На правах рукописи

Мухарлямов Руслан Камилевич

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА И МАКСВЕЛЛА

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Казань – 2006

Работа выполнена на кафедре теории относительности и гравитации Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина Министерства образования и науки РФ

Научный руководитель:

доктор физ. -мат. наук, профессор
Захаров Алексей Васильевич

Официальные оппоненты:

доктор физ. -мат. наук, профессор
Лукаш Владимир Николаевич

кандидат физ. – мат. наук, доцент
Сушков Сергей Владимирович

Ведущая организация:

Институт космических исследований, РАН

Защита состоится " " 2005 г. в ч. на заседании диссертационного совета Д 212.081.15 в Казанском государственном университете им.В. И. Ульянова-Ленина по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, д.18.

С диссертацией можно ознакомится в Научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан " " 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Ерёмин М. В.

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Как известно, макроскопические уравнения Максвелла для сред могут быть получены из микроскопических уравнений Максвелла с помощью усреднения последних по ансамблям. Впервые эта задача была поставлена и решена Лоренцем. Хотя изначально идея макроскопического описания была сформулирована в электродинамике, она необходима во многих других областях физики, в том числе и в общей теории относительности (ОТО). Было бы естественно предположить, что макроскопические уравнения Эйнштейна можно получить путем статистического усреднения микроскопических полевых уравнений, т. е. уравнений Эйнштейна, в правой части которых стоит сумма тензоров энергии—импульса отдельных частиц, что соответствует распределению вещества в виде отдельных малых источников гравитационного поля. Однако, проблема макроскопического описания в ОТО намного сложнее, чем в электродинамике, где максвелловские микроскопические уравнения легко усредняются благодаря их линейности. Одна из трудностей в получение макроскопических уравнений Эйнштейна заключается в нелинейности гравитационных полевых уравнений. Вследствие этого обобщенные уравнения Эйнштейна для сплошной среды отличаются от классических уравнений дополнительными слагаемыми. Отсюда следует, что классические уравнения Эйнштейна, строго говоря, не являются макроскопическими, так как в правой части этих уравнений феноменологически вводят тензор – энергии импульса для сплошной среды, что требует определенного обоснования.

Проблемой перехода в общей теории относительности от микроскопического к макроскопическому описанию занимались многие ученные. Впервые задача о построение макроскопических уравнений Эйнштейна была поставлена, и с определенной строгостью решена, для частного случая, Широковым М. Ф. в 60-х годах, им же было предложено применение макроскопических уравнений Эйнштейна для построения космологических моделей.

С точки зрения Р.М. Залалетдинова, следует изучать прежде всего проблему, как из начального риманова пространства находить среднее пространство, которому соответствуют усредненные геометрические объекты: метрика, связность, кривизна. Залалетдинов предлагает схему усреднения тензора с помощью билокальных операторов. Эти операторы переводят тензоры из точки в точку. Одной из возможных реализаций этого оператора является параллельный перенос тензоров вдоль геодезических линий. При этом возникает проблема разделения на части среднего от произведения объектов, которые входят в усредненные уравнения Эйнштейна. Для решения этой проблемы вводится несколько корреляционных тензоров. Окончательно макроскопические уравнения Эйнштейна переписаны Залалетдиновым таким образом, что в них кроме усредненной метрики входят и введенные корреляционные тензоры.

С нашей точки зрения наиболее последовательный и динамически обоснованный план усреднения уравнений Эйнштейна был предложен Ю. Г. Игнатьевым. Основной идеей в схеме усреднения Ю. Г. Игнатьева является концепция статистической инертности гравитационного поля:

гравитационное поле системы частиц носит макроскопический характер и лишь малая микроскопическая составляющая определяется взаимодействием частиц и полей. Эта концепция позволяет развивать теорию возмущения. Истинная микроскопическая метрика гравитационного поля, создаваемого всеми частицами, представляется в виде суммы средней метрики и малого вклада, обусловленного микроскопическим взаимодействием частиц Данный подход позволяет получить общерелятивистскую цепочку уравнений, связывающую функции корреляции разного порядка и в конечном итоге описать ансамбль частиц одночастичной функцией распределения.

А. В. Захаров продолжил идеи Ю. Г. Игнатьева. Отказавшись от цели получения точных макроскопических полевых уравнений, он разработал метод усреднения уравнений Эйнштейна и Максвелла для системы взаимодействующих частиц, ограничившись членами второго порядка малости по взаимодействию. Дополнительные слагаемые, появляющиеся в уравнениях Эйнштейна и Максвелла, имеют определенный вид. Они являются интегралами в импульсном пространстве от конкретных выражений, зависящих от одночастичных функций распределения каждой из компонент среды.

Термин "порядок малости по взаимодействию"означает следующие. Уравнения Эйнштейна разлагаются по малой амплитуде гравитационного возмущения h_{ij}, обусловленное взаимодействием частиц. Амплитуда имеет порядок отношения радиуса Шварцшильда и среднего расстояние между частицами

$$\gamma = \frac{2Gm}{c^2 r} = \frac{\tilde{r}_g}{r} \ll 1,$$

где m – масса взаимодействующих частиц. Безразмерный параметр γ представляет собой малый параметр взаимодействия.

При выводе макроскопических уравнений Эйнштейна предполагается, что доминирующими являются далекие столкновения частиц. Это справедливо, если

$$\frac{E_p}{E_k} \ll 1,$$

где E_p – потенциальная энергия взаимодействующих частиц, E_k – их кинетическая энергия. В состоянии локального термодинамического равновесия можно положить

$$E_k \sim kT, \quad E_p \sim Gm^2 r \sim Gm^2 n^{1/3}.$$

Из последних трех соотношений следует система неравенств:

$$\tilde{r}_g \ll r_{min} \ll r.$$

Здесь $r_{min} = Gm^2/kT$ – расстояние на котором $E_p = E_k$.

Для электромагнитно взаимодействующих частиц получим

$$E_p \sim e^2 r \sim e^2 n^{1/3}, \quad r_{min} = e^2/kT.$$

Тема работы является актуальной для общерелятивистской кинетической теории материи и космологии.

Цель работы. Данная работа продолжает исследования А. В. Захарова. А именно, здесь мы обобщаем процедуру усреднения полевых уравнений в рамках ОТО для системы взаимодействующих частиц с разными массами. В рамках этой работы рассматриваются следующие задачи:

- Вывод макроскопических уравнений Эйнштейна для системы гравитационно взаимодействующих частиц с разными массами.
- Вывод макроскопической системы уравнений Эйнштейна - Максвелла для системы частиц с разными массами с преобладанием элекромагнитных межчастичных взаимодействий.
- Исследование макроскопических полевых уравнений для среды, находящейся в состоянии локального термодинамического равновесия.
- Приложение макроскопических уравнений Эйнштейна в космологии:

  - оценка дополнительных слагаемых в мире Фридмана с учетом состава вещества во Вселенной;

  - построение анизотропных космологических моделей.

Методы исследования. Исследования проводились с использованием методов общей теории относительности и релятивистской кинетической теории.

Теоретическое и практическое значение.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты являются обобщением полевых уравнений в рамках ОТО. Новые уравнения могут быть использованы при исследованиях взаимодействия гравитационных и электромагнитных полей со сплошной средой, а так же в астрофизике и космологии.

Научная новизна.

1. Были обобщены макроскопические уравнения Эйнштейна для системы гравитационно взаимодействующих частиц с разными массами. Полученные уравнения гравитационного поля для сплошных сред отличаются от классических уравнений Эйнштейна наличием дополнительных слагаемых в левой части, обусловленные двухчастичными взаимодействиями.

2. Была обобщена макроскопическая система уравнений Эйнштейна - Максвелла для системы частиц с разными массами. В рассматриваемой системе доминирующими являются электромагнитные взаимодействия. Макроскопические уравнения гравитационного поля для релятивистской плазмы отличаются от классических уравнений Эйнштейна присутствием в левой части дополнительных слагаемых. Макроскопические уравнения Максвелла в общей теории относительности также оказались отличными от классических уравнений Максвелла, благодаря появлению в левой части дополнительных слагаемых. Эти слагаемые обусловлены эффектами взаимодействия.

3. Получено решение для модели I типа Бианки с учетом дополнительных слагаемых в уравнениях Эйнштейна.

4. Построена слабоанизотропная и однородная космологическая модель с осевой симметрией. Исследован процесс изотропизации анизотропной модели при наличии и отсутствии космологического однородного магнитного поля для макроскопических уравнений Эйнштейна.

5. На основе макроскопических уравнений Эйнштейна

решена задача о развитии гравитационных возмущений в плоском мире Фридмана в приближении локального термодинамического равновесия. Выявлено отличие нашей модели от ранее исследованных.

Личный вклад автора. Постановка задачи принадлежит научному руководителю. Аналитические расчеты и численные оценки выполнены автором самостоятельно. Обсуждение полученных результатов и написание статей проводились совместно с научным руководителем.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы представлялись на следующих семинарах и конференциях: XII Российская гравитационная конференция (Казань, 2005г.); XVI, XVII Международная летняя школа семинар по современным проблемам теоретической и математической физики "Волга"(Казань, 2004г., 2005г.); Итоговая научная конференция КГУ (Казань, 2003г., 2004г., 2005г.); научный семинар теоретического отдела АКЦ ФИ РАН (Москва, 2005г.); научный семинар ИКИ РАН (Москва, 2005г.); научный семинар кафедры теории относительности и гравитации КГУ (Казань, 2003г., 2004г., 2005г.).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в 10 печатных трудах, из которых 4 – статьи, 6 опубликованы в тезисах докладов конференций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из четырех глав, введения, заключения, содержит 140 страниц текста, включая оглавление и списка литературы, состоящего из 180 наименований.

Краткое содержание работы.

Введение содержит обзор литературы, описание актуальности проблемы, постановку цели и задач, а так же краткое описание работы.

В главе 1 выведены макроскопические уравнения Эйнштейна для гравитационно взаимодействующих частиц с разными массами.

В § 1 рассматривается история и современное состояние проблемы, исследуемой в этой главе.

В § 2 выписываются микроскопические уравнения Эйнштейна. Эти уравнения определяются с помощью функции Климонтовича

$$\tilde{N}_a(q^i, \tilde{p}_j) = \sum_{l=1}^{n_a} \int d\tilde{s} \delta^4(q^i - q^i_{(l)}(\tilde{s})) \delta^4(\tilde{p}_j - \tilde{p}^{(l)}_j(\tilde{s})). \qquad (1)$$

Здесь n_a—число частиц сорта a, $\tilde{s}$ – канонический параметр вдоль траектории частиц:

$$d\tilde{s} = \sqrt{\tilde{g}_{ij} dq^i dq^j}, \qquad (2)$$

где $\tilde{g}^{ij}$ – метрика гравитационного поля создаваемая всеми частицами, $q^i, \tilde{p}_j$ – координаты в восьмимерном фазовом пространстве, $q^i_{(l)}, \tilde{p}^{(l)}_j$ – координаты и импульс l-й частицы сорта a, которые определяются из уравнений движения.

Случайная функция подчиняется уравнению Лиувилля

$$\tilde{p}^i \frac{\partial \tilde{N}_a}{\partial q^i} + \tilde{\Gamma}_{j,ik} \tilde{p}^j \tilde{p}^k \frac{\partial \tilde{N}_a}{\partial \tilde{p}_i} = 0. \qquad (3)$$

Здесь $\tilde{\Gamma}_{j,ik}$ – символы Кристоффеля первого рода, вычисленные по метрике $\tilde{g}_{ij}$.

Микроскопический тензор энергии—импульса частиц среды выражается через $\tilde{N}_a$ следующим образом

$$\tilde{T}^{ij} = \sum_a c \int \frac{d^4\tilde{p}_a}{\sqrt{-\tilde{g}}} \tilde{p}_a^i \tilde{u}_a^j \tilde{N}_a(q^i, \tilde{p}_i). \tag{4}$$

Микроскопические уравнения Эйнштейна запишутся в виде

$$\tilde{G}^{ij} = \chi \tilde{T}^{ij}. \tag{5}$$

Здесь $\tilde{G}^{ij}$ – микроскопический тензор Эйнштейна, вычисленный по метрике $\tilde{g}_{ij}$.

В § 3 предполагается, что гравитационное поле системы частиц носит макроскопический характер и лишь малая микроскопическая составляющая определяется взаимодействием частиц и полей. Истинная метрика $\tilde{g}_{ij}$ гравитационного поля, создаваемого всеми частицами, представляется в виде суммы усредненной метрики g_{ij} и вклада h_{ij}, обусловленного микроскопическим взаимодействием частиц

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + h_{ij}, \quad g_{ij} = \langle \tilde{g}_{ij} \rangle, \quad \langle h_{ij} \rangle = 0. \tag{6}$$

Микроскопическая составляющая h_{ij} рассматривается как малое линейное возмущение макроскопической метрики g_{ij}. Далее уравнения система (1) – (5) разлагаются по малым h_{ij} до второго порядка включительно и усредняются по ансамблю. Выписываются уравнения для тензора h_{ij} и их решение . После усреднения уравнений Эйнштейна и подстановки в них h_{ij} члены разложения будут явно выражены через одночастичные и двухчастичные функции распределения.

В § 4 дан вид релятивистского кинетического уравнения и уравнения на двухчастичную корреляционную функцию с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию, ранее полученные А. В. Захаровым из уравнения Лиувилля (3). Выписано решение для двухчастичной корреляционной функции, зависящие от одночастичной функции распределения.

В параграфе § 5 после упрощения, макроскопические уравнения Эйнштейна принимают вид

$$G_{ij} + \varphi^{k}_{ij;k} + \mu_{ij} = \chi T_{ij}, \tag{7}$$

где G_{ij} – тензор Эйнштейна риманова пространства с макроскопической метрикой g_{ij}, T_{ij} – макроскопический тензор энергии – импульса, описывающий сплошную среду. Показано, что тензора $\varphi^{k}_{ij;k} + \mu_{ij}$ являются интегралами по импульсному пространству от выражений, содержащих одночастичные функции распределения:

$$\varphi^{k}_{ij} = -\sum_{bc} \frac{\chi^3 m_b^2 m_c^2 n_b n_c c^7}{8(2\pi)^3} \int \frac{d^4p'}{\sqrt{(-g)}} \int \frac{d^4p''}{\sqrt{(-g)}} \Big[\frac{1}{2} g^{fk} u''_i u''_j +$$

$$+ u'^k (u'u'')(\delta^f_j u''_i + \delta^f_i u''_j)\Big] \left((u'u'')^2 - \frac{1}{2}\right) K_{fr}(u', u'') \times$$

$$\times \left(f_c(x'') \frac{\partial f_b(x')}{\partial p'_r} - f_b(x') \frac{\partial f_c(x'')}{\partial p''_r} \right), \tag{8}$$

$$\mu_{ij} = -\sum_{bc} \frac{\chi^3 m_b^2 m_c^2 n_b n_c c^7}{8(2\pi)^3} \int \frac{d^4p'}{\sqrt{(-g)}} \int \frac{d^4p''}{\sqrt{(-g)}} \Big\{ \Big[(z^2 + \frac{1}{2})(u''_i u''_j +$$

$$+ u'_i u'_j) + (z^2 - \frac{1}{2}) g_{ij} - 2z(u'_i u''_j + u''_i u'_j) \Big] g^{qr} - 2(z^2 - \frac{1}{2}) \delta^q_i \delta^r_j \Big\} \times$$

$$\times f_c(x'') \frac{\partial}{\partial p'_f} \Big\{ f_b(x') \Big[(z^2 - \frac{1}{2}) \delta^m_f + (z^2 + \frac{1}{2}) u'_f u'^m - 2z u''_f u'^m \Big] \Big\} \times$$

$$\times J_{rqm}(u', u''). \tag{9}$$

Здесь

$$K_{ij}(u', u'') = \frac{4\pi^2}{k_{min}^2[(u'u'')^2 - 1]^{3/2}}\Big\{ - [(u'u'')^2 - 1]g_{ij} -$$

$$-u_i'u_j' - u_i''u_j'' + (u'u'')(u_i'u_j'' + u_i''u_j')\Big\}, \tag{10}$$

$$J_{ijk}(u', u'') = A\Big[(g_{ij}u_k' + g_{ik}u_j' + g_{jk}u_i') - z(g_{ij}u_k'' + g_{ik}u_j'' + g_{jk}u_i'')-$$

$$-(u_i'u_j''u_k'' + u_i''u_j'u_k'' + u_i''u_j''u_k') + 3zu_i''u_j''u_k''\Big]+$$

$$+C\Big[u_i'u_j'u_k' - z(u_i'u_j'u_k'' + u_i'u_j''u_k' + u_i''u_j'u_k')+$$

$$+z^2(u_i'u_j''u_k'' + u_i''u_j'u_k'' + u_i''u_j''u_k') - z^3u_i''u_j''u_k''\Big], \tag{11}$$

$$A = \frac{\pi}{k_{min}}\frac{(\mu^2 + 2\mu z + 1)^{1/2}(1 + \mu z)^2}{\mu^3(z^2 - 1)^{5/2}}\times$$

$$\times\Bigg[\frac{2\mu\sqrt{z^2 - 1}(1 + 3\mu^2 + 2\mu z - 2\mu^2 z^2)}{(1 + \mu z)(\mu^2 + 2\mu z + 1)}+$$

$$+\frac{(1 - 3\mu^2 + 2\mu z + 4\mu^2 z^2)}{(1 + \mu z)^2}\ln\left(\frac{1 + \mu z - \mu\sqrt{z^2 - 1}}{1 + \mu z + \mu\sqrt{z^2 - 1}}\right)\Bigg], \tag{12}$$

$$C = \frac{\pi}{k_{min}}\frac{(\mu z + 1)}{(1 + 2\mu z + \mu^2)^{1/2}\mu^3(z^2 - 1)^{7/2}}\times$$

$$\times\Bigg[2\mu\sqrt{z^2 - 1}(5 + 7\mu^2 + 10\mu z - 2\mu^2 z^2)+$$

$$+ + \frac{(1 + 2\mu z + \mu^2)}{(1 + \mu z)}(5 - 7\mu^2 + 10\mu z + 12\mu^2 z^2)\times$$

$$\times\ln\left(\frac{1 + \mu z - \mu\sqrt{z^2 - 1}}{1 + \mu z + \mu\sqrt{z^2 - 1}}\right)\Bigg]. \tag{13}$$

где u'_i, u''_i – 4 - скорости частиц сорта b и сорта c, соответственно, $z = (u'u'') = (u'^i u''_i)$, f_b и f_c – восьмимерные одночастичные функции распределения, $\mu = m_b/m_c$.

Эти дополнительные слагаемые пропорциональны постоянной Эйнштейна в третьей степени и квадрату плотности частиц. Тензор μ_{ij} является бесследовым

$$g^{ij}\mu_{ij} = 0. \tag{14}$$

Тензор $\varphi^k_{ij;k} + \mu_{ij}$ должен подчиняться условию

$$g^{mj}\left(\varphi^k_{ij;k} + \mu_{ij}\right)_{;m} = 0, \tag{15}$$

так как дивергенция тензоров G_{ij} и T_{ij} обращается в нуль.

Глава 2 посвящена выводу макроскопической системы уравнений Эйнштейна – Максвелла для систем, в которых доминирующими являются электромагнитные межчастичные взаимодействия.

В § 1 формулируется задача **Главы 2**.

В § 2 определяется микроскопическая система уравнений Эйнштейна – Максвелла

$$\tilde{G}^{ij} = \chi\tilde{T}^{ij}_{(m)} + \tilde{T}^{ij}_{(\mathrm{el})}, \tag{16}$$

$$\tilde{\nabla}_k\tilde{F}^{ik} = -\frac{4\pi}{c}\tilde{J}^i. \tag{17}$$

Здесь $\tilde{T}^{ij}_{(m)}$ – микроскопический тензор энергии—импульса частиц среды, $\tilde{F}^{ik}$ – тензор электромагнитного поля (тензор Максвелла), $\tilde{J}^i$ – микроскопический 4 - вектор тока, $\tilde{T}^{ij}_{(\mathrm{el})}$ – тензор энергии – импульса электромагнитного поля. Операции поднимания и опускания индексов производятся здесь с помощью метрического тензора $\tilde{g}_{ij}$ и обратного к нему $\tilde{g}^{ij}$. Символ $\tilde{\nabla}_k$ обозначает ковариантную производную в римановом пространстве с метрикой $\tilde{g}_{ij}$. Здесь микроскопический ток так же определяется через функцию Климонтовича $\tilde{N}_a$

$$\tilde{J}^i = \sum_b e_b c \int \frac{d^4\tilde{p}}{\sqrt{-\tilde{g}}} \tilde{u}^i_b \tilde{N}_b(q, \tilde{p}). \tag{18}$$

Тензор энергии – импульса для электромагнитного поля

$$\tilde{T}^{ij}_{(\text{el})} = \frac{1}{4\pi}\left(-\tilde{F}^i_{.l}\tilde{F}^{jl} + \frac{1}{4}\tilde{g}^{ij}\tilde{F}_{lm}\tilde{F}^{lm}\right). \tag{19}$$

Случайная функция подчиняется уравнению Лиувилля с учетом электромагнитного взаимодействия

$$\tilde{p}^i \frac{\partial \tilde{N}_a}{\partial q^i} + \tilde{\Gamma}_{j,ik}\tilde{p}^j\tilde{p}^k \frac{\partial \tilde{N}_a}{\partial \tilde{p}_i} + \frac{e_a}{c}\tilde{F}_{ik}\tilde{p}^k \frac{\partial \tilde{N}_a}{\partial \tilde{p}_i} = 0. \tag{20}$$

Микроскопическую метрику $\tilde{g}_{ij}$ гравитационного поля, создаваемого всеми частицами, записывается в виде суммы усредненной метрики g_{ij} и вклада h_{ij}, обусловленного микроскопическим взаимодействием частиц. Тензор электромагнитного поля $\tilde{F}_{ik}$ также представляется в виде суммы усредненного тензора Максвелла F_{ik} и микроскопического вклада ω_{ik}, обусловленным электромагнитным взаимодействием

$$\tilde{F}_{ik} = F_{ik} + \omega_{ik}. \tag{21}$$

Далее уравнения системы (16) – (17) разлагаются по малым h_{ij} и ω_{ik} до второго порядка включительно и усредняются по ансамблю. Выписываются уравнения и решения для тензоров h_{ij} и ω_{ik}.

В § 3 и § 4 макроскопическая система уравнений Эйнштейна – Максвелла приводится к виду

$$G_{ij} + \nabla_k \varphi^{*k}_{ij} + \mu^*_{ij} - \chi \tau^{(gr)}_{ij} = \chi T_{ij}, \tag{22}$$

$$\nabla_k F^{ik} + \nabla_k \varphi^{ki} + \mu^i = -\frac{4\pi}{c} J^i. \tag{23}$$

Здесь F^{ik} – макроскопический тензор Максвелла, J^i – макроскопический 4 – вектор плотности электрического тока. T_{ij} представляет собой сумму макроскопических тензоров энергии – импульса $T^{(m)}_{ij}$ среды, макроскопического электромагнитного поля $T^{(\mathrm{el})}_{ij}$, и макроскопического тензора энергии – импульса $\tau^{(r)}_{ij}$ электромагнитного излучения в плазме. (Применительно к космологической плазме мы будем говорить в последнем случае о тензоре энергии – импульса реликтового излучения.) Показано, что тензор $\nabla_k \varphi^{*k}_{ij} + \mu^*_{ij} - \chi \tau^{(gr)}_{ij}$ пропорционален первой степени гравитационной постоянной Эйнштейна и квадрату плотности числа частиц. Дополнительное слагаемое $\nabla_k \varphi^{ki} + \mu^i$ пропорционален квадрату гравитационной постоянной Эйнштейна и квадрату плотности числа частиц. Тензоры φ^{*k}_{ij}, μ_{ij}, $\tau^{(gr)}_{ij}$ и μ^i обязаны подчиняться дополнительным условиям

$$g^{lj} \nabla_l \left(\nabla_k \varphi^{*k}_{ij} + \mu^*_{ij} - \chi \tau^{(gr)}_{ij} \right) = 0, \quad \nabla_i \mu^i = 0, \tag{24}$$

так как дивергенции всех остальных тензоров в макроскопических уравнениях Эйнштейна и Максвелла тождественно равны нулю.

В главе 3 рассматриваются макроскопические полевые уравнения для среды, находящейся в состоянии локального термодинамического равновесия.

В § 1 получен конкретный вид дополнительных слагаемых макроскопических уравнения Эйнштейна и Максвелла для равновесной семимерной функции распределения Юттнера

$$F_b = A_b \exp\left(-\frac{c}{k_B T} u^i p_i\right). \qquad (25)$$

Здесь u^i – макроскопическая 4 - скорость движения плазмы как целого, p_i – 4 - импульс частицы, k_B— постоянная Больцмана, T—температура. Для этой функции распределения дополнительные слагаемые макроскопических уравнений Эйнштейна имеют структуру тензора энергии - импульса идеальной жидкости с уравнением состояния

$$\tilde{p} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{3}, \qquad (26)$$

где $\tilde{\varepsilon}$ – плотность энергии взаимодействия. Дополнительные слагаемые можно рассматривать как некоторый эффективный тензор энергии – импульса. В результате, для среды, находящейся в состоянии локального термодинамического равновесия макроскопические уравнения Эйнштейна превращаются в обыкновенные с тензором энергии – импульса:

$$T^i_j = (\varepsilon + p - (\tilde{\varepsilon} + \tilde{p}))u^i u_j - (p - \tilde{p})\delta^i_j. \qquad (27)$$

В § 2 получены релятивистские ($mc^2 \ll kT$) и нерелятивистские ($mc^2 \gg kT$) пределы для плотности энергии взаимодействия $\tilde{\varepsilon}$.

Глава 4 посвящена приложению макроскопических уравнений Эйнштейна в космологии.

В § 1 сделаны оценки отношения плотности энергии взаимодействия к обычной плотности энергии вещества в мире Фридмана с учетом состава вещества на каждом этапе эволюции Вселенной. Из этих оценок следует, что макроскопические уравнения Эйнштейна в космологии применимы при температурах излучения $T \ll 10^{13} K$.

В § 2 на основе сделанных оценок обосновываются ранее построенные А. В. Захаровым новые однородные изотропные космологические модели.

В § 3 получено решение для модели I типа Бианки с учетом дополнительных слагаемых.

В § 4 исследуется вопрос о влиянии однородного магнитного поля на анизотропию расширения Вселенной с учетом дополнительных слагаемых в уравнении Эйнштейна.

Параграф § 5 посвящен теории возмущения в мире Фридмана в приближении локального термодинамического равновесия.

В заключении перечислены основные результаты диссертации.

Положения, выносимые на защиту

1. Были обобщены макроскопические уравнения Эйнштейна с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию для системы гравитационно взаимодействующих частиц с разными массами. Полученные уравнения гравитационного поля для сплошных сред отличаются от классических уравнений Эйнштейна наличием дополнительных слагаемых в левой части, выраженных через интегралы по импульсному пространству от тензоров, содержащих одночастичные функции распределения. Эти слагаемые обусловлены двухчастичными взаимодействиями.

2. Была обобщена макроскопическая система

уравнений Эйнштейна - Максвелла для системы частиц с разными массами. В рассматриваемой системе доминирующими являются электромагнитные взаимодействия. Макроскопические уравнения гравитационного поля для релятивистской плазмы отличаются от классических уравнений Эйнштейна присутствием в левой части дополнительных слагаемых. Эти тензоры выражены в явном виде через одночастичные функции распределения. Макроскопические уравнения Максвелла в общей теории относительности также оказались отличными от классических уравнений Максвелла, благодаря появлению в левой части дополнительных слагаемых. Эти слагаемые обусловлены эффектами межчастичных взаимодействий. Они также выражаются в явном виде через одночастичные функции распределения.

3. Получен конкретный вид дополнительных слагаемых макроскопических полевых уравнений для среды, находящейся в состоянии локального термодинамического равновесия. Показано, что структура этих слагаемых имеет вид тензора энергии - импульса идеальной жидкости с уравнением состояния $\tilde{p} = \tilde{\varepsilon}/3$. Если перенести дополнительные слагаемые из левой части макроскопических уравнений Эйнштейна, то они превращаются в обычные уравнения Эйнштейна с дополнительным тензором энергии - импульса идеальной жидкости, но с отрицательной "плотностью энергии".

4. Решены макроскопические уравнения Эйнштейна для модели I типа Бианки. Наличие дополнительных слагаемых вызывает замедление изотропизации расширения модели.

5. Построена слабоанизотропная космологическая модель с осевой симметрией. Исследован процесс

изотропизации анизотропной модели при наличии и отсутствии космологического однородного магнитного поля для макроскопических уравнений Эйнштейна. Показано, что магнитное поле замедляет процесс изотропизации расширения модели.

Публикация результатов диссертации

1. А. В. Захаров, Р. К. Мухарлямов. Макроскопические уравнения Эйнштейна с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию для системы самогравитирующих частиц с разными массами//ЖЭТФ. – 2003. – Т.123. – С. 665–671.

2. А. В. Захаров, Р. К. Мухарлямов. Макроскопическая система уравнений Эйнштейна - Максвелла для системы взаимодействующих частиц с разными массами//ЖЭТФ. – 2004. – Т.126. – С. 1027–1033.

3. А. В. Захаров, Р. К. Мухарлямов. Оценка дополнительных слагаемых макроскопических уравнений Эйнштейна в космологии. Несингулярные космологические модели //Изв. ВУЗов. Физика. – 2004. – № 12. – С. 21 – 26

4. А. В. Захаров, Р. К. Мухарлямов. Дополнительные слагаемые макроскопических уравнений Эйнштейна. Несингулярные космологические модели//Новейшие проблемы теории поля. /Под ред. А. В. Аминовой. – Казань: Изд-во "Хэтер". – 2004. – Т.4. – С. 217 – 230.

5. А. В. Захаров, Р. К. Мухарлямов. Макроскопические уравнения Эйнштейна - Максвелла для системы взаимодействующих частиц. Магнитные модели Вселенной//Тезисы докладов XVI Международной летней

школы - семинара по современным проблемам теоретической и математической физики "Волга'16-2004"(XVI Петровские чтения). – Казань. – 2004. – С. 47.

6. А. В. Захаров, Р. К. Мухарлямов. Несингулярные анизотропные космологические модели//Тезисы докладов XVI Международной летней школы - семинара по современным проблемам теоретической и математической физики "Волга'16-2004"(XVI Петровские чтения). – Казань. – 2004. – С. 48.

7. Р. К. Мухарлямов. Макроскопические уравнения Эйнштейна для системы гравитирующих частиц с разными массами//Тезисы докладов студенческой научной конференции физ. факультета Казанского государственного университета. – Казань. – 2001. – С. 22.

8. А. В. Захаров, Р. К. Мухарлямов. Макроскопическая система уравнений Эйнштейна – Максвелла для системы взаимодействующих частиц//Тезисы докладов XII Российской гравитационной конференции. Международная конференция по гравитации, по космологии и астрофизике, 20 – 26 июня 2005 г, Казань, Россия. – Казань. – 2005. – С. 85.

9. А. В. Захаров, Р. К. Мухарлямов. Макроскопические уравнения Эйнштейна и несингулярные космологические модели//Тезисы докладов XII Российской гравитационной конференции. Международная конференция по гравитации, по космологии и астрофизике, 20 – 26 июня 2005 г, Казань, Россия. – Казань. – 2005. – С. 87.

10. Р. К. Мухарлямов. Гравитационные возмущения и макроскопические уравнения Эйнштейна//Тезисы докладов XVII Международной летней школы - семинара по современным проблемам теоретической и математической

физики "Волга'17-2005"(XVII Петровские чтения). – Казань. – 2005. – С. 29.