На правах рукописи

РОДИОНОВА Ирина Анатольевна

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ЭКРАНИРОВАННЫХ СЛОЯХ, СВЯЗАННЫХ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЕ

Специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Родио

КАЗАНЬ 2009

Работа выполнена на кафедре математики и суперкомпьютерного моделирования Пензенского государственного университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор ***Смирнов Юрий Геннадьевич***
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор ***Самохин Александр Борисович***;
	доктор физико-математических наук, доцент ***Карчевский Евгений Михайлович***
Ведущая организация:	Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва

Защита диссертации состоится 17 сентября 2009 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете им. В. И. Ульянова-Ленина по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина.

Автореферат разослан 16 августа 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент Е. К. Липачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена аналитическому и численному исследованию векторной задачи дифракции электромагнитной волны в экранированных слоях, связанных через отверстие. Это задача дифракции электромагнитного поля на ограниченном отверстии в идеально проводящей бесконечно тонкой плоскости, расположенной между двух идеально проводящих бесконечно тонких плоскостей, причем электродинамические параметры сред между плоскостями могут быть различны.

Актуальность темы

Изучение задачи дифракции электромагнитной волны в экранированных слоях, связанных через отверстие, является актуальным в связи с тем, что она находит широкое применение в электродинамике.

Кроме того, она представляет и самостоятельный математический интерес, поскольку общие методы исследования нелинейных задач на собственные значения в неограниченных областях недостаточно разработаны. Таким образом, прогресс в аналитическом исследовании подобных задач важен и с теоретической, и с практической точек зрения.

Разработка численных методов для решения задач этого класса также является актуальной. Результаты аналитического исследования могут существенно помочь при разработке численных методов.

Данное направление было и является предметом исследования многих авторов (P. Werner, Ю. Г. Смирнов, А. С. Ильинский, Ю. В. Шестопалов).

Цели и задачи исследования

Целями исследования являются:

– исследование векторной краевой задачи для системы уравнений Максвелла о дифракции электромагнитной волны в экранированных слоях, связанных через отверстие;

– исследование свойств оператор-функции задачи и доказательство теоремы единственности для случая, когда одна из сред имеет поглощение;

– исследование спектра задачи в случае сред без поглощения;

– сведение краевых задач дифракции для уравнений Гельмгольца к интегродифференциальным (псевдодифференциальным) уравнениям; доказательство теорем о разрешимости этих уравнений в пространствах Соболева; доказательство теоремы эквивалентности краевых задач интегральным уравнениям;

– обоснование и реализация численного метода Галеркина для решения слабосингулярного интегрального уравнения в прямоугольнике.

Научная новизна

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

– векторная краевая задача для системы уравнений Максвелла о дифракции электромагнитной волны в экранированных слоях, связанных через отверстие, сведена к двум скалярным задачам для уравнения Гельмгольца;

– доказана теорема единственности для случая, когда одна из сред имеет поглощение;

– установлена голоморфность и фредгольмовость оператор-функции задачи и доказана дискретность спектра задачи в случае сред без поглощения;

– краевые задачи дифракции для уравнений Гельмгольца сведены к интегродифференциальным (псевдодифференциальным) уравнениям; доказаны теоремы о разрешимости этих уравнений в пространствах Соболева, доказаны теоремы эквивалентности краевых задач интегральным уравнениям;

– применен, обоснован и реализован численный метод Галеркина для решения слабосингулярного интегрального уравнения в прямоугольнике; представлены результаты численных расчетов.

Практическая значимость

Полученные в диссертации результаты о свойствах и распределении спектра представляют интерес при моделировании устройств в электронике и радиотехнике.

Большое практическое значение в представленной работе имеет сведение краевых задач к интегральному и интегродифференциальному уравнениям на отверстии, которые могут быть эффективно решены численными методами.

Реализация и внедрение полученных результатов

Результаты, полученные в диссертации, включены в отчеты НИР и грантов, выполненных на кафедре математики и суперкомпьютерного моделирования ПГУ: РФФИ 06-07-89063а.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались на научных конференциях и семинарах:

– XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ (Москва, 2006);

– X Международной научно-методической конференции «Университетское образование» (Пенза, 2006);

– научном семинаре кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования Пензенского государственного университета (2009);

– научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина (2009).

Публикации

По материалам диссертации опубликовано 10 печатных работ, список которых приведен в конце автореферата, одна статья в журнале из списка рекомендованных ВАК РФ.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка литературы, содержащего 91 наименование. Работа изложена на 100 страницах машинописного текста, содержит 7 графиков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится обзор работ по теме диссертации и вопросам, примыкающим к ней; обосновывается актуальность темы, формулируется цель работы, излагаются краткое содержание и основные результаты работы.

Первая глава посвящена постановке задачи дифракции в экранированных слоях, связанных через отверстие, и сведению векторной задачи для системы уравнений Максвелла к двум скалярным задачам для уравнения Гельмгольца.

Рассмотрим задачу дифракции стороннего монохроматического электромагнитного поля $\mathbf{E}^0 = \left(E_1^0, E_2^0, E_3^0\right)$, $\mathbf{H}^0 = \left(H_1^0, H_2^0, H_3^0\right)$ в экранированных слоях, связанных через отверстие.

Пусть $U^+ = \left\{x = \left(x_1, x_2, x_3\right) : 0 < x_3 < 1\right\}$ и $U^- = \left\{x = \left(x_1, x_2, x_3\right) : -1 < x_3 < 0\right\}$ – слои, сформированные тремя идеально проводящими и бесконечно тонкими параллельными плоскостями; отверстие $\Omega \subset R^2 = \left\{x_3 = 0\right\} \subset R^3$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, состоящей из конечного числа простых дуг класса C^∞, сходящихся под углами, отличными от нулевого (рис. 1).

Будем решать задачу дифракции в области $U^* = U^+ \cup U^- \cup \Omega$.

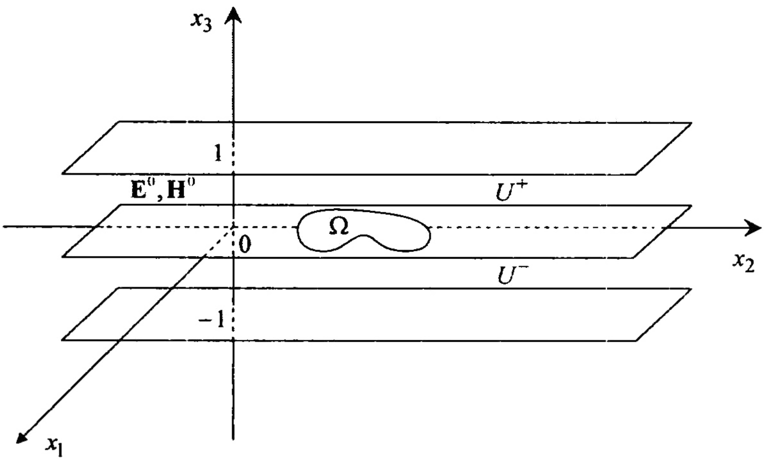

Рис. 1

Предполагается, что падающее поле $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ является решением системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^0 = -i\omega\varepsilon \mathbf{E}^0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^0 = i\omega\mu \mathbf{H}^0, \quad x \in U^+$$

в слое U^+ без отверстия с краевым условием

$$E_\tau^0\Big|_{x_3=0} = E_\tau^0\Big|_{x_3=1} = 0$$

и создается источниками, расположенными вне $\bar{\Omega}$, поэтому

$$H_\tau^0\Big|_\Omega \in C^\infty\left(\bar{\Omega}\right).$$

Поле $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ в слое U^- тождественно равно нулю.

Будем считать, что среды в U^+ и U^- имеют постоянные электромагнитные параметры $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\mu = \mu_1$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$, $\mu = \mu_2$ соответственно, относительно которых предполагаем, что $\operatorname{Im} \varepsilon \ge 0$, $\operatorname{Re} \varepsilon_j > 0$, $\operatorname{Im} \mu_j \ge 0$, $\operatorname{Re} \mu_j > 0$, $k_j^2 = \varepsilon_j \mu_j \omega^2$, $\operatorname{Im} k_j \ge 0$ $\left(k_j \ne 0\right)$, где $\omega > 0$ – круговая частота.

Задача дифракции на отверстии Ω, соединяющем два параллельных слоя U^+ и U^-, состоит в определении рассеянного электромагнитного поля $\mathbf{E}, \mathbf{H}$:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^2(U) \bigcap_{\delta>0} C\left(\overline{U^+} \setminus \Gamma_\delta\right) \bigcap_{\delta>0} C\left(\overline{U^-} \setminus \Gamma_\delta\right), \tag{1.1}$$

где $U = U^+ \bigcup U^-$, $\Gamma_\delta := \left\{x : |x - y| < \delta, y \in \Gamma = \partial\Omega\right\}$, удовлетворяющего однородным уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \;\; x \in U, \tag{1.2}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\mu = \mu_1$ в U^+ и $\varepsilon = \varepsilon_2$, $\mu = \mu_2$ в U^-; краевым условиям

$$E_\tau\big|_\Sigma = 0 \tag{1.3}$$

для касательных к поверхности идеального проводника $\Sigma = \Sigma_0 \bigcup \Sigma_+ \bigcup \Sigma_-$ составляющих электрического поля, где

$$\Sigma_0 = \left\{x : x_3 = 0, x \in R^2 \setminus \bar{\Omega}\right\}, \; \Sigma_\pm := \left\{x : x_3 = \pm 1\right\};$$

условиям сопряжения на границе раздела сред

$$\left[E_\tau\right]_\Omega = 0, \tag{1.4}$$

$$\left[H_\tau\right]_\Omega = -\left[H_\tau^0\right]_\Omega. \tag{1.5}$$

где $[f]_\Omega := \lim_{x_3\to+0} f - \lim_{x_3\to-0} f$, $x' = (x_1, x_2) \in \Omega$; условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L^2_{\mathrm{loc}}(U) \tag{1.6}$$

и условиям на бесконечности при $x \in U^-$ (при $x \in U^+$ аналогично):

– если $\operatorname{Im}\varepsilon_2 > 0$ или $\operatorname{Im}\mu_2 > 0$, то для компонент $u = H_1, H_2$ или E_3 и $v = E_1, E_2$ или H_3

$$u, v = o\left(\rho^{-1/2}\right), \quad \rho := |x'| \to \infty \tag{1.7}$$

равномерно по всем направлениям x'/ρ и по x_3;

– если $\operatorname{Im}\varepsilon_2 = 0$, $\operatorname{Im}\mu_2 = 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и $\mu_2 > 0$, то требуем, чтобы коэффициенты Фурье

$$u_n(x') = 2\int_{-1}^{0} u(x)\cos \pi n x_3 dx_3, \quad v_n(x') = 2\int_{-1}^{0} v(x)\sin \pi n x_3 dx_3, \quad n \ge 0 \tag{1.8}$$

для компонент $u = H_1, H_2$ или E_3 и $v = E_1, E_2$ или H_3 удовлетворяли условиям

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} - ik_n \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = o\left(\rho^{-1/2}\right), \ \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = O\left(\rho^{-1/2}\right), \ \rho \to \infty \tag{1.9}$$

при $k_n^2 := k^2 - \pi^2 n^2 > 0$ ($k_n > 0$, если $k > \pi n$ и $k_n < 0$, если $k < -\pi n$),

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = O(1), \ \rho \to \infty \tag{1.10}$$

при $k_n = 0$ и

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = o\left(\rho^{-1/2}\right), \begin{pmatrix} \partial u_n/\partial\rho \\ \partial v_n/\partial\rho \end{pmatrix} = o\left(\rho^{-1/2}\right), \ \rho \to \infty \tag{1.11}$$

при $\operatorname{Im} k_n > 0$ равномерно по всем направлениям x'/ρ и по n, $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ и $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$.

Определение 1.1. Решение задачи (1.1)–(1.11) будем называть квазиклассическим решением задачи дифракции в экранированных слоях, связанных через отверстие.

Для полного поля имеем $\mathbf{E}^{\text{полн}} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}$, $\mathbf{H}^{\text{полн}} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}$ в U^*.

Компоненты полей $f = H_1, H_2, H_3, E_1, E_2, E_3$ удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца с параметром k_j^2:

$$\Delta f + k_j^2 f = 0 , \tag{1.12}$$

где $x \in U^+$ при $j=1$, $x \in U^-$ при $j=2$.

При $\tilde{k}_{n,j}^2 \neq 0$ для всех n и j, где $\tilde{k}_{n,j}^2 = \omega^2 \varepsilon_j \mu_j - \pi^2 n^2$, векторная задача может быть сведена к двум скалярным. Компоненты H_1, H_2, E_1, E_2 выражаются через коэффициенты Фурье компонент H_3, E_3.

Из уравнений Максвелла (1.2) получаем, что для $u = E_3$

$$\Delta u + k_j^2 u = 0, \quad x \in U^+ (j=1), \quad x \in U^- (j=2), \tag{1.13}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|_{\Sigma_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|_{x_3=\pm 1} = 0, \tag{1.14}$$

$$[\varepsilon u]_\Omega = -[\varepsilon E_3^0]_\Omega, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x_3}\right]_\Omega = 0, \tag{1.15}$$

$$u \in C^2(U) \bigcap_{\delta>0} C^1\left(\overline{U^+} \setminus \Gamma_\delta\right) \bigcap_{\delta>0} C^1\left(\overline{U^-} \setminus \Gamma_\delta\right), \tag{1.16}$$

$$u \in H^1_{\text{loc}}(U) \tag{1.17}$$

со сформулированными выше условиями на бесконечности (1.7)–(1.11). Здесь $H^1_{\text{loc}}(U)$ – пространство Соболева.

Определение 1.2. Решение задачи (1.13)–(1.17) будем называть квазиклассическим решением задачи дифракции для компоненты $u = E_3$ в экранированных слоях, связанных через отверстие.

Аналогично для $v = H_3$ имеем краевую задачу:

$$\Delta v + k_j^2 v = 0, \quad x \in U^+ (j=1), \quad x \in U^- (j=2), \tag{1.18}$$

$$v|_{\Sigma_0} = v|_{x_3=\pm 1} = 0, \tag{1.19}$$

$$[\mu v]_\Omega = 0, \left[\frac{\partial v}{\partial x_3}\right]\Bigg|_\Omega = -\left[\frac{\partial H_3^0}{\partial x_3}\right]\Bigg|_\Omega, \tag{1.20}$$

$$v \in C^2(U) \bigcap_{\delta>0} C^1\left(\overline{U^+} \setminus \Gamma_\delta\right) \bigcap_{\delta>0} C^1\left(\overline{U^-} \setminus \Gamma_\delta\right), \tag{1.21}$$

$$v \in H^1_{\mathrm{loc}}(U) \tag{1.22}$$

со сформулированными выше условиями на бесконечности (1.7)–(1.11).

Определение 1.3. Решение задачи (1.18)–(1.22) будем называть квазиклассическим решением задачи дифракции для компоненты $v = H_3$ в экранированных слоях, связанных через отверстие.

Теорема 1.1. Пусть $\tilde{k}^2_{n,j} \neq 0$, где $n \geq 0, j = 1, 2$. Если u и v являются квазиклассическими решениями краевых задач (1.13)–(1.17) и (1.18)–(1.22), то **E** и **H** являются квазиклассическим решением задачи (1.1)–(1.11), компоненты полей выражаются через коэффициенты Фурье функций u и v. Обратно, если **E** и **H** являются квазиклассическим решением задачи (1.1)–(1.11), то u и v являются квазиклассическими решениями краевых задач (1.13)–(1.17) и (1.18)–(1.22).

Вторая глава посвящена изучению соответствующей однородной задачи, поскольку она может иметь нетривиальные решения при некоторых ω, что приведет к неоднозначной разрешимости исходной задачи дифракции.

Теорема 2.1. Однородная краевая задача при $\operatorname{Im} \varepsilon_j \geq 0$, $\operatorname{Re} \varepsilon_j > 0$, $\operatorname{Im} \mu_j \geq 0$, $\operatorname{Re} \mu_j > 0$, $\omega > 0$ и дополнительном условии $\operatorname{Im}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \mu_1 + \mu_2) > 0$ имеет только тривиальное решение.

Теорема 2.2. Однородная краевая скалярная задача для $u = E_3$ при $\operatorname{Im} \varepsilon_j \geq 0$, $\operatorname{Re} \varepsilon_j > 0$, $\operatorname{Im} \mu_j \geq 0$, $\operatorname{Re} \mu_j > 0$, $\omega > 0$ и дополнительном условии $\operatorname{Im}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \mu_1 + \mu_2) > 0$ имеет только тривиальное решение.

Теорема 2.3. Однородная краевая скалярная задача для $v = H_3$ при $\operatorname{Im} \varepsilon_j \geq 0$, $\operatorname{Re} \varepsilon_j > 0$, $\operatorname{Im} \mu_j \geq 0$, $\operatorname{Re} \mu_j > 0$, $\omega > 0$ и дополнительном условии $\operatorname{Im}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \mu_1 + \mu_2) > 0$ имеет только тривиальное решение.

Функция Грина $G_1(x, y)$ 1-го рода для уравнения Гельмгольца (1.12), где $\operatorname{Im} k \geq 0$ и $k \neq 0$, может быть представлена в одной из следующих форм:

$$G_1(x, y) = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sin \pi j x_3 \sin \pi j y_3 H_0^{(1)}\left(k_j |x' - y'|\right) \tag{2.1}$$

для $x' \neq y'$, где $x' := (x_1, x_2)$ и $y' := (y_1, y_2)$, или

$$G_1(x,y) = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\exp(ik|x-y-2je_3|)}{|x-y-2je_3|} - \frac{\exp(ik|x-y^*+2je_3|)}{|x-y^*+2je_3|}\right), \qquad (2.2)$$

где $e_3 = (0,0,1)$, $y^* = (y_1, y_2, -y_3)$, $H_0^{(1)}(z)$ – функция Ханкеля нулевого порядка первого рода. Формулы (2.1) и (2.2) имеют смысл при $\operatorname{Im} k \geq 0$ и $k \neq \pi n$, $n \in Z \setminus \{0\}$. Отметим, что функция Грина определена при $k = 0$.

Выделим особенность функции $G_1(x,y)$ при $|x-y| \to 0$ и $k \to \pi n$ ($n \in Z \setminus \{0\}$), пользуясь представлением (2.2). Имеем

$$G_1(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{1}{2\pi}\sin kx_3 \sin ky_3 \ln\left(1 - e^{2ik}\right) + A_1(x,y;k),$$

где $A_1(x,y;k)$ и производные по x и y зависят непрерывно от x, y и k в области $S \times \{k : \operatorname{Im} k \geq 0\}$, $S := \overline{U^-} \times \overline{U^-} \setminus \{(x,x) : x \in \partial U^-\}$.

Лемма 2.1. Пусть $k_0 \neq \pi n$, $n \in Z$ и $\operatorname{Im} k_0 = 0$. Тогда функция Грина $G_1(x,y) = G_1(x,y;k)$ при $x' \neq y'$ допускает аналитическое продолжение в область $C^- \cup B_\delta(k_0)$, где $B_\delta(k_0) := \{k : |k - k_0| < \delta\}$ для некоторого $\delta > 0$.

Лемма 2.2. Функция Грина $G_1(x,y) = G_1(x,y;k)$ аналитична по k на множестве $\overline{C^+} \setminus \{k : k = \pi n, n \in Z\}$.

Лемма 2.3. Функция Грина 1-го рода G_1 допускает представление

$$G_1(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x-y^*|}}{|x-y^*|} - \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x-y^*+2e_3|}}{|x-y^*+2e_3|} + V_1^U(x,y),$$

где $y^* = (y_1, y_2, -y_3)$ и $V_1^U(x,y) \in C^\infty(\bar{U} \times \bar{U})$.

Для функции Грина $G_2(x,y)$ 2-го рода для уравнения Гельмгольца (1.12), где $\operatorname{Im} k \geq 0$ и $k \neq 0$, верны следующие представления:

$$G_2(x,y) = \frac{i}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{1+\delta_{0j}}\cos \pi j x_3 \cos \pi j y_3 H_0^{(1)}\left(k_j |x'-y'|\right) \qquad (2.3)$$

для $x' \neq y'$, где $x' := (x_1, x_2)$ и $y' := (y_1, y_2)$, или

$$G_2(x,y)=\frac{1}{4\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{ik|x-y-2je_3|}}{|x-y-2je_3|}+\frac{e^{ik|x-y^*+2je_3|}}{|x-y^*+2je_3|}\right), \tag{2.4}$$

где $e_3=(0,0,1)$. Здесь $H_0^{(1)}(z)$ – функция Ханкеля нулевого порядка первого рода и δ_{ij} – символ Кронекера. Отметим, что функция Грина не определена при $k=0$. Формулы (2.3) и (2.4) имеют смысл при $\operatorname{Im}k\ge 0$ и $k\ne\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

Лемма 2.4. Пусть $k_0\ne\pi n$, $n\in Z$ и $\operatorname{Im}k_0=0$. Тогда функция Грина $G_2(x,y)=G_2(x,y;k)$ при $x'\ne y'$ допускает аналитическое продолжение в область $C^+\cup B_\delta(k_0)$, где $B_\delta(k_0):=\{k:|k-k_0|<\delta\}$ для некоторого $\delta>0$.

Лемма 2.5. Функция Грина $G_2(x,y)=G_2(x,y;k)$ аналитична по k на множестве $\overline{C^+}\setminus\{k:k=\pi n, n\in Z\}$.

Лемма 2.6. Функция Грина 2-го рода G_2 допускает представление

$$G_2(x,y)=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}+\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x-y^*|}}{|x-y^*|}+\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x-y^*+2e_3|}}{|x-y^*+2e_3|}+V_2^U(x,y),$$

где $y^*=(y_1,y_2,-y_3)$ и $V_2^U(x,y)\in C^\infty(\bar U\times\bar U)$.

Введем пространство распределений Соболева. Положим для любого $s\in R$

$$H^s(\Omega):=\left\{u|_\Omega:u\in H^s(R^2)\right\}\ \text{и}\ \tilde H^s(\bar\Omega):=\left\{u\in H^s(R^2):\operatorname{supp}u\subset\bar\Omega\right\}.$$

Обозначим через $\Lambda_j(U):=\{\omega:\varepsilon_j\mu_j\omega^2=\pi^2n^2, n\in\mathbb{Z}\}$, $j=1,2$ множество значений ω, при которых функции Грина $G_1^j(x,y)$, $G_2^j(x,y)$ не определены, $\Lambda(U)=\Lambda_1(U)\cup\Lambda_2(U)$. Будем рассматривать краевые задачи на собственные значения относительно спектрального параметра ω в области $R^+\setminus\Lambda(U)$, $R^+=\{\omega:\omega>0\}$.

Рассмотрим первую скалярную задачу. Представим решение в виде

$$u(x)=(-1)^j\int_\Omega G_2^j(x,y')\frac{\partial u}{\partial x_3}(y')ds_{y'}+\int_{S_R}\left(G_2^j(x,y)\frac{\partial u}{\partial\rho}(y)-\frac{\partial G_2^j}{\partial\rho}(x,y)u(y)\right)ds_y,$$

где $x \in U^+$ при $j=1$, $x \in U^-$ при $j=2$.

Обозначим $G_2^1 = G_2$ при $x \in U^+$, $G_2^2 = G_2$ при $x \in U^-$. Задача сводится к интегральному уравнению

$$A(\omega)\psi := \int_{\Omega} \left(\varepsilon_1 G_2^1(x', y') + \varepsilon_2 G_2^2(x', y')\right) \psi(y') dy' = 0, \ x' \in \Omega,$$

$$\psi(y') = \frac{du}{dx_3}(y')(y' \in \Omega).$$

Представим $A(\omega)$ в следующем виде:

$$A(\omega) \equiv \varepsilon_1 (L_1(\omega) - P_1(\omega) + B_1(\omega)) + \varepsilon_2 (L_2(\omega) - P_2(\omega) + B_2(\omega)),$$

где $L_j(\omega) = L(k_j)$, $P_j(\omega) = P(k_j)$, $B_j(\omega) = B(k_j)$ – интегральные операторы:

$$L(k_j)\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{e^{ik_j|x'-y'|}}{|x'-y'|} \psi(y') dy',$$

$$P(k_j)\psi = p(k_j) \int_{\Omega} \psi(y') dy', \ p(k_j) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(1 - e^{2ik_j}\right),$$

$$B(k_j)\psi = \int_{\Omega} b(x', y'; k_j) \psi(y') dy'.$$

Примем обозначения $L(\omega) \equiv \varepsilon_1 L_1(\omega) + \varepsilon_2 L_2(\omega)$, $P(\omega) \equiv \varepsilon_1 P_1(\omega) + \varepsilon_2 P_2(\omega)$, $B(\omega) \equiv \varepsilon_1 B_1(\omega) + \varepsilon_2 B_2(\omega)$.

Теорема 2.4. $L(\omega) : \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \to H^{1/2}(\Omega)$ является фредгольмовым оператором. $B(\omega) : \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \to H^{1/2}(\Omega)$ – компактный оператор для всех $\omega \in R_+$. Оператор $A(\omega) : \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \to H^{1/2}(\Omega)$ фредгольмов для всех $\omega \in R_+$ таких, что $\omega \notin \Lambda(U)$.

Теорема 2.5. Пусть $\operatorname{Re} \varepsilon_j > 0$, $\operatorname{Im} \varepsilon_j \geq 0$, $\operatorname{Re} \mu_j > 0$, $\operatorname{Im} \mu_j \geq 0$. Спектр оператор-функции $A(\omega)$ при $\omega \in R^+ \setminus \Lambda(U)$ представляет собой дискретное множество изолированных характеристических чисел конечной алгебраической кратности.

Рассмотрим вторую скалярную задачу.

Представим решение в виде

$$v(x)=(-1)^{j+1}\frac{1}{\mu_j}\int\limits_{\Omega}\left.\frac{\partial G_1^j(x,y')}{\partial y_3}\right|_{y_3=0}\mu v(y')dy' +$$

$$+\int\limits_{S_R}\left(G_1^j(x,y)\frac{\partial v}{\partial \rho}(y)-\frac{\partial G_1^j}{\partial \rho}(x,y)v(y)\right)ds_y,$$

где $x\in U^+$ при $j=1$, $x\in U^-$ при $j=2$.

Обозначим $G_1^1=G_1$ при $x\in U^+$, $G_1^2=G_1$ при $x\in U^-$. Задача сводится к интегродифференциальному уравнению

$$D(\omega)\phi:=\left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_{x_3=0}\int\limits_{\Omega}\left.\frac{\partial}{\partial y_3}\right|_{y_3=0}\left(\mu_1^{-1}G_1^1(x,y)+\mu_2^{-1}G_1^2(x,y)\right)\phi(y')dy'=0,\ x'\in\Omega,$$

$$\phi(y')=\mu v(y')\,(y'\in\Omega).$$

Представим $D(\omega)$ в следующем виде:

$$D(\omega)=\mu_1^{-1}\left(H_1(\omega)-Q_1(\omega)+C_1(\omega)\right)+\mu_2^{-1}\left(H_2(\omega)-Q_2(\omega)+C_2(\omega)\right),$$

где $H_j(\omega)=H(k_j)$, $Q_j(\omega)=Q(k_j)$, $C_j(\omega)=C(k_j)$ – интегральные операторы:

$$H(k_j)\phi=\frac{1}{2\pi}\left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_{x_3=0}\int\limits_{\Omega}\left.\frac{\partial}{\partial y_3}\right|_{y_3=0}\frac{e^{ik_j|x-y|}}{|x-y|}\phi(y')dy',$$

$$Q(k_j)\phi=q(k_j)\int\limits_{\Omega}\phi(y')dy',\ q(x'-y')=\frac{1}{2p}k_j^2\ln(1-e^{2ik_j}),$$

$$C(k_j)\phi=\int\limits_{\Omega}c(x',y';k_j)\phi(y')dy'.$$

Примем обозначения $H(\omega)=\mu_1^{-1}H_1(\omega)+\mu_2^{-1}H_2(\omega)$, $Q(\omega)=\mu_1^{-1}Q_1(\omega)+$ $+\mu_2^{-1}Q_2(\omega)$, $C(\omega)=\mu_1^{-1}C_1(\omega)+\mu_2^{-1}C_2(\omega)$.

Теорема 2.6. $H(\omega):\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega})\to H^{-1/2}(\Omega)$ является фредгольмовым оператором. $C(\omega):\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega})\to H^{-1/2}(\Omega)$ – компактный оператор для всех

$\omega \in R_+$. Оператор $D(\omega): \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}) \to H^{-1/2}(\Omega)$ фредгольмов для всех $\omega \in R_+$ таких, что $\omega \notin \Lambda(U)$.

Теорема 2.7. Пусть $\operatorname{Re} \varepsilon_j > 0$, $\operatorname{Im} \varepsilon_j \geq 0$, $\operatorname{Re} \mu_j > 0$, $\operatorname{Im} \mu_j \geq 0$. Спектр оператор-функции $D(\omega)$ при $\omega \in R^+ \setminus \Lambda(U)$ представляет собой дискретное множество изолированных характеристических чисел конечной алгебраической кратности.

В **третьей главе** рассматривается задача дифракции на отверстии. Осуществляется сведение краевых задач дифракции к интегральному или интегродифференциальному уравнению и исследуется вопрос разрешимости этих уравнений.

Рассмотрим скалярную задачу (1.13)–(1.17) для $u = E_3$. Она может быть сведена к интегральному уравнению на отверстии Ω:

$$A(\omega)\psi := \int_{\Omega} \left(\varepsilon_1 G_2^1(x', y') + \varepsilon_2 G_2^2(x', y')\right) \psi(y')\, ds = f(x'),\ x' \in \Omega, \tag{3.1}$$

где

$$\psi(y') = \frac{du}{dx_3}(y')(y' \in \Omega),\ \psi \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}),\ f(x') = -[\varepsilon E_3^0]_{\Omega}, \tag{3.2}$$

$$x' := (x_1, x_2) \text{ и } y' := (y_1, y_2),\ f(x') \in C^{\infty}(\bar{\Omega}). \tag{3.3}$$

Рассмотрим скалярную задачу (1.18) – (1.22) для $v = H_3$. Получаем гиперсингулярное интегродифференциальное уравнение на отверстии Ω:

$$D(\omega)\phi := \frac{\partial}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y_3}\bigg|_{y_3=0} \left(\mu_1^{-1} G_1^1(x, y) + \mu_2^{-1} G_1^2(x, y)\right) \phi(y')\, dy' = w(x'), x' \in \Omega, \tag{3.4}$$

$$\phi(y') = \mu v(y')\,(y' \in \Omega),\ \phi \in \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}),\ w(x') = \left[\frac{\partial H_3^0}{\partial x_3}\right]\bigg|_{\Omega}. \tag{3.5}$$

Пусть $\sigma(A)$ – спектр оператор-функции $A(\omega): \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \to H^{1/2}(\Omega)$ и $\sigma(D)$ – спектр оператор-функции $D(\omega): \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}) \to H^{-1/2}(\Omega)$.

Теорема 3.1. Пусть $\operatorname{Re} \varepsilon_j > 0$, $\operatorname{Im} \varepsilon_j \geq 0$, $\operatorname{Re} \mu_j > 0$, $\operatorname{Im} \mu_j \geq 0$. Уравнение (3.1) однозначно разрешимо при любой правой части $f \in H^{1/2}(\Omega)$ при $\omega \in R^- \setminus (\Lambda(U) \cup \sigma(A))$.

Теорема 3.2. Пусть $\operatorname{Re}\varepsilon_j > 0$, $\operatorname{Im}\varepsilon_j \geq 0$, $\operatorname{Re}\mu_j > 0$, $\operatorname{Im}\mu_j \geq 0$. Уравнение (3.4) однозначно разрешимо при любой правой части $w \in H^{-1/2}(\Omega)$ при $\omega \in R^+ \setminus (\Lambda(U) \cup \sigma(D))$.

В случае, когда одна из сред имеет поглощение, можно усилить результат предыдущих теорем.

Теорема 3.3. Пусть $\operatorname{Re}\varepsilon_j > 0$, $\operatorname{Im}\varepsilon_j \geq 0$, $\operatorname{Re}\mu_j > 0$, $\operatorname{Im}\mu_j \geq 0$ и выполнено дополнительное условие $\operatorname{Im}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \mu_1 + \mu_2) > 0$. Тогда уравнение (3.1) однозначно разрешимо при любой правой части $f \in H^{1/2}(\Omega)$ при $\omega \in R^+ \setminus \Lambda(U)$.

Теорема 3.4. Пусть $\operatorname{Re}\varepsilon_j > 0$, $\operatorname{Im}\varepsilon_j \geq 0$, $\operatorname{Re}\mu_j > 0$, $\operatorname{Im}\mu_j \geq 0$ и выполнено дополнительное условие $\operatorname{Im}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \mu_1 + \mu_2) > 0$. Тогда уравнение (3.4) однозначно разрешимо при любой правой части $w \in H^{-1/2}(\Omega)$ при $\omega \in R^+ \setminus \Lambda(U)$.

Рассмотрим представление решения $u = E_3$ задачи (1.13)–(1.17) с помощью потенциала

$$u(x) = (-1)^j \int_\Omega G_2^j(x, y')\psi(y')dy', \tag{3.6}$$

где $x \in U^+$ при $j = 1$, $x \in U^-$ при $j = 2$; $\psi \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega})$ – решение уравнения (3.1).

$$\left.\frac{\partial E_3}{\partial x_3}\right|_\Omega = \psi(x'), \left.\left[\frac{\partial E_3}{\partial x_3}\right]\right|_\Omega = 0,\ x' \in \Omega,$$

где запись $[\,\cdot\,]_\Omega$ означает разность предельных значений функции при $x_3 \to +0$ и $x_3 \to -0$ в точках Ω.

Теорема 3.5. Если $\psi \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega})$ является решением уравнения (3.1) с правой частью (3.2)–(3.3), то формула (3.6) дает квазиклассическое решение задачи (1.13)–(1.17). Обратно, если u – квазиклассическое решение задачи (1.13)–(1.17), то уравнение (3.1) имеет решение $\psi(x') = \left.\frac{\partial E_3}{\partial x_3}\right|_\Omega$.

Рассмотрим представление решения $v = H_3$ задачи (1.18)–(1.22) с помощью потенциала

$$v(x) = (-1)^{j+1} \frac{1}{\mu_j} \int_{\Omega} \left. \frac{\partial G_1^j(x, y')}{\partial y_3} \right|_{y_3=0} \phi(y') dy', \tag{3.7}$$

где $x \in U^+$ при $j=1$, $x \in U^-$ при $j=2$; $\phi \in \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega})$ – решение уравнения (3.4).

С учетом знака в формуле (3.7) находим

$$\mu H_3|_{\Omega} = \phi(x'), \quad [\mu H_3]|_{\Omega} = 0, \quad x' \in \Omega,$$

где запись $[\,\cdot\,]_{\Omega}$ означает разность предельных значений функции при $x_3 \to +0$ и $x_3 \to -0$ в точках Ω.

Теорема 3.6. Если $\phi \in \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega})$ является решением уравнения (3.4) с правой частью (3.5), то формула (3.7) дает квазиклассическое решение задачи (1.18)–(1.22). Обратно, если v – квазиклассическое решение задачи (1.18)–(1.22), то уравнение (3.4) имеет решение $\phi(x') = (\mu H_3)|_{\Omega}$.

В **четвертой главе** описывается численный алгоритм решения интегрального уравнения со слабой особенностью (3.1).

Пусть $\omega \notin \Lambda(U)\,(j=1,2)$ и уравнение (3.1) $A\psi = f$ имеет единственное решение, где $A : \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \to H^{1/2}(\Omega)$ – интегральный оператор.

Будем проводить аппроксимации ψ элементами $\psi_n \in V_n$, где $V_n \subset \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega})$ – n-мерное пространство. Методом Галеркина находим ψ_n из системы уравнений

$$(A\psi_n, v) = (f, v), \; \forall v \in V_n \tag{4.1}$$

Каждый элемент матрицы получается путем вычисления четырехкратного интеграла

$$A_{ij} := \int_{\Omega} \left(\varepsilon_1 G_2^1(x', y') + \varepsilon_2 G_2^2(x', y')\right) \psi_j(y') v_i(x') ds \,.$$

Пусть Ω – прямоугольная область, $\Omega = [(0,a)\times(0,b)]$. Построим в области Ω равномерную прямоугольную сетку:

$$\Pi_{x'} = \left\{ x' \middle| a_{i-1} < x_1 < a_i, b_{j-1} < x_2 < b_j \right\},$$

$$\Pi_{y'} = \left\{ y' \middle| a_{i-1} < y_1 < a_i, b_{j-1} < y_2 < b_j \right\}, i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$$

с шагом $h_1 = \dfrac{a}{n}$ по оси $x_1(y_1)$ и шагом $h_2 = \dfrac{b}{m}$ по оси $x_2(y_2)$.

В качестве базисных функций $v(x')$ выбираем функции вида

$$\nu_{ij}(x') = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x' \in [(a_{i-1}, a_i) \times (b_{j-1}, b_j)], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Будем рассматривать семейство V_N из $N = nm$ функций $\nu_{ij}(x')$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. Выбранные функции удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве $\tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega})$.

Теорема 4.1. Метод Галеркина (4.1) для уравнения (3.1) с выбором базисных функций (4.2) сходится.

Был произведен расчет решения ψ интегрального уравнения (3.1) с правой частью $f = 1$ и параметрами $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 8$, $k_1 = 3/2$, $k_2 = 1$ на квадратном отверстии $\dfrac{4\pi}{5} \times \dfrac{4\pi}{5}$ для сеток размера 16×16, 32×32, 64×64. Результаты представлены в графическом виде. Уменьшение шага сетки приводит к более точному решению. Имеет место внутренняя сходимость метода. Все это позволяет применять выбранный метод Галеркина для получения корректных численных результатов.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Векторная краевая задача для системы уравнений Максвелла о дифракции электромагнитной волны в экранированных слоях, связанных через отверстие, сведена к двум скалярным задачам для уравнения Гельмгольца.

2. Доказана теорема единственности для случая, когда одна из сред имеет поглощение.

3. Установлена голоморфность и фредгольмовость оператор-функции задачи и доказана дискретность спектра задачи в случае сред без поглощения.

4. Краевые задачи дифракции для уравнений Гельмгольца сведены к интегродифференциальным (псевдодифференциальным) уравнениям. Доказаны теоремы о разрешимости этих уравнений в пространствах Соболева. Доказаны теоремы эквивалентности краевых задач интегральным уравнениям.

5. Применен, обоснован и реализован численный метод Галеркина для решения слабосингулярного интегрального уравнения в прямоугольнике. Представлены результаты численных расчетов.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Антонов, А. В. Разработка Web-ориентированного вычислительного комплекса для решения трехмерных векторных задач дифракции электромагнитных волн на основе субиерархических параллельных алгоритмов / А. В. Антонов, М. Ю. Медведик, И. А. Родионова, Ю. Г. Смирнов // Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах : материалы седьмой Международной конференции-семинара. – Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского университета, 2007. – С. 25–31.

2. Медведик, М. Ю. Субиерархический параллельный вычислительный метод для электромагнитной задачи дифракции в экранированных слоях, связанных через отверстие / М. Ю. Медведик, И. А. Родионова // Надежность и качество : труды Международного симпозиума. – Пенза, 2006. – Т. 1. – С. 272–274.

3. Медведик, М. Ю. Численный метод решения псевдодифференциального уравнения в задаче дифракции в слоях, связанных через отверстие / М. Ю. Медведик, И. А. Родионова, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1. – С. 87–99.

4. Родионова, И. А. Метод Галеркина для электромагнитной задачи дифракции в экранированных слоях, связанных через отверстие / И. А. Родионова // Надежность и качество : труды Международного симпозиума. – Пенза, 2006. – Т. 1. – С. 279–280.

5. Родионова, И. А. О фредгольмовости электромагнитной задачи о собственных колебаниях в экранированных слоях, связанных через отвер-

стие в экране / И. А. Родионова // Труды XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ (9–21 апреля 2006 г., г. Москва). – М., 2006.

6. Родионова, И. А. Проблемы вычисления двумерных интегралов, содержащих слабую особенность / И. А. Родионова // Университетское образование : сборник статей X Международной научно-методической конференции. – Пенза, 2006. – С. 418–420.

7. Родионова, И. А. Фредгольмовость электромагнитной задачи о собственных колебаниях в экранированных слоях, связанных через отверстие в экране / И. А. Родионова // Надежность и качество : труды Международного симпозиума. – Пенза, 2005. – С. 150–152.

8. Родионова, И. А. О собственных волнах двухслойного волновода с отверстием / И. А. Родионова, Ю. Г. Смирнов // Труды международного юбилейного симпозиума АПНО (19–22 ноября 2003 г.). – Пенза, 2003. – Т. 1.

9. Родионова, И. А. О фредгольмовости электромагнитной задачи о собственных колебаниях в слоях, связанных через отверстие / И. А. Родионова, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2004. – № 5. – С. 39–48. – (Естественные науки).

10. Смирнов, Ю. Г. Сведение векторной электромагнитной задачи дифракции в экранированных слоях, связанных через отверстие, к двум скалярным задачам для уравнения Гельмгольца / Ю. Г. Смирнов, И. А. Родионова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 1. – С. 40–46.

РОДИОНОВА Ирина Анатольевна

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ
ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА
В ЭКРАНИРОВАННЫХ СЛОЯХ,
СВЯЗАННЫХ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЕ

Редактор Е. В. Денисова
Технический редактор А. Г. Темникова

Подписано в печать 10.08.09. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 1,16.
Заказ № 000128. Тираж 100.

Отпечатано в Информационно-издательском центре ПензГУ
Пенза, Красная, 40, т.: 56-47-33