На правах рукописи

ПОДВИГИН ИВАН ВИКТОРОВИЧ

# МАРТИНГАЛЬНО-ЭРГОДИЧЕСКИЕ И ЭРГОДИКО-МАРТИНГАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

01.01.01 – математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2009

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Новосибирского государственного университета.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, доцент
Качуровский Александр Григорьевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
Емельянов Эдуард Юрьевич

кандидат физико-математических наук, доцент
Рубан Анатолий Альбертович

Ведущая организация:

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет

Защита состоится "12" ноября 2009 г. в 16:30 на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН (630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан "7" октября 2009 г.



Ученый секретарь
диссертационного совета Гутман А. Е.

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Проблемой унификации эргодических средних и обращенных мартингалов начали заниматься с середины прошлого века. Любопытное совпадение поведения и сходство доказательств теорем сходимости для этих стохастических процессов привели к задаче о нахождении суперструктуры, унифицирующей и мартингалы, и эргодические средние.

Совпадение параметров в максимальном и доминантном неравенствах, в неравенствах пересечения полосы, в различных колебательных характеристиках – все это привело к мысли о наличии глубоких связей между этими процессами.

Наличие особенностей в поведении привело С. Какутани в 1950 году к постановке вопроса о нахождении причин такого поведения[1]. Была поставлена задача о нахождении общего унифицирующего максимального неравенства, которое бы включало максимальное неравенство и для мартингалов, и для эргодических средних.

С тех пор было разработано шесть подходов к решению этой проблемы (М. Джерисон, Дж.-К. Рота, А. и К. Ионеску-Тулча, А. М. Вершик и А. М. Степин, А. Г. Качуровский). Кроме того, есть ряд работ, так или иначе связанных с задачей унификации.

М. Джерисон в своей работе[2] доказал, что эргодические средние можно рассматривать как мартингалы на некотором пространстве с $\sigma$-конечной мерой. Однако, поведение таких мартингалов и обычных (на вероятностном пространстве) различно.

Рассматриваемый в его работе унифицирующий процесс, давая возможность унификации формулировок теорем, не обладает, тем не менее, в достаточной мере свойствами ни эргодических средних, ни (стандартных) мартингалов. И не отвечает на вопрос о причинах совпадения поведения мартингалов и эргодических средних. Подход применим и к эргодическим средним для сжатий в пространствах суммируемых функций, и к эргодическим средним для ограниченных линейных операторов в абстрактных банаховых пространствах.

Кроме того, в рамках подхода был получен вывод индивидуальной эргодической теоремы по некоторым подпоследовательностям из теоремы Дуба о сходимости мартингалов.

[1] Kakutani S. Ergodic theory // Proc. Intern. Congr. Math. 1950. V. 2. Providence. R.I. AMS Publ. 1952. P. 128-142.

[2] Jerison M. Martingale formulation of ergodic theorems // Proc. Amer. Math. Soc. 1959. V. 10, N 4. P. 531-539.

Дж.-К. Рота в работах[3,4] рассмотрел так называемые обобщенные мартингалы, которые унифицируют мартингалы и эргодические средние относительно суммирования по Абелю и доказал теорему сходимости для этих объектов: и по норме, и п.в.

Основой работы было исследование структуры так называемых операторов Рейнольдса (связанных с системой Навье-Стокса), образующих при определенных алгебраических условиях обобщенный мартингал. Для таких операторов было найдено интегральное представление, благодаря которому удалось доказать основные результаты.

Таким образом, подход Дж.-К. Рота дает унификацию формулировок теоремы о сходимости регулярного мартингала (класса Зигмунда) и утверждения о сходимости эргодических средних (с усредняемой функцией из того же класса), не давая при этом унифицирующего и мартингалы, и эргодические средние стохастического процесса, поскольку в эргодических теоремах усреднение идет по Чезаро, а не по Абелю. Кроме того, подход неприменим к унификации эргодических теорем для действий сжатий, не порожденных сохраняющими меру преобразованиями.

Содержание абстрактной эргодической теоремы Ионеску-Тулча[5] состоит в рассмотрении общего унифицирующего максимального неравенства, которое решает проблему Какутани в случае с "модулями".

Поскольку из этого неравенства немедленно следуют максимальные неравенства и для эргодических средних, и для обращенных мартингалов, из которых в свою очередь немедленно вытекают утверждения о сходимости п.в. и тех и других, то подход дает единственное независимое унифицированное доказательство индивидуальной эргодической теоремы (для сжатий) и теоремы Дуба о сходимости обращенного мартингала.

Однако, в этом подходе, имеющем унифицированное доказательство сходимости, нет унифицирующего процесса.

Подход А. М. Вершика и А. М. Степина[6,7] основан на рассмотрении локально конечных групп, действующих свободно на фазовом простран-

[3] Rota G.-C. Une theorie unifiee des martingales et des moyennes ergodiques // C. r. Acad. sci. Paris. 1961. V. 252, N 14. P. 2064-2066.

[4] Rota G.-C. Reynolds operators // Proc. Symp. Appl. Math. 1964. V. 16. P. 70-83.

[5] Ionescu Tulcea A., Ionescu Tulcea C. Abstract ergodic theorems // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 107, N 1. P. 107-124.

[6] Вершик А. М. Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6, № 4. С. 1–68.

[7] Степин А. М. Энтропийный инвариант убывающих последовательностей измеримых разбиений // Функц. анализ и его прил. 1971. Т. 5, № 3. С. 80-84.

стве. Эргодическая теорема для таких действий выводится из теоремы сходимости для некоторого однородного обращенного мартингала. И обратно, теорема сходимости для однородного обращенного мартингала может быть реализована как эргодическая для некоторой локально-конечной группы.

Последние два подхода А. Г. Качуровского[8,9] состоят в нахождении унифицирующей суперструктуры для мартингалов и эргодических средних — мартингально-эргодических (5-й подход) и эргодико-мартингальных (6-й подход) стохастических процессов. Рассматривая композицию операторов усреднения и условного математического ожидания, удалось показать, что полученные унифицирующие процессы обладают свойствами и мартингалов, и эргодических средних.

Для процессов с дискретным параметром им были получены:

1. теоремы сходимости по норме и п.в. (мартингально-эргодическая и эргодико-мартингальная теоремы), которые включают в себя как индивидуальную и статистическую эргодическую теоремы, так и теоремы сходимости мартингалов;

2. максимальное и доминантное неравенства;

3. все результаты обобщены также на действия сжатий и решеток.

В работе также предложена интересная интерпретация теоремы сходимости мартингалов с точки зрения эргодической теории.

Резюмируя сказанное, можно сказать, что подход Качуровского, единственный пока, дает унифицирующую структуру и унифицированные формулировки теорем сходимости (доказательства используют в качестве составляющих и эргодические и мартингальные аналоги) из рассмотренных выше.

**Цель работы.** Настоящая работа посвящена исследованию мартингально-эргодических и эргодико-мартингальных процессов с непрерывным временем. Главный вектор работы направлен на исследование сходимости почти всюду этих процессов при стремлении их параметров к бесконечности.

Рассмотрение сходимости исследуемых процессов в диссертации происходит при двух различных условиях:

1. при условии интегрируемости супремума (супремума эргодических средних для мартингально-эргодических процессов и супремума регулярного мартингала для эргодико-мартингальных);

---

[8] Качуровский А. Г. Мартингально-эргодическая теорема // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 2. С. 311-314.

[9] Качуровский А. Г. Единые теории, унифицирующие эргодические средние и мартингалы // Труды МИАН. 2007. Т. 256. С. 172-200.

2. при условии коммутируемости операторов эргодического усреднения и условного математического ожидания.

**Научная новизна.** Полученные в работе основные новые результаты, в соответствии с рассматриваемыми условиями, можно разбить на следующие пункты.

1. Доказана сходимость по норме для обоих процессов при стремлении их параметров к бесконечности.
2. В случае интегрируемого супремума:
    (a) Доказана сходимость обоих процессов п.в. при стремлении их параметров к бесконечности;
    (b) Получены доминантные и максимальные неравенства для обоих процессов;
    (c) Рассмотрен процесс, унифицирующий абелевские эргодические средние и регулярные мартингалы, обобщающий унификацию Дж-К. Рота. Для него доказана сходимость и п.в., и по норме при стремлении параметра процесса к бесконечности.

Важными являются также следующие новые результаты.

В случае коммутируемости операторов усреднения и условного математического ожидания:

1. Доказана сходимость п.в. процесса с дискретным временем, построенного по эндоморфизму, при стремлении параметров процесса к бесконечности;
2. Доказана сходимость п.в. этого же процесса с непрерывным временем, построенного по полупотоку, при стремлении параметров процесса к бесконечности.

**Методы исследования.** В работе используются методы эргодической теории, теории меры, элементы теории стохастических процессов, а также ряда общих разделов функционального анализа.

**Теоретическая и практическая ценность.** Предлагаемая работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в эргодической теории и смежных областях знания.

**Апробация.** Результаты работы рассказывались на Международной научной студенческой конференции в Новосибирском государственном университете (2007 г.), на Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева (2008 г.), и Международной конференции "Современные проблемы анализа и геометрии"(2009 г.) в Институте математике СО РАН , на семинарах в Новосибирском (2007-2009 гг.) и Московском (семинар Д. В. Аносова и А. М. Степина, 2008 г.) государственных университетах и в Институте математики СО РАН (2009 г.).

**Публикации.** Имеются четыре публикации по теме диссертации [1, 2, 3, 4]. Основные результаты содержатся в [3].

**Структура и объем диссертации.** Структурно диссертация состоит из введения, четырех разделов и списка литературы. Каждый из разделов разбит на подразделы. Каждый из подразделов делится на пункты. Нумерация теорем, лемм и замечаний сквозная.

Объем работы – 60 страниц; библиография – 40 наименований.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждается проблематика и дается краткий обзор результатов, полученных в диссертации.

### 1. Определение мартингально-эргодического и эргодико-мартингального процессов

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ – вероятностное пространство, $\{\mathfrak{F}_s\}_{s\geq 0}$ – монотонное семейство $\sigma$-подалгебр алгебры $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_\infty = \sigma(\bigvee\limits_{s\geq 0} \mathfrak{F}_s)$ в случае возрастания и $\mathfrak{F}_\infty = \bigwedge\limits_{s\geq 0} \mathfrak{F}_s$ в случае убывания $\sigma$-подалгебр. Часто говорят, что семейство $\{\mathfrak{F}_s\}_{s\geq 0}$ – поток $\sigma$-алгебр, или фильтрация, а $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda; \{\mathfrak{F}_s\}_{s\geq 0})$ – фильтрованное вероятностное пространство, или стохастический базис.

Полугруппа $\{U^t, t \geq 0\}$ называется полугруппой положительных $\mathrm{L}_1$–$\mathrm{L}_\infty$ сжатий в $L_1$, если

1. $U^t U^s = U^{t+s}, t, s \geq 0$ и $U^0 = Id$;

2. $\|U^t\|_1 \leq 1, \|U^t\|_\infty \leq 1$ для всех $t \geq 0$;

3. $U^t f \geq 0$ при $f \geq 0$ для всех $t \geq 0$.

Оператором (эргодического) усреднения, или усредняющим оператором $\mathcal{A}_t$ относительно полугруппы $\{U^t, t \geq 0\}$ положительных $L_1$–$L_\infty$ сжатий, называется оператор, имеющий вид:

$$\mathcal{A}_t f(\omega) = \frac{1}{t} \int_0^t U^\tau f(\omega) d\tau, \ f \in L_1, \ t > 0.$$

Используя операторы усреднения и условного математического ожидания, беря их композицию в любом порядке, получим процессы, называемые мартингально-эргодическими и эргодико-мартингальными. Дадим формальное определение.

**Мартингально-эргодическим (эргодико-мартингальным) процессом** называется (двупараметрический) стохастический процесс вида

$$\{\mathrm{E}(\mathcal{A}_t f | \mathfrak{F}_s)\}_{t>0, s\geq 0}, \quad (\{\mathcal{A}_t \mathrm{E}(f|\mathfrak{F}_s)\}_{t>0,s\geq 0}),$$

где $\mathrm{E}(\cdot|\mathfrak{F}_s)$ — оператор условного математического ожидания, $\mathfrak{F}_s$ — монотонное семейство $\sigma$-подалгебр $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}$, $\mathcal{A}_t$ — усредняющий относительно полугруппы $\{U^t, t \geq 0\}$ положительных $L_1$–$L_\infty$ сжатий оператор и $f \in L_1$.

Как видно из структуры этих процессов, они образуют естественную двойственную пару, каждый из них унифицирует как регулярные мартингалы, так и эргодические средние. Действительно, если $\mathfrak{F}_s \equiv \mathfrak{F}$ (в этом случае $\mathrm{E}(\mathcal{A}_t f|\mathfrak{F}_s) = \mathcal{A}_t \mathrm{E}(f|\mathfrak{F}_s) = \mathcal{A}_t f$ для любого $t$), то данный стохастический процесс совпадает с эргодическими средними. Если же $U^t \equiv Id$ (в этом случае $\mathrm{E}(\mathcal{A}_t f|\mathfrak{F}_s) = \mathcal{A}_t \mathrm{E}(f|\mathfrak{F}_s) = \mathrm{E}(f|\mathfrak{F}_s)$ для любого $s$), то получаем регулярный мартингал.

Благодаря своей структуре оба рассматриваемых процесса оказываются сходящимися по норме. Это свойство индуцировано свойствами сжатия обоих образующих процесс оператора.

**Теорема 1.** *Пусть $f \in L_p, p \in [1, \infty)$, тогда*

$$\mathrm{E}(\mathcal{A}_t f|\mathfrak{F}_s) \to f^* \ \text{в } L_p \text{ при } t, s \to \infty,$$

$$\mathcal{A}_t \mathrm{E}(f|\mathfrak{F}_s) \to f_* \ \text{в } L_p \text{ при } t, s \to \infty.$$

**Замечание 1.** *Утверждение теоремы 1 в вырожденном случае $\mathfrak{F}_s \equiv \mathfrak{F}$ совпадает с утверждением статистической эргодической теоремы. Вырожденный случай $U^t \equiv Id$ дает утверждения теорем о сходимости по норме прямого и обращенного мартингалов.*

**2. Случай интегрируемого супремума унифицируемых процессов**

Центральным результатом этого раздела является теорема 2 о сходимости почти всюду. Трудности при ее доказательстве носят технический характер. Важной для доказательства является лемма 1, в которой строится модификация мартингально-эргодического процесса. Доказывается, что эта модификация обладает свойством сходимости п.в., и для нее справедливы доминантное и максимальное неравенства (теорема 3). Построение такой модификации возможно из-за п.в. непрерывности (эргодических) усреднений по параметру и сепарабельности регулярного мартингала. Для эргодико-мартингальных процессов доказательство несколько проще. Их сходимость зависит от сепарабельности регулярного мартингала и положительности обоих образующих процесс операторов. Для них также доказываются доминантное и максимальное неравенства (теорема 4). Доказательство этих неравенств для обоих процессов следует аналогичному доказательству в дискретном случае и последовательно использует в качестве ключевых составляющих неравенства для эргодических средних и мартингалов с непрерывным временем.

**Теорема 2.** *Для функции $f \in L_1$ справедливы следующие утверждения*

1. *Если* $\sup\limits_{t>0} |\mathcal{A}_t f| \le h$, $\mathrm{E}h < \infty$, *то для каждого* $t > 0$ *и* $s \ge 0$ *условные математические ожидания* $\mathrm{E}(\mathcal{A}_t f|\mathfrak{F}_s)$ *можно выбрать таким образом, что* $\mathrm{E}(\mathcal{A}_t f|\mathfrak{F}_s) \to f^*$ *п.в. при* $t, s \to \infty$.

2. *Если* $\sup\limits_{s\ge 0} |\mathrm{E}(f|\mathfrak{F}_s)| \le h$, $\mathrm{E}h < \infty$, *то* $\mathcal{A}_t\mathrm{E}(f|\mathfrak{F}_s) \to f_*$ *п.в. при* $t, s \to \infty$.

**Замечание 2.** *Утверждение теоремы 2 в вырожденном случае* $\mathfrak{F}_s \equiv \mathfrak{F}$ *содержит утверждения индивидуальной эргодической теоремы. Вырожденный случай* $U^t \equiv Id$ *включает утверждения теорем о сходимости п.в. обращенного и регулярного прямого мартингалов.*

**Лемма 1.** *Пусть* $f$ *– неотрицательная* $\mathfrak{F}$*-измеримая функция такая, что* $\sup\limits_{t>0} |\mathcal{A}_t f| \le h$, $\mathrm{E}h < \infty$. *Тогда для каждого* $t > 0$ *и* $s \ge 0$ *условные математические ожидания* $\mathrm{E}(\mathcal{A}_t f|\mathfrak{F}_s)$ *можно выбрать таким образом, что для любых* $\tau > 0, \sigma \ge 0$ *справедливо равенство*

$$\sup_{t>\tau}\sup_{s>\sigma} \mathrm{E}(\mathcal{A}_t f|\mathfrak{F}_s) = \sup_{t>\tau, t\in\mathbf{Q}} \; \sup_{s>\sigma, s\in\mathbf{Q}} \mathrm{E}(\mathcal{A}_t f|\mathfrak{F}_s)$$

*на множестве полной меры, не зависящем от $\tau$ и $\sigma$.*

При рассмотрении доминантного и максимального неравенства мы полагаем полугруппу $\{U^t, t \geq 0\}$ сильно непрерывной, т.е. удовлетворяющей условию $\lim_{s\to t} \|U^s f - U^t f\|_1 = 0$ для каждой $f \in L_1$ и $t \geq 0$.

**Теорема 3.** *Пусть $\mathfrak{F}_s \searrow \mathfrak{F}_\infty$, тогда для $f \in L_p, p \in (1, \infty)$ справедливы неравенства*

$$\|\sup_{t>0}\sup_{s\geq 0} \mathrm{E}_3(\mathcal{A}_t|f||\mathfrak{F}_s)\|_p \leq q^2\|f\|_p,$$

$$\lambda(\sup_{t>0}\sup_{s\geq 0} \mathrm{E}_3(\mathcal{A}_t|f||\mathfrak{F}_s) \geq \varepsilon) \leq q\frac{\|f\|_p}{\varepsilon} \quad \textit{для любого } \varepsilon > 0,$$

*где $1/p + 1/q = 1$ и $\mathrm{E}_3(\mathcal{A}_t|f||\mathfrak{F}_s)$ удовлетворяют пункту 1 теоремы 2.*

**Теорема 4.** *Пусть $\mathfrak{F}_s \searrow \mathfrak{F}_\infty$, $f \in L_p, p \in (1, \infty)$ и $G = \sup_{t>0}\sup_{s\geq 0} \mathcal{A}_t|\mathrm{E}(f|\mathfrak{F}_s)|$ – $\mathfrak{F}$-измерима, тогда справедливы неравенства*

$$\|\sup_{t>0}\sup_{s\geq 0} \mathcal{A}_t|\mathrm{E}(f|\mathfrak{F}_s)|\|_p \leq q^2\|f\|_p,$$

$$\lambda(\sup_{t>0}\sup_{s\geq 0} \mathcal{A}_t|\mathrm{E}(f|\mathfrak{F}_s)| \geq \varepsilon) \leq q\frac{\|f\|_p}{\varepsilon} \quad \textit{для любого } \varepsilon > 0,$$

*где $1/p + 1/q = 1$.*

## 3. Случай коммутируемости операторов усреднения и условного математического ожидания

При доказательстве теоремы 2 мы использовали условие интегрируемости супремума каждого из унифицируемых процессов, которого нет ни в теоремах о сходимости мартингалов, ни в индивидуальной эргодической теореме. Г. Аргирис и Дж.М. Розенблатт показали в своей работе[10], что убрать это условие без дополнительных допущений нельзя. Оказывается, в случае, когда рассматриваемая фильтрация $\mathfrak{F}_s$ убывает (а пространство с мерой является пространством Лебега), достаточным для сходимости является условие коммутируемости операторов условного математического ожидания и эргодического усреднения. При этом унификация остается в силе.

[10] Argiris G., Rosenblatt J. M. Forcing divergence when the supremum is not integrable // Positivity. 2006. V. 10, N 2. P. 261–284.

Главным и самым общим результатом этого раздела является теорема 8. Она есть конечный итог цепочки теорем: теорем 5,6 и 7. Ключевой из них является теорема 5, в которой показывается сходимость мартингально-эргодических процессов (совпадающих с эргодико-мартингальными), построенных по автоморфизму и убывающей фильтрации атомических $\sigma$-алгебр. Оказалось, что в этом случае условие коммутирования, эквивалентное сохранению фильтрации (см. лемму 2), выглядит наиболее просто. Благодаря ему, удается ограничить рассматриваемый процесс некоторым обращенным однопараметрическим мартингалом, инвариантным относительно автоморфизма. После этого сходимость процесса легко следует из мартингально-эргодической теоремы Качуровского и обобщенного принципа Банаха[11].

**Лемма 2.** *Операторы* $\mathrm{E}(\cdot|\mathfrak{F}')$ *и* $\mathrm{T}$, *порожденный автоморфизмом* $\tau$, *действующие в* $L_1(\Omega)$, *коммутируют тогда и только тогда, когда* $\tau^{-1}\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}'$, *т.е. когда* $\tau$ *- автоморфизм* $(\Omega, \mathfrak{F}', \lambda)$.

Мы называем $\sigma$-алгебру атомической, если она порождена счетным числом непересекающихся ненулевых (по мере $\lambda$) множеств (атомамов).

**Теорема 5.** *Пусть* $\tau$ *- автоморфизм вероятностного пространства* $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$, *и* $\{\mathfrak{F}_n\}_{n\geq 1}$ *- убывающая последовательность атомических* $\sigma$*-подалгебр* $\sigma$*-алгебры* $\mathfrak{F}$. *Тогда, если* $\mathrm{TE}_n = \mathrm{E}_n\mathrm{T}$ *для любого* $n$, *то* $A_m\mathrm{E}_n f = \mathrm{E}_n A_m f$ *сходится п.в. при* $n, m \to \infty$ *для любой* $f \in L_1(\Omega)$.

Этот простой случай переносится затем на автоморфизмы (теорема 6) и эндоморфизмы (теорема 7) пространства Лебега. Процесс при этом ограничивается уже суммой некоторого обращенного мартингала и эргодических средних, зависящих каждый от своего параметра. При доказательстве в этом случае использовалась развитая теория измеримых разбиений пространства Лебега. Переход от автоморфизмов к эндоморфизмам осуществлен за счет интересной конструкции естественного расширения эндоморфизма[12].

**Теорема 6.** *Пусть* $\tau$ *- автоморфизм пространства Лебега* $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$, *и* $\{\mathfrak{F}_n\}_{n\geq 1}$ *- убывающая последовательность* $\sigma$*-подалгебр* $\sigma$*-алгебры* $\mathfrak{F}$. *Тогда, если* $\mathrm{TE}_n = \mathrm{E}_n\mathrm{T}$ *для любого* $n$, *то* $A_m\mathrm{E}_n f = \mathrm{E}_n A_m f$ *сходится п.в. при* $n, m \to \infty$ *для любой* $f \in L_1(\Omega)$.

[11] Dunford N., Miller D. S. On the ergodic theorem. // Trans. Amer. Math. Soc. 1946. V. 60. P. 538-549.

[12] Рохлин В. А. Точные эндоморфизмы пространства Лебега // Известия АН. серия матем. 1961. Т. 25. С. 499-530.

**Теорема 7.** *Пусть $\tau$ – эндоморфизм пространства Лебега $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$, и $\{\mathfrak{F}_n\}_{n\geq 1}$ – убывающая последовательность $\sigma$-подалгебр $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}$. Тогда, если $\mathrm{TE}_n = \mathrm{E}_n\mathrm{T}$ для любого $n$, то $A_m\mathrm{E}_n f = \mathrm{E}_n A_m f$ сходится п.в. при $n, m \to \infty$ для любой $f \in L_1(\Omega)$.*

Наконец, доказательство в случае полупотока (теорема 8) опирается на технику Данфорда-Шварца перехода к дискретному случаю[13].

**Теорема 8.** *Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ — пространство Лебега, $\{\mathfrak{F}_s\}_{s\geq 0}$ – убывающее семейство $\sigma$-подалгебр $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}$, и $\{\tau_t, t \geq 0\}$ – полупоток на $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ такой, что $\mathrm{T}_t\mathrm{E}_s = \mathrm{E}_s\mathrm{T}_t$, $t, s \geq 0$. Тогда $A_t\mathrm{E}_s f = \mathrm{E}_s A_t f$ сходится п.в. при $t, s \to \infty$ для любой $f \in L_1(\Omega)$.*

**4. Родственные процессы**

В этом последнем разделе обсуждается вопрос о связи мартингально-эргодических и эргодико-мартингальных процессов с другими процессами: обобщенными и асимптотическими мартингалами.

Основным результатом этого раздела является теорема 9, в которой доказывается сходимость по норме и п.в. аналога эргодико-мартингального процесса для усреднений по Абелю. Этот результат обобщает унификацию мартингалов и абелевских эргодических средних в подходе Дж.-К. Рота. В его подходе рассматривались только операторы, порождаемые сохраняющими меру преобразованиями, а не более общий случай как в теореме 9. Доказательство этого результата опирается на известный переход от суммируемости по Чезаро к суммируемости по Абелю к одному и тому же пределу. Суммируемость по Чезаро содержится как раз в теореме 2.

Для унификации абелевских усреднений относительно полугруппы операторов, не порожденных сохраняющими меру преобразованиями, и регулярных мартингалов рассмотрим класс операторов вида:

$$V_\lambda f = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} U^t \mathrm{E}(f|\mathcal{B}_\lambda)dt, \quad \lambda > 0,$$

где $\{U^t, t \geq 0\}$ — $\mathrm{L}_1$–$\mathrm{L}_\infty$ сжатия, $\mathcal{B}_\lambda$– монотонное семейство $\sigma$-подалгебр алгебры $\mathfrak{F}$.

[13]Dunford N., Schwartz J. T. Convergence almost everywhere of operator averages // Journal of Rational Mechanics and Analysis. 1956. V. 5, N 1. P. 129-178.

Построенный процесс действительно является унифицирующим. При $U^t \equiv Id$ получаем регулярный мартингал $V_\lambda f = \mathrm{E}(f|\mathcal{B}_\lambda)$, а в случае $\mathcal{B}_\lambda \equiv \mathfrak{F}$ получаем усреднения по Абелю $V_\lambda f = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} U^t f dt$ относительно полугруппы $\{U^t, t \geq 0\}$. Стоит заметить, что оператор $V_\lambda f$, вообще говоря, не является усреднением по Абелю, так как усредняемая функция $\mathrm{E}(f|\mathcal{B}_\lambda)$ зависит от параметра усреднения $\lambda$.

**Теорема 9.** *Пусть* $\{U^t, t \geq 0\}$ *— полугруппа положительных* $\mathrm{L}_1$-$\mathrm{L}_\infty$ *сжатий в* $L_1$, $\mathcal{B}_\lambda$ *– монотонное семейство* $\sigma$*-подалгебр* $\sigma$*-алгебры* $\mathfrak{F}$. *Если функция* $f$ *такая, что* $\sup\limits_\lambda |\mathrm{E}(f|\mathcal{B}_\lambda)| \leq h, \mathrm{E}h < \infty$ *(что заведомо выполняется, когда* $f \in L \log L$*), то*

$$V_\lambda f \to f_* (= \lim_{t \to \infty} A_t \mathrm{E}(f|\mathcal{B}_0)) \text{ п.в. при } \lambda \to 0.$$

*Если* $f \in L_p$, $p \in [1, \infty)$, *то* $V_\lambda f \to f_*$ *и в* $L_p$.

В заключении обсуждается вопрос о доказательстве мартингально-эргодической теоремы с помощью понятия асимптотического мартингала, частным случаем которого является мартингально-эргодический процесс с условием интегрируемости супремума.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю А. Г. Качуровскому за поставленную задачу и постоянное внимание к работе.

# Работы автора по теме диссертации

[1] Подвигин И. В. Мартингально-эргодические процессы с непрерывным временем // Материалы XLV международной науч. студ. конф. "Студент и научно-технический прогресс": Математика. Новосибирск: Новосибирский гос. ун-т, 2007. С. 105–106.

[2] Подвигин И. В. Об унификации абелевских эргодических средних и мартингалов // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Материалы международной конф., посвященной 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2008. С. 345.

[3] Подвигин И. В. Мартингально-эргодические и эргодико-мартингальные процессы с непрерывным временем // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 5. С. 55–70. англ. пер.: Podvigin I. V. Martingale ergodic and ergodic martingale processes with continuous time // Sbornik: Mathematics. 2009. V. 200, N 5. P. 683–696.

[4] Подвигин И. В. Мартингально-эргодическая теорема без условия интегрируемости супремума. Новосибирск, 2009. 10 с. (Препринт/ РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 228).

Подписано в печать 30.09.2009 г.
Формат 60 × 84 1/16.
Заказ №348
Офсетная печать. Объем 0,75 п.л.
Тираж 100 экз.
Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова,2.

10.2

102