

Тогда задача 1.4 для уравнения (1) имеет и притом единственное решение.

В постановке следующей задачи меняется область эллиптичности. Область D теперь ограничена полупрямыми $x = 0, x = 1$ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$, расположенными в полуплоскости $y > 0$ и характеристиками AC и BC уравнения (1) в области гиперболичности.

Задача 1.5. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области D из класса $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$ со свойствами:

1) $\lim\limits_{y \to +\infty} u(x, y) = 0$ равномерно по $x \in \overline{J}$;

2) удовлетворяет краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), u(1, y) = \varphi_2(y)\,(y \ge 0),$$

$$A_1\left(I_{0+}^{a,b,\beta-1-a}u[\Theta_0(t)]\right)(x)+$$

$$+A_2\left(I_{0+}^{a+\beta,b,\beta-1-a}u(t,0)\right)(x)=\psi(x)\,\forall x\in J.$$

Теорема 1.9. *Пусть*
1) $\varphi_1(y),\varphi_2(y)\in C[0,+\infty)$, $y^{\frac{3m}{4}}\varphi_1(y), y^{\frac{3m}{4}}\varphi_2(y)\in L(0,+\infty)$;
2) $\psi(x)\in H^\lambda[0,1]$;
3) $\beta=\frac{m}{2m+4}, 0<\beta<\frac{1}{2}, |a|<\beta, b>\lambda-a-\beta, 1+a-\beta<\lambda<1, A_1A_2>0$.

Тогда решение задачи 1.5 существует и оно единственно.

В п. 1.3 рассматривается гиперболическое уравнение Геллерстедта

$$|y|^l u_{xx}-u_{yy}=0, \tag{2}$$

где $l=m>0$ при $y<0$ и $l=n>0$ при $y>0$ (отдельно исследован случай $m=n$) в конечной области D, ограниченной характеристиками уравнения (2) $AC_1: x-\frac{2}{n+2}y^{\frac{n+2}{2}}=0$, $BC_1: x+\frac{2}{n+2}y^{\frac{n+2}{2}}=1$, $AC_2: x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0$, $BC_2: x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1$. Пусть $D_1=D\cap\{(x,y):y>0\}$, $D_2=D\cap\{(x,y):y<0\}$, $\Theta_0^{(1)}(x)$ и $\Theta_1^{(2)}(x)$ — точки пересечения характеристик уравнения (2), выходящих из точек $(x,0)\in J$, с характеристиками AC_2 и BC_1 соответственно.

Задача 1.6. Найти решение уравнения (2) в области D из класса $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D_1\cup D_2)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$A_1\left(I_{0+}^{a,b,\beta-1-a}u[\Theta_0^1(t)]\right)(x)+$$

$$+A_2\left(I_{0+}^{a-\beta+1,b+2\beta-1,\beta-a-1}u_y(t,-0)\right)(x)=\varphi_1(x)\quad\forall x\in J,$$

$$B_1\left(I_{1-}^{a_1,b_1,\beta_1-1-a_1}u[\Theta_1^{(2)}(t)]\right)(x)+$$

$$+B_2\left(I_{1-}^{a_1-\beta_1+1,b_1+2\beta_1-1,\beta_1-a_1-1}u_y(t,+0)\right)(x)=\varphi_2(x)\quad\forall x\in J$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to0-0}u_y(x,y)=\lim_{y\to0+0}u_y(x,y)\quad\forall x\in J.$$

Единственность решения задачи 1.6 доказывается на основе принципа экстремума для гиперболических уравнений и свойств дробных производных. Существование решения задачи сводится к разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого в заданном классе следует из единственности решения задачи.

Теорема 1.10 *Пусть*

1) $\beta = \frac{m}{2m+4}$, $-\beta < a < 1-\beta$, $b > 1$,
$\beta_1 = \frac{n}{2n+4}$, $-\beta_1 < a_1 < 1-\beta_1$, $b_1 > 1$;
2) $\varphi_1(x) \in H^{\lambda_1}(\overline{J})$, $0 < a+\beta < \lambda_1 \le 1$,
$\varphi_2(x) \in H^{\lambda_2}(\overline{J})$, $0 < a_1+\beta_1 < \lambda_2 \le 1$;
3) $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $B_1 B_2 > 0$.

Тогда решение задачи 1.6 существует и единственно.

Во **второй главе** доказаны существование и единственность решения нелокальных краевых задач для уравнения Бицадзе–Лыкова

$$y^2 u_{xx} - u_{yy} + \alpha u_x = 0. \tag{3}$$

В **п. 2.1** включены исследования задачи, краевые условия которой содержат обобщенные операторы дробного интегродифференцирования с внешними и внутренними множителями степенного характера, для уравнения (3) при $|\alpha| \le 1$ в конечной области D, ограниченной интервалом $J = (0,1)$ прямой $y = 0$ и характеристиками уравнения (3) $AC : x - \frac{y^2}{2} = 0$ и $BC : x + \frac{y^2}{2} = 1$, где $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(\frac{1}{2}, -1)$.

Обозначим $W(J)$ множество функций $u(x,y)$ таких, что $\lim\limits_{y\to -0}[a(x,y)u_y + b(x,y)u] \in C(\overline{J})$, где $a(x,y)$ и $b(x,y)$ — заданные функции требуемой гладкости, причем предполагается существование пределов $a(x,y)$, $b(x,y)$ при $y \to -0$.

Задача 2.1. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (3) в области D при $|\alpha| < 1$ из класса $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D) \cap W(J)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{y\to -0}[a(x,y)u_y + b(x,y)u] = c(x) \quad \forall x \in \overline{J},$$

$$A_1 x^{q+\frac{1}{2}} \left(I_{0+}^{p,q,\frac{\alpha-1}{4}-p} t^{-\frac{1}{2}} u[\Theta_0(t)]\right)(x) =$$

$$= A_2 \left(I_{0+}^{p+\frac{1-\alpha}{4},0,\frac{\alpha-3}{4}-h}[\beta(t)u(t,-0)]\right)(x) + \gamma_1(x) \quad \forall x \in J,$$

$h = p + q$, $\Theta_0(x)$ — точка пересечения характеристик уравнения (3), выходящих из точек $(x,0) \in J$, с характеристикой AC.

Вопрос однозначной разрешимости задачи 2.1 эквивалентно сводится к разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Теорема 2.1. *Пусть*

1) $\gamma_1(x) \in H^{\lambda_1}(\overline{J}) \cap C^2(J)$, $0 < \lambda_1 < \dfrac{3+\alpha}{4} - p$;
2) $a(x,0)$, $b(x,0)$, $\beta(x) \in C^1(\overline{J}) \cap C^2(J)$, $a(x,0) \ne 0$, $\beta(x) \ne 0$ $\forall x \in \overline{J}$;
3) $c(x) \in H_0^{\lambda}(\overline{J}) \cap C^2(J)$, $0 < \lambda < \frac{1}{2}$;
4) $\frac{\alpha-1}{4} < p < \frac{3+\alpha}{4}$, $q < \frac{1}{2}$, $A_1 A_2 \ne 0$.

Тогда задача 2.1 имеет единственное решение.

Исследование исключительных случаев ($\alpha = \pm 1$) приводится в **п. 2.1.3**, где доказывается однозначная разрешимость задач 2.2 и 2.3.

Для **задачи 2.2** ($\alpha = 1$), краевые условия которой имеют вид

$$\lim_{y\to -0}[a(x,y)u_y(x,y) + b(x,y)u(x,y)] = c(x) \quad \forall x \in \overline{J},$$

$$A_1\left(I_{0+}^{p} u\left[\Theta_0(t)\right]\right)(x) = A_2\left(I_{0+}^{p}\beta(t)u(t,-0)\right)(x) + \gamma_2(x) \quad \forall x \in J,$$

доказана теорема существования и единственности решения.

Теорема 2.2. *Пусть*

1) $a(x,0)$, $b(x,0)$, $\beta(x) \in C^1(\overline{J}) \cap C^2(J)$, $a(x,0) \neq 0$, $\beta(x) \neq 0$ $\forall x \in \overline{J}$;
2) $c(x) \in H_0^{\lambda}(\overline{J}) \cap C^2(J)$, $0 < \lambda < \frac{1}{2}$;
3) $\gamma_2(x) \in H_0^{\lambda_2}[0,1]$, $0 < p < \lambda_2 < 1$;
4) $A_1 A_2 \neq 0$.

Тогда задача 2.2 однозначно разрешима.

Краевые условия **задачи 2.3** ($\alpha = -1$) содержат оператор с другими параметрами

$$\lim_{y\to -0}[a(x,y)u_y(x,y) + b(x,y)u(x,y)] = c(x) \quad \forall x \in \overline{J},$$

$$A_1 x^{q-\frac{1}{2}}\left(I_{0+}^{p,q,-1-p} u\left[\Theta_0(t)\right]\right)(x) =$$

$$= A_2\left(I_{0+}^{1+p,0,-(p+q+\frac{1}{2})}\beta(t)u(t,-0)\right)(x) + \gamma_3(x) \quad \forall x \in J.$$

Теорема 2.3. *Пусть*

1) $a(x,0)$, $b(x,0)$, $\beta(x) \in C^1(\overline{J}) \cap C^2(J)$, $a(x,0) \neq 0$, $\beta(x) \neq 0 \forall x \in \overline{J}$;
2) $c(x)$, $\gamma_3(x) \in H_0^{\lambda_3}(\overline{J})$, $c(0) = 0$, $\gamma_3(0) = 0$,
$0 < 1 + p < \lambda_3 \leq 1$, $-1 < p < 0$, $q < \frac{3}{2}$;
3) $A_1 A_2 \neq 0$.

Тогда задача 2.3 однозначно разрешима.

П. 2.2 посвящен обоснованию существования и единственности решения двух задач для уравнения (3) при $|\alpha| < 1$, постановки которых содержат два краевых условия с операторами дробного интегродифференцирования с различными началами, в области $D = D_1 \cup J \cup D_2$, ограниченной характеристиками $AC_1 : x - \frac{y^2}{2} = 0$, $BC_1 : x + \frac{y^2}{2} = 1$, $AC_2 : x - \frac{y^2}{2} = 0$, $BC_2 : x + \frac{y^2}{2} = 1$, где $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C_1(\frac{1}{2},1)$, $C_2(\frac{1}{2},-1)$, $D_1 = D \cap (y > 0)$, $D_2 = D \cap (y < 0)$.

Единственность решения задач 2.4 и 2.5 доказывается на основании принципа экстремума для гиперболических уравнений и свойств дробных производных, а существование решения сводится к разрешимости характеристического сингулярного интегрального уравнения на конечном отрезке.

Задача 2.4. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (3) при $|\alpha| < 1$ в области D из класса $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D \backslash J)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$A_1 \left(I_{0+}^{a, \frac{\alpha-1}{4}-a, \frac{\alpha-3}{4}-a} u[\Theta_0^{(1)}(t)] \right)(x) +$$

$$+ A_2 \left(I_{0+}^{\frac{3-\alpha}{4}+a} u_y(t,-0) \right)(x) = g_1(x) \quad \forall x \in J,$$

$$B_1 \left(I_{1-}^{a, -(a+\frac{\alpha+1}{4}), -(a+\frac{\alpha+3}{4})} u[\Theta_1^{(2)}(t)] \right)(x) +$$

$$+ B_2 \left(I_{1-}^{a+\frac{\alpha+3}{4}} u_y(t,+0) \right)(x) = g_2(x) \quad \forall x \in J$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y \to -0} u_y(x,y) = \lim_{y \to +0} u_y(x,y) \quad \forall x \in J.$$

Теорема 2.5. *Пусть*

1) $A_1 A_2 > 0, B_1 B_2 > 0, \frac{3+|\alpha|}{4} + a > 0, 0 < \frac{1-|\alpha|}{4} + a < 1,$
$\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{3+\alpha}{4})} - \frac{A_2}{A_1} > 0, \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{3-\alpha}{4})} + \frac{B_2}{B_1} > 0;$

2) $g_i(x) \in C^{(1,\lambda_i)}(\overline{J}) \cap C^2(J)$, $i = 1,2$, $\frac{1}{2} < \lambda_i \leq 1$, $g_1(0) = g_2(1) = 0$;

3) $\lim_{y \to -0} u_y(x,y) \in H^\lambda \left(x^{\frac{1}{2}}; [0,1] \right)$, $0 < \lambda < 1$.

Тогда задача 2.4 имеет единственное решение.

Далее рассматривается задача 2.5, которая отличается от задачи 2.4 тем, что в краевых условиях еще дополнительно присутствуют множители степенного характера.

Задача 2.5. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (3) в области D из класса $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D \backslash J)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$A_1 x^{-a+\frac{1+\alpha}{4}} \left(I_{0+}^{a, -a-\frac{1-\alpha}{4}, -a-\frac{1-\alpha}{4}} \left(t^{-\frac{1}{2}} u[\theta_0^{(1)}] \right) \right)(x) +$$

$$+ A_2 x^{-a+\frac{1+\alpha}{4}} \left(I_{0+}^{a+\frac{3-\alpha}{4}, -a-\frac{1-\alpha}{4}, -a-\frac{1-\alpha}{4}} u_y \right)(x) = \widetilde{g}_1(x) \quad \forall x \in J,$$

$$B_1 (1-x)^{-b+\frac{1-\alpha}{4}} \left(I_{1-}^{b, -b-\frac{1+\alpha}{4}, -b-\frac{1+\alpha}{4}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} u[\theta_1^{(2)}] \right)(x) +$$

$$+ B_2 (1-x)^{-b+\frac{1-\alpha}{4}} \left(I_{1-}^{b+\frac{3+\alpha}{4}, -b-\frac{1+\alpha}{4}, -b-\frac{1+\alpha}{4}} u_y \right)(x) = \widetilde{g}_2(x) \quad \forall x \in J$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y \to -0} u_y(x,y) = \lim_{y \to +0} u_y(x,y) \quad \forall x \in J.$$

Теорема 2.7. *Пусть*

1) $\widetilde{g}_1(x) = (I_{0+}^{\delta_1,\delta_2,-\frac{1}{2}} g_1(t))(x),\ g_1(x) \in H^{\lambda_1}[0,1],\ \frac{1}{2} < \lambda_1 \leq 1,$

$\widetilde{g}_2(x) = (I_{1-}^{\gamma_1,\gamma_2,-\frac{1}{2}} g_2(t))(x),\ g_2(x) \in H^{\lambda_2}[0,1],\ \frac{1}{2} < \lambda_2 \leq 1;$

2) $0 < a + \frac{1-\alpha}{4} < \delta_1,\ \delta_2 < 0,\ 0 < b + \frac{1+\alpha}{4} < \gamma_1,\ \gamma_2 < 0;$

3) $A_1 A_2 < 0,\ B_1 B_2 > 0.$

Тогда задача 2.5 имеет единственное решение.

Заключение. Выполненные в настоящей диссертационной работе исследования позволяют сформулировать следующие достигнутые результаты.

1. Доказаны теоремы существования и единственности решений нелокальных задач для уравнения смешанного типа с вырождением первого и второго рода и уравнения Лаврентьева–Бицадзе.

2. Доказана однозначная разрешимость обобщенной задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта в областях, эллиптические части которых — полуплоскость и бесконечная полуполоса.

3. Исследована нелокальная краевая задача для гиперболического уравнения в области, ограниченной характеристиками уравнения. Доказана однозначная разрешимость задачи.

4. Доказаны теоремы существования и единственности решений краевых задач со смещением для уравнения Бицадзе–Лыкова (уравнения влагопереноса) с различными значениями коэффициентов при младших производных.

Методы и результаты работы могут быть использованы в теоретических исследованиях в таких математических дисциплинах, как дробное исчисление, дифференциальные и интегральные уравнения, при решении краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, а также при исследовании конкретных задач математической физики.

Автор диссертации выражает глубокую благодарность научному руководителю — профессору, доктору физико-математических наук Олегу Александровичу Репину за постановку задач, ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

Научные статьи в изданиях перечня, рекомендуемого ВАК

1. Кузнецова, И. А. О разрешимости краевой задачи для уравнения Геллерстедта / И.А. Кузнецова // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. №6(65). – 2008. – С. 105–111.

2. Кузнецова, И. А. Краевая задача для уравнения Геллерстедта с операторами М. Сайго на характеристиках / И.А. Кузнецова // Вестник Самарск. гос. тех. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. №43 / Самарск. гос. тех. ун-т. – Самара, 2006. – С. 19–24.

Научные статьи в других изданиях

3. Репин, О. А. О некоторых краевых задачах для уравнения Бицадзе-Лыкова / О.А. Репин, И.А. Кузнецова // Современные методы физико-математических наук: Тр. международной конференции (9–14 окт. 2006 г., Орел). – Т. 1. / Орел: Изд-во ОГУ, 2006. – С. 100–104.

4. Кузнецова, И. А. О разрешимости краевой задачи для уравнения гиперболического типа с операторами М. Сайго на характеристиках / И.А. Кузнецова // Дифференц. уравнения, теория функций и приложения : тез. докладов междунар. конф. (Новосибирск, 28 мая–2 июня 2007 г.) / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2007. – С. 212–213.

5. Кузнецова, И. А. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с вырождением второго порядка / Математическое моделирование и краевые задачи : Тр. IV Всерос. научн. конф. с междунар. участием (29–31 мая 2007 г.) Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / СамГТУ. – Самара, 2007. – С. 114–117.

6. Кузнецова, И. А. Краевая задача со смещением для уравнения Лаврентьева–Бицадзе / И.А. Кузнецова // Интегративный характер современного математического образования : материалы Всерос. научн.-практ. конф. (Самара, 24–27 сент. 2007 г.). Ч. 1. / Самарск. гос. пед. ун-т. – Самара, 2007. – С. 52–57.

7. Кузнецова, И. А. О разрешимости нелокальной краевой задачи для уравнения влагопереноса / И.А. Кузнецова // Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики : Материалы V Школы молодых ученых / Нальчик – Эльбрус, 2007. – С. 82–84.

8. Кузнецова, И. А. Задача со смещением для уравнения смешанного типа / И.А. Кузнецова // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии наук. – 2007. – Т. 9, №2. – С. 44–48.

9. Кузнецова, И. А. Краевая задача для вырождающегося гиперболического уравнения влагопереноса / И.А. Кузнецова // Материалы Международного Российско-Азербайджанского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики" и VI Школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". – Нальчик – Эльбрус, 2008. – С. 98–99.

10. Кузнецова, И. А. О разрешимости в явном виде одной нелокальной задачи / И.А. Кузнецова // Материалы междунар. научной конфе-

ренции им. М. Кравчука (Киев, 15–17 мая 2008 г.). - К.: ТОВ "Задруга", 2008. – С. 222.

11. Кузнецова, И. А. Об обобщенной задаче Трикоми / И.А. Кузнецова, О.А. Репин // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы : Тр. междунар. конференции (24–28 июня 2008 г., г. Стерлитамак) / Уфа : Гилем, 2008. – Т. III. – С. 226–230.

Подписано в печать 13.02.09.
Тираж 100 экз. Заказ № 139.
Бумага ксероксная. Печать оперативная.
Объем – 1,0 усл. п. л. Формат 60 x 84/16

Отпечатано в типографии
ООО «Инсома-пресс»
ул. Сов. Армии, 217; тел.: 926-07-51