На правах рукописи

Рахм

РАХМАНОВА ЛУИЗА ХАСАНЯНОВНА

Краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области

01.01.02 - дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико – математических наук

Казань – 2009

Работа выполнена на кафедре математического анализа Стерлитамакской государственной педагогической академии и в лаборатории дифференциальных уравнений Стерлитамакского филиала Академии наук республики Башкортостан

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, чл.-корр. АН РБ, профессор Сабитов Камиль Басирович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Хайруллин Равиль Сагитович, кандидат физико-математических наук, доцент Капустин Николай Юрьевич
Ведущая организация:	Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН

Защита состоится 24 декабря 2009 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.018.10 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С текстом диссертации можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета (г. Казань, ул. Кремлевская, 18).

Автореферат разослан 17 ноября 2009 г.

Ученый секретарь
Совета Д 212.018.10

к.ф.-м.н., до... Е.К. Липачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одним из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными является теория краевых задач для уравнений смешанного типа. Такой интерес объясняется как теоретической значимостью получаемых результатов, так и их важными практическими приложениями в околозвуковой газовой динамике, в магнито и гидродинамических течениях с переходом через скорость звука, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и других областях.

Начало исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в известных работах Ф. Трикоми и С. Геллерстедта, где были впервые поставлены и исследованы краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. Они изучали задачи для уравнения смешанного типа с одной линией параболического вырождения, теперь известных как "задача Трикоми"и "задача Геллерстедта".

В дальнейшем созданием теории краевых задач для уравнений смешанного типа занимались Ф.И. Франкль, А.В. Бицадзе, К.И. Бабенко, S. Agmon, L. Nirenberg, M.N. Protter, C.S. Morawetz, Л. Берс, В.Ф. Волкодавов, В.Н. Врагов, Т.Д. Джураев, В.А. Елеев, В.И. Жегалов, А.Н. Зарубин, И.Л. Кароль, Ю.М. Крикунов, А.Г. Кузьмин, О.А. Ладыженская, М.Е. Лернер, Е.И. Моисеев, А.М. Нахушев, Н.Б. Плещинский, С.П. Пулькин, К.Б. Сабитов, М.С. Салахитдинов, М.М. Смирнов, А.П. Солдатов, Р.С. Хайруллин, Хе Кан Чер, Л.И. Чибрикова и др. В этих работах наряду с задачами Трикоми и Геллерстедта были поставлены и изучены новые краевые задачи для уравнений смешанного типа.

Важное место в теории дифференциальных уравнений в частных производных занимают нелокальные краевые задачи ввиду их теоретической и прикладной значимости. Для различных классов уравнений нелокальные задачи изучались Ф.И. Франклем, А.В. Бицадзе, В.И. Жегаловым, А.В. Бицадзе и А.А. Самарским, А.М. Нахушевым, Н.И. Ионкиным, А.Л. Скубачевским, В.А. Ильиным и Е.И. Моисеевым, М.Е. Лернером и О.А. Репиным, Л.С. Пулькиной, А.И. Кожановым, К.Б. Сабитовым и О.Г. Сидоренко, Ю.К. Сабитовой и другими авторами.

В газовой динамике Ф.И. Франкль [1] для уравнения Чаплыгина: $K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0$, где $K(0) = 0$, $K'(y) > 0$, впервые поставил краевую задачу, в которой носителем нелокального краевого условия ("скачка уплотнения") $u(0, y) - u(0, -y) = f(y)$, $0 \leq y \leq a$, является часть границы $x = 0$ области, состоящей из частей границ подобластей эллиптичности и гиперболичности уравнения.

Впервые на необходимость рассмотрения задач сопряжения, когда на одной части области задано параболическое уравнение, на другой - гиперболическое, было указано в работе И.М. Гельфанда [2], где рассматривается пример, связанный с движением газа в канале, окруженном пористой средой, при этом в канале движение газа описывается волновым уравнением, вне его – уравнением диффузии. Затем Г.М. Стручина, Я.С. Уфлянд, Л.А. Золина показали другие применения этих задач.

О.А. Ладыженская и Л. Ступялис в многомерном пространстве рассмотрели начально-граничные краевые задачи на сопряжения для параболо-гиперболических уравнений, которые возникают при изучении задачи о движении проводящей жидкости в электромагнитном поле.

После этих статей появилось множество работ, где изучаются задача Трикоми и ее обобщения, задачи со смещениями, задача типа задачи Бицадзе-Самарского и другие нелокальные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка. Это работы Х.Г. Бжихатлова, В.Н. Врагова, Т.Д. Джураева, В.А. Елеева, Н.Ю. Капустина, А.М. Нахушева, К.Б. Сабитова, М.С. Салахитдинова и других.

К.Б. Сабитовым для уравнений

$$L_1(u) = u_{xx} + K_1(y)u_y - K_2(y)u_{yy} - \lambda u = 0, \tag{1}$$

$$L_2(u) = K_1(y)u_x + K_2(y)u_y - u_{yy} - \lambda u = 0, \tag{2}$$

где $K_1(y) = (1 + sgny)/2$, $K_2(y) = (1 - sgny)/2$, $\lambda = \lambda_1 K_1(y) - \lambda_2 K_2(y)$, λ_1, λ_2 - числовые параметры, рассмотрен аналог задачи Трикоми и изу-

[1] Франкль Ф.И. О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР. Серия математика. — 1945. — Т. 9. — №2. — С. 121 — 142.

[2] Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. - 1959. - Т. XIV. - Вып. 3 (87). - С. 3 - 19.

чен характер влияния гиперболической части уравнений (1) и (2) на корректность постановки задачи Трикоми. Показано, что единственность решения задачи T в классе регулярных решений уравнения (1) существенным образом зависит от параметров λ_1 и λ_2. Если даже $\lambda_1 > 0$, что в области параболичности гарантирует выполнение принципа экстремума, то найдется такое λ_2, при которых однородная задача Трикоми имеет ненулевое неотрицательное решение. А задача Трикоми для уравнения (2) вообще не имеет ни вещественного, ни комплексного спектра.

Н.И. Ионкин в области $D_T = \{(x,t) \mid 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ для уравнения теплопроводности $u_t - u_{xx} = f(x,t)$ методом спектрального анализа исследовал нелокальную задачу с условиями: $u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1$,

$$u(0,t) = 0, \quad \int\limits_0^1 u(x,t)dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3}$$

Здесь показано, что интегральное условие из (3) эквивалентно нелокальному условию $u_x(0,t) = u_x(1,t)$, $0 \leq t \leq T$.

Е.И. Моисеев исследовал в полуполосе G нелокальную краевую задачу для эллиптического уравнения:

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0,\ m > -2,$$

$u(0,y) = u(1,y)$, $u_x(0,y) = 0$, $y \geq 0$, $u(x,0) = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, в классе функций $u \in C(\overline{G}) \cap C^2(G)$, в предположении, что $u(x,y)$ ограничена или стремится к нулю на бесконечности. Методом спектрального анализа доказана единственность и существование решения поставленной задачи.

Сабитовым К.Б. исследована задача Дирихле для уравнения смешанного типа

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} - b^2K(y)u = 0, \tag{4}$$

где $K(y) = sgny \cdot |y|^m$, $m = const > 0$, $b = const \geq 0$, в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\ 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, $\alpha, \beta > 0$. Методом спектрального анализа установлен критерий единственности и решение задачи Дирихле построено в виде суммы ряда Фурье.

Сидоренко О. Г. для уравнения (4) в области D доказана однозначная разрешимость краевой задачи с условиями: $u_x(0,y) = u_x(1,y)$, $u(0,y) = u(1,y)$, $-\alpha \le y \le \beta$; $u(x,\beta) = \varphi(x)$, $u(x,-\alpha) = \psi(x)$, $0 \le x \le 1$.

Сабитовой Ю.К. для уравнения смешанного типа (4) в прямоугольнике D исследована нелокальная задача при граничных условиях: $u(0,y) = u(1,y)$, $u_x(0,y) = 0$, $-\alpha \le y \le \beta$, $u(x,\beta) = \varphi(x)$, $u(x,-\alpha) = \psi(x)$, $0 \le x \le 1$. Спектральным методом доказано единственность и существование решения задачи.

Целью данной работы является доказательство единственности и существования решений начально-граничной и нелокальных задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu \equiv \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = 0, & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2(-t)^m u = 0, & t < 0, \end{cases} \tag{5}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\ 0 < x < 1,\ -\alpha < t < \beta\}$, где $b \ge 0$, $m \ge 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа при всех $m \ge 0$.

Методы исследования. При доказательстве единственности и существования решений локальных и нелокальных задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа использованы методы общей теории дифференциальных уравнений в частных производных, спектрального анализа и теория специальных функций.

Научная новизна.

1. Впервые поставлены начально-граничная задача и нелокальные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области.

2. Установлен критерий единственности и доказана теорема существования решения начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. Решение задачи построено в виде суммы ряда Фурье.

3. Установлен критерий единственности и доказаны теоремы существования решения задачи с условиями периодичности для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. Решение задачи построе-

но в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения.

4. Установлены критерий единственности решения нелокальных задач для уравнений параболо-гиперболического типа в прямоугольной области, решение которых построено в виде суммы биортогонального ряда.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и методы исследования представляют научный интерес и могут быть использованы для дальнейшей разработки краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных и уравнений смешанного типа.

Апробация работы. Результаты, приведенные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на научных семинарах кафедры математического анализа и лаборатории дифференциальных уравнений (науч. рук. – проф. К.Б. Сабитов, 2004 – 2009 гг.) СГПА и СФ АН РБ, кафедры дифференциальных уравнений (науч. рук. – проф. В.И. Жегалов, 2008 – 2009 гг.) Казанского гос. университета, а также на следующих научных конференциях: Всероссийская конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения» (г. Самара, 2005 г.), Международная конференция «Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий» (Казахстан,г. Алматы, 2006 г.), Международная конференция «Тихонов и современная математика» (г. Москва, 2006 г.), «Дифференциальные уравнения и их приложения» (г. Самара, 2007 г.), Международная конференция «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения» (г. Новосибирск, 2007 г.), Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (г. Стерлитамак, 2008 г.), Международная конференция «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (г. Эльбрус, 2008 г.), Международная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященной 70-летию академика В.А. Садовничего (г. Москва, 2009 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 работ, список которых приведен в конце автореферата. В работах [12, 13] постановка задач и идея доказательства принадлежат научному руководителю, проф. К.Б. Сабитову.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, разделенных на 7 параграфов, списка литературы. Объем диссертации составляет 126 страниц. Библиография – 100 наименований.

Основное содержание работы

Во **введении** приведен краткий обзор литературы по теме диссертации, излагается краткое содержание работы, сформулированы основные результаты, которые выносятся на защиту.

В **главе 1** исследуются нелокальные начально-граничные задачи для уравнения смешанного невырождающегося параболо-гиперболического типа в прямоугольной области. Методом спектрального анализа доказаны теоремы единственности и существования решений задач.

Рассмотрим уравнение (5) при $m = 0$, т.е. уравнение

$$Lu \equiv \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + b^2 u = 0, & t < 0, \end{cases} \tag{6}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\ 0 < x < 1,\ -\alpha < t < \beta\}$, где $b \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа. Для уравнения (6) в этой области поставлены и решены следующие нелокальные задачи.

Задача 1.1. *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^{2,1}_{x,t}(D_+); \tag{7}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D_- \cup D_+; \tag{8}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \tag{9}$$

$$u(0,t) = u(1,t), \qquad u_x(0,t) = u_x(1,t), \qquad -\alpha \leq t \leq \beta, \tag{10}$$

где $\psi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, $\psi(0) = \psi(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

Задача 1.2. *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям (7) – (9) и*

$$u(0,t) = u(1,t), \quad u_x(0,t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta. \tag{11}$$

Здесь $\psi(x)$ - заданная функция, удовлетворяющая условиям $\psi(0) = \psi(1)$, $\psi'(0) = 0$.

ЗАДАЧА 1.3. *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям (7) - (9) и*

$$u_x(0,t) = u_x(1,t), \quad u(1,t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta,$$

где $\psi(x)$ - заданная функция, $\psi'(0) = \psi'(1)$, $\psi(1) = 0$.

Рассмотрим **задачу 1.1**. Методом разделения переменных построено множество частных решений уравнения (6), удовлетворяющих условиям периодичности (10). Эти решения имеют вид:

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t),$$

где $X_k(x): \quad 1, \ \sqrt{2}\cos(2\pi kx), \quad \sqrt{2}\sin(2\pi kx), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (12)$

$$T_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ a_k \cos\lambda_k t + b_k \sin\lambda_k t, & t < 0, \end{cases} \qquad (13)$$

где a_k, b_k и c_k – произвольные постоянные, $\lambda_k = \sqrt{b^2 + (2\pi k)^2}$.

Используя частные решения (12) и (13), построено решение задачи (7) - (10) в виде суммы ряда

$$u(x,t) = u_0(t) + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\cos(2\pi kx) + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} v_k(t)\sin(2\pi kx), \qquad (14)$$

где функции $u_k(t)$, $v_k(t)$ и $u_0(t)$ имеют вид:

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi_k}{d_\alpha(k)} e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0; \\ \dfrac{\psi_k}{d_\alpha(k)}(\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t), & t < 0, \end{cases}$$

$$v_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\tilde{\psi}_k}{d_\alpha(k)} \tilde{\psi}_k e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0; \\ \dfrac{\psi_k}{d_\alpha(k)}(\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t), & t < 0. \end{cases} \qquad (15)$$

$$u_0(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi_0}{d_0(\alpha)} e^{-b^2 t}, & t > 0; \\ \dfrac{\psi_0}{d_0(\alpha)}(\cos bt - b\sin bt), & t < 0. \end{cases} \qquad (16)$$

где ψ_k - коэффициенты разложения функции $\psi(x)$ по системе $\{\cos 2\pi kx\}$, $\widetilde{\psi}_k$ - коэффициенты разложения функции $\psi(x)$ по системе $\{\sin 2\pi kx\}$, ψ_0 - коэффициенты разложения функции $\psi(x)$ по системе $\{1\}$,

$$d_\alpha(k) = \cos\lambda_k\alpha + \lambda_k \sin\lambda_k\alpha \neq 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{17}$$

Если при некоторых α и $k = p \in \mathbb{K}$ (где $\mathbb{K} = \mathbb{N}_0$ при $b \neq 0$ и $\mathbb{K} = \mathbb{N}$ при $b = 0$) нарушено условие (17), то есть $d_\alpha(p) = 0$, тогда однородная задача (7) - (10) (где $\psi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,t) = \begin{cases} e^{-b^2 t}(C_1 \cos 2\pi px + C_2 \sin 2\pi px), & t > 0, \\ (\cos\lambda_p t - \lambda_p \sin\lambda_p t)(C_1 \cos 2\pi px + C_2 \sin 2\pi px), & t < 0, \end{cases}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. *Если существует решение задачи (7) - (10), то оно единственно только тогда, когда выполнены условия (17) при всех* $k \in \mathbb{K}$.

При доказательстве единственности решения задачи 1.1 используется только полнота системы функций (12) в пространстве $L_2[0,1]$.

Утверждение 2. *Если α является рациональным числом, то при больших k справедлива оценка*

$$|d_\alpha(k)| \geq C_0 > 0. \tag{18}$$

Утверждение 3. *Пусть выполнены условия (17) и (18), $\psi(x) \in C^3[0,1]$ и на $[0,1]$ имеет кусочно-непрерывную производную четвертого порядка, $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(1)$, $i = \overline{0,3}$. Тогда задача (7) - (10) однозначно разрешима, и это решение определяется рядом (14).*

При решении задач 1.2 и 1.3 применяются системы корневых функций одномерных задач для уравнения

$$X''(x) + \lambda_k^2\, X(x) = 0, \;\; 0 < x < 1,$$

где $\lambda_k = 2\pi k$, с соответствующими граничными условиями

$$X(0) = X(1), \;\; X'(0) = 0 \;\text{ и }\; X'(0) = X'(1), \;\; X(1) = 0:$$

$$\{\cos 2\pi kx\}_{k=1}^{\infty},\quad 1,\quad \{x\sin 2\pi kx\}_{k=1}^{\infty}; \tag{19}$$

$$\{4(1-x)\cos 2\pi kx\}_{k=1}^{\infty},\ 2(1-x),\ \{4\sin 2\pi kx\}_{k=1}^{\infty}, \tag{20}$$

которые построены в работе[3]. Системы функций (19) и (20) являются биортонормированными, полны и образуют базис в пространстве L_2.

Используя системы (19) и (20) решение задачи 1.2 построено в виде суммы биортогонального ряда

$$u(x,t) = u_0(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\cos 2\pi kx + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(t) x\sin 2\pi kx, \tag{21}$$

где

$$u_k(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{4\pi k\widetilde{\psi_k}\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k d_\alpha(k)} - w_k(-\alpha) + \psi_k + 4\pi k\widetilde{\psi_k}t\right)\dfrac{e^{-\lambda_k^2 t}}{d_\alpha(k)}, & t>0,\\ \left(\dfrac{4\pi k\widetilde{\psi_k}\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k d_\alpha(k)} - w_k(-\alpha) + \psi_k\right)\times & \\ \dfrac{(\cos\lambda_k t - \lambda_k\sin\lambda_k t)}{d_\alpha(k)} + \dfrac{4\pi k\widetilde{\psi_k}\sin\lambda_k t}{\lambda_k d_\alpha(k)} + w_k(t), & t<0,\end{cases}$$

$$w_k(t) = -\frac{2\pi k\widetilde{\psi_k}}{\lambda_k d_\alpha(k)}\Big[\frac{\sin\lambda_k t}{\lambda_k} - t(\cos\lambda_k t + \lambda_k\sin\lambda_k t)\Big],$$

$$\psi_0 = \int_0^1 \psi(x)(1-x)dx,\quad \widetilde{\psi_k} = 4\int_0^1 \psi(x)\sin(2\pi kx)dx, \tag{22}$$

$$\psi_k = 4\int_0^1 \psi(x)(1-x)\cos(2\pi kx)dx,$$

функции $v_k(t)$ и $u_0(t)$ определяются по формулам (15) и (16), а ψ_0 и $\widetilde{\psi_k}$ находится из равенств (22).

Утверждение 4. *Если существует решение нелокальной задачи (7) - (9) и (11), то оно единственно только тогда, когда выполнено условие (17) при всех $k \in \mathbb{K}$.*

Утверждение 5. *Пусть выполнены условия (17), (18) и $\psi(x) \in C^4[0,1]$ и на $[0,1]$ имеет кусочно-непрерывную производную пятого порядка, и $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(1)$, $i = 0,2,4$, $\psi^{(j)}(0) = 0$, $j = 1,3$. Тогда задача*

[3]Моисеев, Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35. – №8. – С. 1094 – 1100.

(7) – (9) и (11) однозначно разрешима, и это решение определяется в виде суммы ряда (21).

Аналогично в случае нелокальной задачи 1.3 установлен критерий единственности решения, которое построено в виде суммы биортогонального ряда по системе корневых функций (20), коэффициенты которого находятся по системе (19).

Глава 2 посвящена изучению начально-граничной и нелокальных задач для вырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области. Также методом спектральных разложений установлены критерии единственности и доказаны теоремы существования решения рассмотренных задач.

Рассмотрим уравнение (5) при всех $m > 0$, т.е. уравнение

$$Lu \equiv \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = 0, & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2(-t)^m u = 0, & t < 0, \end{cases} \tag{23}$$

в прямоугольной области D. Для уравнения (23) поставлены и исследованы следующие начально-граничная и нелокальные задачи.

ЗАДАЧА 2.1. *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^{2,1}_{x,t}(D_+); \tag{24}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D_- \cup D_+; \tag{25}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1; \tag{26}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta, \tag{27}$$

где $\psi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

ЗАДАЧА 2.2. *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям* (24) – (26) и

$$u(0,t) = u(1,t), \quad u_x(0,t) = u_x(1,t), \quad -\alpha \le t \le \beta.$$

Здесь $\psi(x)$ – заданная функция, $\psi(0) = \psi(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$.

ЗАДАЧА 2.3. *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям* (24) – (26) и

$$u(0,t) = u(1,t), \quad u_x(0,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta, \tag{28}$$

при этом $\psi(x)$ – заданная функция, $\psi(0) = \psi(1)$, $\psi'(0) = 0$.

Задача 2.4. *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям* (24) – (26) и

$$u_x(0,t) = u_x(1,t), \quad u(1,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta,$$

где $\psi(x)$ – заданная функция, $\psi'(0) = \psi'(1)$, $\psi(1) = 0$.

Методом разделения переменных построено множество частных решений уравнения (23), удовлетворяющих условиям (24), (25) и (27). Например, решение задачи 2.1 построено в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) \sin \pi k x, \tag{29}$$

где функции $u_k(t)$ имеют вид:

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi_k}{\delta_\alpha(k)\sqrt{\alpha}} e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ \dfrac{\psi_k\sqrt{-t}}{\delta_\alpha(k)\sqrt{\alpha}} \left[\lambda_k^2 \gamma_{\frac{1}{2q}}(k) J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q) + \gamma_{-\frac{1}{2q}}(k) J_{-\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)\right], & t < 0, \end{cases}$$

где $\gamma_{\frac{1}{2q}}(k) = \frac{1}{2q}\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_k}\right)^{\frac{1}{2q}}$, $\gamma_{-\frac{1}{2q}}(k) = -\frac{1}{2q}\Gamma\left(-\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_k}\right)^{-\frac{1}{2q}}$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, $J_\nu(z)$, $J_{-\nu}(z)$ – функции Бесселя первого рода, $p_k = \sqrt{b^2 + (\pi k)^2}/q$, $q = (m+2)/2$, ψ_k – коэффициенты разложения функций $\psi(x)$ по системе $\{\sin(\pi k x)\}_{k=1}^{+\infty}$,

$$\delta_\alpha(k) = \lambda_k^2 \gamma_{\frac{1}{2q}}(k) J_{\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q) + \gamma_{-\frac{1}{2q}}(k) J_{-\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q) \ne 0, \ k \in \mathbb{N}. \tag{30}$$

Если нарушено условие (30) при некоторых α и $k = l \in \mathbb{N}$, то однородная задача (24) – (27) (где $\psi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_l(x,t) = \begin{cases} e^{-\lambda_l^2 t} \sin \pi l x, & t > 0, \\ \sqrt{-t}\left[\lambda_l^2 \gamma_{\frac{1}{2q}}(k) J_{\frac{1}{2q}}(p_l(-t)^q) + \gamma_{-\frac{1}{2q}}(k) J_{-\frac{1}{2q}}(p_l(-t)^q)\right] \times & \\ \times \sin \pi l x, & t < 0. \end{cases}$$

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 6. *Если существует решение задачи (24) – (27), то оно единственно только тогда, когда выполнено условие (30) при всех $k \in \mathbb{N}$.*

Утверждение 7. *Если выполнено одно из следующих условий:* 1) $\alpha_q = \alpha^q/q$ *- любое натуральное число;* 2) $\alpha_q = n/m$ *- любое дробное рациональное число, где* n *и* m, $4q$ *и* m*- взаимно-простые натуральные числа, то при больших* k *справедлива оценка*

$$|k^{-1-\lambda}\delta_\alpha(k)| \geq C > 0, \quad \lambda = 1/2 - 1/2q. \tag{31}$$

Утверждение 8. *Пусть выполнены условия (30) и (31) и* $\psi(x) \in C^3[0,1]$ *и на сегменте* $[0,1]$ *имеет кусочно-непрерывную производную четвертого порядка,* $\psi(0) = \psi(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0$, *тогда задача (24) – (27) однозначно разрешима. Это решение определяется рядом* (29).

В случае **задачи 2.2** установлен критерий единственности решения, которое построено в виде суммы ряда по собственным функциям одномерной задачи на собственные значения.

При исследовании **задач 2.3** и **2.4** используется биортонормированная система (19) и (20). На их основе установлены необходимые и достаточные условия единственности решения задач. При этом сами решения построены в виде суммы биортогонального ряда. Для примера приведем результаты по задаче 2.3.

Утверждение 9. *Если существует решение нелокальной задачи* 2.3, *то оно единственно только тогда, когда при всех* $k \in \mathbb{K}$ *выполнено условие*

$$\delta_\alpha(k) = \lambda_k^2 \gamma_{\frac{1}{2q}}(k) J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) + \gamma_{-\frac{1}{2q}}(k) J_{-\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) \neq 0. \tag{32}$$

Решение задачи 2.3 построено в виде суммы биортогонального ряда (21), где

$$v_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\widetilde{\psi_k}}{\delta_\alpha(k)\sqrt{\alpha}} e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ \dfrac{\widetilde{\psi_k}\sqrt{-t}}{\delta_\alpha(k)\sqrt{\alpha}} \left[\lambda_k^2 \gamma_{\frac{1}{2q}}(k) J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q) + \gamma_{-\frac{1}{2q}}(k) J_{-\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)\right], & t < 0, \end{cases} \tag{33}$$

$$u_k(t)=\begin{cases}\dfrac{4\pi k\widetilde{\psi_k}}{\delta_\alpha(k)\sqrt{\alpha}}e^{-\lambda_k^2t}t+F_ke^{-\lambda_k^2t}, & t>0,\\ w_k(t)-\dfrac{4\pi k\widetilde{\psi_k}}{\delta_\alpha(k)\sqrt{\alpha}}\gamma_{\frac{1}{2q}}(k)\sqrt{-t}J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)+ & \\ +F_k\left(\lambda_k^2\gamma_{\frac{1}{2q}}(k)\sqrt{-t}J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)+\right. & \\ \left.+\gamma_{-\frac{1}{2q}}(k)\sqrt{-t}J_{-\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)\right), & t<0,\end{cases} \tag{34}$$

$$u_0(t)=\begin{cases}\dfrac{\psi_0}{\delta_\alpha^0\sqrt{\alpha}}e^{-b^2t}, & t>0,\\ \dfrac{\psi_0\sqrt{-t}}{\delta_\alpha^0\sqrt{\alpha}}\left[b^2\gamma^0_{\frac{1}{2q}}J_{\frac{1}{2q}}(p_0(-t)^q)+\gamma^0_{-\frac{1}{2q}}J_{-\frac{1}{2q}}(p_0(-t)^q)\right], & t<0,\end{cases} \tag{35}$$

$$w_k(t)=-\frac{\pi^2k\widetilde{\psi_k}}{q^2\sqrt{\alpha}\delta_\alpha(k)\sin\frac{\pi}{2q}}(-t)^{q+\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\Bigg[\Bigg(\frac{\lambda_k^2\gamma_{\frac{1}{2q}}}{p_k}[J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)J_{-\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)+J_{1+\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)J_{1-\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q))]+$$

$$+\gamma_{-\frac{1}{2q}}(-t)^q[J^2_{-\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)-J_{-1-\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)J_{1-\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)]\Bigg)J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)-$$

$$-\Bigg(\lambda_k^2\gamma_{\frac{1}{2q}}(-t)^q[J^2_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)-J_{-1+\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)J_{1+\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)]-$$

$$-\frac{\gamma_{-\frac{1}{2q}}}{p_k}[J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)J_{-\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)+J_{1+\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)J_{1-\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)]\Bigg)\times$$

$$\times J_{-\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)\Bigg],$$

$$F_k=\frac{\psi_k-w_k(-\alpha)}{\delta_\alpha(k)}+\frac{4\pi k\widetilde{\psi_k}}{\delta^2_\alpha(k)}\gamma_{\frac{1}{2q}}(k)J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q),$$

$$\delta^0_\alpha=b^2\gamma^0_{\frac{1}{2q}}J_{\frac{1}{2q}}(p_0\alpha^q)+\gamma^0_{-\frac{1}{2q}}J_{-\frac{1}{2q}}(p_0\alpha^q)\neq 0,$$

$p_0=b/q$, $\gamma^0_{\frac{1}{2q}}=\frac{1}{2q}\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_0}\right)^{\frac{1}{2q}}$, $\gamma^0_{-\frac{1}{2q}}=-\frac{1}{2q}\Gamma\left(-\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_0}\right)^{-\frac{1}{2q}}$, ψ_k - коэффициенты разложения функции $\psi(x)$ по системе $\{(1-x)\cos 2\pi kx\}$, $\widetilde{\psi_k}$ – коэффициенты разложения функции $\psi(x)$ по системе $\{\sin 2\pi kx\}$, ψ_0 – коэффициенты разложения функции $\psi(x)$ по системе $\{2(1-x)\}$, $v_k(t)$ определяются по формуле (33), а $u_0(t)$ по формуле (35) при $k=0$.

Утверждение 10. *Пусть выполнены условия (32) и (31),* $\psi(x)\in C^3[0,1]$ *и на сегменте* $[0,1]$ *имеет кусочно - непрерывную производную* *четвертого порядка,* $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(1)$, $i = 0, 2$, $\psi^{(j)}(0) = 0$, $j = 1, 3$, *тогда задача (24) - (26) и (28) однозначно разрешима, и решение определяется рядом (21), у которого коэффициенты задаются равенствами (33), (34), и (35).*

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Доказательство единственности и существования решения задачи с условиями периодичности для невырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области. Установлен критерий единственности, а само решение построено в виде суммы тригонометрического ряда Фурье.

2. Доказательство единственности и существования решения нелокальных задач для невырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области, решение которых построено в виде суммы биортогонального ряда. Установлен критерий единственности.

3. Доказательство единственности и существования решения начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области. Установлен критерий единственности и решение построено в виде суммы ряда Фурье.

4. Доказательство единственности и существования решения нелокальных задач для вырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области. Установлен критерий единственности. Решение построено в виде суммы биортогонального ряда.

Автор выражает благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Сабитову Камиль Басировичу за ценные советы и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (конкурс "Агидель"грант № 05.01.979.13) и Академии наук Республики Башкортостан (грант № 13/3-ФМ).

Публикации по теме диссертации

1. *Рахманова, Л.Х.* О решении одной нелокальной задачи спектральным методом для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа / Л.Х. Рахманова // Материалы Всероссийской конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения". – Самара: "Универс - групп". – 2005. – С. 65.

2. *Рахманова, Л.Х.* Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области / Л.Х. Рахманова // Материалы Международной научн. конференции "Современные проблемы дифференц. уравнений, теории операторов и космических технологий". – Алматы. – 2006. – С. 87.

3. *Рахманова, Л.Х.* Нелокальная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа / Л.Х. Рахманова // Труды Стерлитамакского филиала Академии наук РБ. Серия "Физико-математические и технические науки". Выпуск 3. – Уфа: Гилем. – 2006. – С. 161 -168.

4. *Рахманова, Л.Х.* Нелокальная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа / Л.Х. Рахманова // Материалы Международной конференции "Тихонов и современная математика: Функциональный анализ и дифференциальные уравнения". – Москва: МГУ. – 2006. – С. 237.

5. *Рахманова, Л.Х.* О первой граничной задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа / Л.Х. Рахманова // Материалы конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения". – Самара: "Универс - групп". – 2007. – С. 97.

6. *Рахманова, Л.Х.* Нелокальная задача для смешанного уравнения параболо-гиперболического типа / Л.Х. Рахманова // Тезисы докладов Международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения посвященной 100 - летию со дня рождения академика И.Н. Векуа . – Новосибирск. – 2007. – С. 261.

7. *Рахманова, Л.Х.* Решение нелокальной задачи спектральным методом для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной / Л.Х. Рахманова // Известия вузов. Математика. 2007. –

№11 (546). – С. 36 - 40.

8. *Рахманова, Л.Х.* Начально-граничная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа / Л.Х. Рахманова // Труды Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы посвященной юбилеям академиков Ильина В.А. и Моисеева Е.И. – Уфа: Гилем. – 2008. — Т.3. – С. 137 - 142.

9. *Рахманова, Л.Х.* Задача с периодическими граничными условиями для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа / Л.Х. Рахманова // Материалы Международного Российско-Азербайджанского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики". – Эльбрус: КБГУ. – 2008. – С. 197

10. *Рахманова, Л.Х.* Задача с условиями периодичности для уравнения параболо-гиперболического типа / Л.Х. Рахманова // Материалы Международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений посвященной 70-летию академика В.А. Садовничего. – М: Изд-во "Университетская книга". – 2009. – С. 195.

11. *Рахманова, Л.Х.* Задача с условиями периодичности для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа / Л.Х. Рахманова // Труды Стерлитамакского филиала Академии Наук РБ. Серия "Физико-математические и технические науки". – Вып. 6. – 2009. – С. 76 – 84.

12. *Сабитов, К.Б.* Локальные и нелокальные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа / К.Б. Сабитов, Л.Х. Рахманова // Материалы Международной научн. конференции "Современные проблемы дифференц. уравнений, теории операторов и космических технологий". – Алматы. – 2006. – С. 94.

13. *Сабитов, К.Б.* Начально-граничная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области / К.Б. Сабитов, Л.Х. Рахманова // Дифференциальные уравнения. –2008. – Т.44. – №9. – С. 1175 - 1181.

Подписано в печать 17.11.2009.
Формат 60 × $84_{1/16}$.
Гарнитура «Times».
Печать оперативная.
Усл. печ. л. 1.
Тираж 110 экз.
Заказ № [illegible]/09.

Отпечатано в типографии
Стерлитамакской государственной
педагогической академии
им. Зайнаб Биишевой:
453103, г. Стерлитамак, пр. Ленина, 49.

10 –