КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра математической статистики

Е. А. ТУРИЛОВА, И. А. КАРЕЕВ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Учебно-методическое пособие

Казань — 2016

Принято на заседании кафедры математической статистики
Протокол № 7 от 9 марта 2016 года

Рецензенты:
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математической статистики КФУ **И. Н. Володин**;
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математической статистики КФУ **С. В. Симушкин**;

Турилова Е. А.
Элементы теории меры и интеграл Лебега: учебно-методическое пособие / И. А. Кареев, Е. А. Турилова. — Казань: Казан. ун-т, 2016. — 66 с.

В учебном пособии достаточно кратко (но со вкусом) излагаются основные понятия теории меры и интеграла Лебега. Наличие примеров, замечаний и упражнений делает его удобным для самостоятельной работы студентов над этим курсом.

Предназначено для студентов физико-математических специальностей университетов.

Содержание

Обозначения и сокращения

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — множества всех натуральных, целых, рациональных и вещественных чисел.
- $f \to g$ — поточечная сходимость функции f к g: $f(x) \to g(x)$ $\forall x \in E$, где E — область определения фукнций.
- $f \rightrightarrows g$ — равномерная поточечная сходимость функции f к g на E.
- $f = g$ — поточечная равенство функций f и g.
- $f > g$, $f < g$, $f \geqslant g$, $f \leqslant g$ — функция f больше (меньше, ...) g при каждом значении аргумента.
- $f \circ g$ — оператор суперпозиции: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
- $\langle a, b\rangle$ — интервалы с открытыми и замкнутыми границами: $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b).
- $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ — «следовательно», «тогда и только тогда, когда».
- $\{X_n\}$ — обычно, сокращённая запись для $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- X^{c} — для множества X — его дополнение.
- XY — для множеств X и Y — их пересечение: $X \cap Y$.
- $\sum\limits_{i=1} X_i$ — для семейства множеств $\{X_i\}$ обозначает их объединение $\bigcup_i X_i$, подразумевая при этом, что они попарно не пересекаются: $X_i \cap X_j = \varnothing$ $(i \neq j)$.
- $f(+\infty)$, $f(-\infty)$ — для $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — сокращённая запись для $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
- $f(x-)$, $f(x+)$ — левый и правый пределы в точке x функции f.
- χ_A — функция Хевисайда: $\chi_A(x) = 1$ при $x \in A$, и $\chi_A(x) = 0$ при $x \notin A$

Часть 1. Семейства множеств и меры на них

§1. Полукольца множеств

1 Пусть E — некоторое множество, а $\mathfrak{T}(E)$ — семейство всех его подмножеств.

Определение. Семейство множеств $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{T}(E)$ называется *полукольцом*, если оно удовлетворяет свойствам:

(Π_1) Если $X, Y \in \mathfrak{S}$, то $X \cap Y \in \mathfrak{S}$;

(Π_2) Если $X, Y \in \mathfrak{S}$ и $X \subseteq Y$, то

$$Y = X + \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

где $X_i \in \mathfrak{S}$ и попарно не пересекаются: $X_i \cap X_j = \varnothing \quad (i \neq j)$.

Полукольцо $\mathfrak{S}$ называется *полукольцом с единицей*, если $E \in \mathfrak{S}$.

2 **Примеры.**

1. Класс прямоугольников $\mathfrak{S} = \{\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \subseteq \mathbb{R}^2 \bigm| a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ — полукольцо в $\mathbb{R}^2$.
2. Класс интервалов $\mathfrak{S} = \{\langle a, b\rangle \bigm| a, b \in \mathbb{R}\}$ — полукольцо в $\mathbb{R}$.
3. Класс интервалов $\mathfrak{S} = \{[a, b) \bigm| a, b \in \mathbb{R}\}$ — полукольцо в $\mathbb{R}$.
4. Класс $\mathfrak{S} = \{\langle a, b\rangle,\ (-\infty, a\rangle,\ \langle b, +\infty),\ (-\infty, +\infty) \bigm| a, b \in \mathbb{R}\}$ — полукольцо с единицей в $\mathbb{R}$.
5. Класс $\mathfrak{S} = \{[a, b] \bigm| a, b \in \mathbb{R}\}$ — не полукольцо.

3 *Пусть $\mathfrak{S}$ — полукольцо; множества $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{S}$ ($X_k X_l = \varnothing$ при $k \neq l$), $X \in \mathfrak{S}$ и*

$$X_k \subset X.$$

Тогда существует конечное семейство попарно непересекающихся множеств $\{Y_j\}_{j=1}^{m} \subseteq \mathfrak{S}$ ($Y_j Y_i = \varnothing$ при $i \neq j$) такое, что

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k + \sum_{j=1}^{m} Y_j.$$

Доказательство. Доказательство будет осуществляется индукцией по числу множеств n. При $n = 1$ следует из аксиомы (Π_2).

Предположим, что утверждение верно для всех натуральных чисел, не превосходящих $n - 1$. Тогда существует конечное семейство $\{Y_j\}_{j=1}^m$ такое, что

$$X = \sum_{k=1}^{n-1} X_k + \sum_j Y_j. \tag{1}$$

Рассмотрим $Y_j^* = X_n Y_j$; в силу $X_n \subseteq \sum_j Y_j$ будет выполняться $X_n = \sum_j Y_j^*$. По доказанному

$$Y_j^* \subseteq Y_j \quad \Longrightarrow \quad Y_j = Y_j^* + \sum_l Z_{jl}.$$

Из (1)

$$X = \sum_{k=1}^{n-1} X_k + \sum_j Y_j = \sum_{k=1}^{n-1} X_k + \sum_j Y_j^* + \sum_{j,l} Z_{jl} =$$

(т.к. $\sum_j Y_j^* = X_n$)

$$= \sum_{k=1}^{n} X_k + \sum_{j,l} Z_{jl}.$$

■

4 *Если* $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{S}$, *то существует семейство* $\{Y_j\}_{j=1}^m \subset \mathfrak{S}$ *попарно непересекающихся множеств и наборы индексов* $\sigma_k \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ *такие, что*

$$X_k = \sum_{j \in \sigma_k} Y_j.$$

Доказательство. Доказательство осуществляется индукцией по числу множеств n. При $n = 1$ семейство состоит из самого множества X_1.

Предположим, что утверждение верно для всех натуральных чисел, не превосходящих $n - 1$. Т.к. утверждение верно для $X_1, \ldots, X_{n-1}$, то существует семейство $\{Y_j\}_{j=1}^m$, пригодное для $X_1, \ldots, X_{n-1}$. Пусть $\{Z_q\}_{q=1}^m$ определяется как

$$Z_q = X_n Y_q,$$

тогда

$$Z_q \in \mathfrak{S}, \quad Z_q \subseteq X_n, \quad Z_q Z_r = \varnothing \quad (q \neq r).$$

Из $Z_q \subseteq X_n$ и по п. 3 следует существование конечного семейства $\{Z'_r\}_{r=1}^l \subseteq \mathfrak{S}$ попарно непересекающихся множеств:

$$X_n = \sum_q Z_q + \sum_r Z'_r.$$

Т.к. $Z_q \subseteq Y_q$, то существует конечное семейство $\{Z''_p\}_{p=1}^v \subseteq \mathfrak{S}$ такое, что:

$$Y_q = Z_q + \sum_p Z''_p.$$

Элементы семейств $\{Z_q\}$, $\{Z'_r\}$, $\{Z''_p\}$ попарно не пересекаются, а значит набор $\{Z_q\} \cup \{Z'_r\} \cup \{Z''_p\}$ образует искомое семейство. ■

5 **Упражнение.** Пусть $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ — полукольца. Показать, что система множеств $\{A_1 \times A_2 \mid A_i \in \mathfrak{S}_i,\ \ i = 1, 2\}$ является полукольцом.

§2. Мера на полукольцах

1 **Определение.** Пусть $\mathfrak{S}$ — полукольцо в E. Функция

$$\mathrm{m}\colon \mathfrak{S} \to [0, +\infty)$$

называется *конечно-аддитивной мерой*, если для любых $X \in \mathfrak{S}$, $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{S}$ $(X_k X_m = \varnothing$ при $k \neq m)$ из

$$X = \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{следует} \quad \mathrm{m}X = \sum_{k=1}^n \mathrm{m}X_k.$$

2 **Пример.** Пусть $\mathfrak{S} = \{\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. Тогда

$$\mathrm{m}(\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle) = (b - a)(d - c)$$

— конечно-аддитивная мера.

3 *Пусть* $X \in \mathfrak{S}$, $\ X_1, X_2, \dots \in \mathfrak{S}$ $\ (X_k X_m = \varnothing$ *при* $k \neq m)$. *Если*

$$X_k \subseteq X, \quad \text{то} \quad \sum_{k=1}^\infty \mathrm{m}X_k \leqslant \mathrm{m}X.$$

Доказательство. Пусть $\{X_1, \dots, X_n\} \subseteq \{X_k\}$. Т.к. $X_k \subseteq X$, то существует конечное семейство $\{Y_j\}_{j=1}^m$ (см. п. 1.3):

$$X = \sum_k X_k + \sum_j Y_j.$$

Следовательно,

$$\mathrm{m}X = \sum_k \mathrm{m}X_k + \sum_j \mathrm{m}Y_j \geqslant \sum_k \mathrm{m}X_k.$$

Т.к. для всех n

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{m}X_k \leqslant \mathrm{m}X,$$

то последовательность частных сумм знакопостоянного ряда ограничена, а значит ряд сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}X_k \leqslant \mathrm{m}X.$$

■

4 *Если для* $X \in \mathfrak{S}$, $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{S}$

$$X \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} X_k, \quad \textit{то} \quad \mathrm{m}X \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathrm{m}X_k.$$

Доказательство. Из свойств полуколец (см. п. 1.4) следует, что для набора $X, X_1, \ldots, X_n$ существует конечное семейство $\{Y_j\}_{j=1}^{m}$ и наборы индексов $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ такие, что

$$X = \sum_{j\in\sigma_0} Y_j, \quad X_k = \sum_{j\in\sigma_k} Y_j.$$

Если $j \in \sigma_0$, то найдётся $k \in \{1, \ldots, n\}$ такой, что $j \in \sigma_k$.

Действительно, $j \in \sigma_0$ тогда и только тогда, когда $\omega \in Y_j$. Следовательно, $\omega \in X$, а значит $\omega \in X_k$ для какого-то k. Тогда существует $j' \in \sigma_k$ такой, что $\omega \in Y_{j'}$. Т.к. $Y_iY_j = \varnothing \quad (i \neq j)$, то $j' = j$.

Следовательно,

$$\mathrm{m}X = \sum_{j\in\sigma_0} \mathrm{m}Y_j \leqslant \sum_k \sum_{j\in\sigma_k} \mathrm{m}Y_j = \sum_k \mathrm{m}X_k.$$

■

5 **Замечание.** Утверждение п. 4 для счётного набора множеств, вообще говоря, неверно. Действительно, пусть, например,

$$E = \mathbb{Q} \cap [0,1], \quad \mathfrak{S} = \{\langle a,b\rangle \cap \mathbb{Q} \;\big|\; a,b \in E\}, \quad \mathrm{m}(\langle a,b\rangle \cap \mathbb{Q}) = b-a.$$

Т.к. E — счётно, то $E = \{q_1, q_2, \ldots\}$, $q_n \in \mathbb{Q}$. Пусть $X_k = [q_k, q_k] \in \mathfrak{S}$, тогда

$$\mathrm{m}X_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_k \mathrm{m}X_k = 0.$$

Но

$$\sum_k X_k = E \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{m}\sum_k X_k = \mathrm{m}E = 1.$$

(6) **Определение.** Пусть $\mathfrak{S}$ — полукольцо в E. Функция

$$\mathrm{m}\colon \mathfrak{S} \to [0, +\infty)$$

называется *мерой* (*счётно-аддитивной мерой*), если для любых $X \in \mathfrak{S}$, $X_1, X_2, \dots \in \mathfrak{S}$ $(X_k X_l = \varnothing$ при $k \neq l)$ из

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \quad \text{следует} \quad \mathrm{m}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}X_k.$$

(7) **Упражнения.**

1. Пусть на числовой прямой задана неубывающая, непрерывная слева функция $g(x)$. Для множества $A = [a, b)$, где $a \leqslant b$, положим $\mathrm{m}(A) = g(b) - g(a)$. Доказать σ-аддитивность функции $\mathrm{m}(A)$ на полукольце $\mathfrak{S}$, образованном полуинтервалами $[a, b)$.
2. По заданной на полукольце $\mathfrak{S}$, образованном полуинтервалами $[a, b)$, конечно-аддитивной мере m построить неубывающую, непрерывную слева функцию $g(x)$ такую, что $\mathrm{m}([a, b)) = g(b) - g(a)$ при $a \leqslant b$.

§3. Кольца и алгебры множеств

(1) **Определение.** Непустое семейство множеств $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{T}(E)$ называется *кольцом* в E, если выполнены условия

(K_1) Если $X, Y \in \mathfrak{K}$, то $X \cup Y \in \mathfrak{K}$;

(K_2) Если $X, Y \in \mathfrak{K}$ и $X \subseteq Y$, то $Y \setminus X \in \mathfrak{K}$.

Кольцо с единицей ($E \in \mathfrak{K}$) называется *алгеброй.* Обозначение: $\mathfrak{A}$.

(2) **Пример.** Пусть $\mathfrak{S}$ — полукольцо в E. Класс множеств

$$\mathfrak{K} = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} X_i \;\Big|\; \{X_i\}_{i=1}^{n} \in \mathfrak{S}, \quad X_k X_j = \varnothing \quad \text{при} \quad k \neq j \Big\}$$

удовлетворяет свойствам (K_1), (K_2) и является кольцом.

(3) *Если $\mathfrak{K}$ — кольцо в E, то для $X, Y \in \mathfrak{K}$ выполняется:*

1) $\varnothing \in \mathfrak{K}$;

2) $X \cap Y \in \mathfrak{K}$;

3) $X \vartriangle Y \in \mathfrak{E}$.

Доказательство. Имеем:

1) $\varnothing = X \setminus X$.

2) $X \vartriangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.

3) $X \cap Y = (X \cup Y) \setminus (X \vartriangle Y)$. ■

4 **Определение.** Кольцо $\mathfrak{E}$ (алгебра) в E называется *σ-кольцом* (*σ-алгеброй*), если оно замкнуто относительно счётных пересечений:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k \in \mathfrak{E} \quad (X_k \in \mathfrak{E}).$$

5 *Семейство множеств $\mathfrak{A}$ является алгеброй в E, если:*

1) Из $X \in \mathfrak{A}$ следует $X^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{A}$;

2) $\mathfrak{A}$ замкнуто относительно конечных объединений:

$$\bigcap_{k=1}^{n} X_k \in \mathfrak{A} \quad (X_k \in \mathfrak{A}).$$

6 *Пусть $\{\mathfrak{E}_i\}_{i\in I}$ — произвольное семейство колец в E (I может быть более, чем счётным). Тогда*

$$\mathfrak{E} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{E}_i$$

образует кольцо в E.

Доказательство. $\mathfrak{E}$ не является пустым, т.к. $\varnothing \in \mathfrak{E}$. Пусть $X, Y \in \mathfrak{E}$, тогда для всех $i \in I$ выполняется включение $X, Y \in \mathfrak{E}_i$. Т.к. $\mathfrak{E}_i$ — кольцо, то

$$X \cup Y, \quad X \setminus Y \in \mathfrak{E}_i \quad \Longrightarrow \quad X \cup Y, \quad X \setminus Y \in \mathfrak{E} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{E}.$$ ■

7 *Пусть $\mathfrak{T}$ — произвольное семейство подмножеств множества E. Тогда существует минимальное (по включению) кольцо, содержащее $\mathfrak{T}$.*

Доказательство. Рассмотрим семейство всевозможных колец $\mathfrak{E}_i$, содержащих $\mathfrak{T}$:

$$\{\mathfrak{E}_i \mid \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{E}_i\}_{i\in I}.$$

Тогда

$$\mathfrak{E} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{E}_i$$

— искомое кольцо, т.к. $\mathfrak{T} \in \mathfrak{E}$ и оно минимально по включению. ■

(8) **Определение.** Наименьшее кольцо, содержащее $\mathfrak{T}$, называют *кольцом, порождённым семейством* $\mathfrak{T}$. Обозначение: $\mathfrak{E}(\mathfrak{T})$.

(9) *Пусть $\mathfrak{S}$ — полукольцо в E. Тогда $\mathfrak{S}$ порождает кольцо вида:*

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{S}) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} X_i \ \Big| \ \{X_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathfrak{S} \Big\}.$$

Доказательство. Пусть

$$\mathfrak{E}' = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} X_i \ \Big| \ \{X_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathfrak{S} \Big\}.$$

В силу аксиомы (K_1): $\mathfrak{E}' \subseteq \mathfrak{E}(\mathfrak{S})$.

Покажем, что $\mathfrak{E}'$ — кольцо. Пусть $X, Y \in \mathfrak{E}'$, тогда по определению

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad Y = \sum_{k=1}^{m} Y_k \quad (X_i, Y_k \in \mathfrak{S}).$$

Тогда, согласно свойству полуколец (см п. 1.4), существуют конечное семейство попарно непересекающихся множеств $\{Z_p\}_{p=1}^{l} \subseteq \mathfrak{S}$ и наборы индексов $\{\sigma_i^X\}$, $\{\sigma_k^Y\}$ такие, что

$$X_i = \sum_{p \in \sigma_i^X} Z_p, \quad Y_k = \sum_{p \in \sigma_k^Y} Z_p.$$

Исходя из этого

$$X \cup Y = \sum_{p \in (\bigcup_i \sigma_i^X) \cup (\bigcup_k \sigma_k^Y)} Z_p \in \mathfrak{E}', \quad X \setminus Y = \sum_{p \in (\bigcup_i \sigma_i^X) \setminus (\bigcup_k \sigma_k^Y)} Z_p \in \mathfrak{E}'.$$

Таким образом, $\mathfrak{E}'$ — кольцо, содержащее $\mathfrak{S}$, а значит $\mathfrak{E}(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{E}'$. ■

(10) **Определение.** Пусть $\mathfrak{T}$ — непустое семейство подмножеств множества E. Тогда существует наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathfrak{T}$, которую называют *σ-алгеброй, порождённой* $\mathfrak{T}$.

Борелевской σ-алгеброй называется σ-алгебра, порождённая семейством всех открытых множеств в $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$). Обозначение: $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ $\big(\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)\big)$.

11 **Определение.** Пусть $\mathfrak{S}$ — полукольцо в E, $\mathrm{m}\colon \mathfrak{S} \to [0, +\infty)$. Мера m называется *σ-конечной*, если для E существует представление

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \quad (E_n \in \mathfrak{S}).$$

12 *Пусть* m *— σ-конечная мера на σ-алгебре* $\mathfrak{A}$*. Тогда:*

1) Для возрастающей последовательности множеств $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \quad (X_n \in \mathfrak{A})$ *верно равенство*

$$\mathrm{m}\Big(\bigcup_n X_n\Big) = \lim_n \mathrm{m} X_n;$$

2) Для убывающей последовательности множеств $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots \quad (Y_n \in \mathfrak{A})$ *такой, что существует элемент* Y_k*, мера которого* $\mathrm{m}Y_k < +\infty$*, верно равенство*

$$\mathrm{m}\Big(\bigcap_n Y_n\Big) = \lim_n \mathrm{m} Y_n.$$

Доказательство.

Пункт 2: Можно считать, что $\mathrm{m}Y_1 < +\infty$ (иначе достаточно начать рассмотрение последовательности с, например, k-го элемента). Представим Y_1 в виде

$$Y_1 = \bigcap_n Y_n + Y_1 \setminus Y_2 + Y_2 \setminus Y_3 + \dots .$$

Тогда

$$\mathrm{m}Y_1 = \mathrm{m}\Big(\bigcap_n Y_n\Big) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(Y_k \setminus Y_{k+1}) = \\ = \mathrm{m}\Big(\bigcap_n Y_n\Big) + \lim_n \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{m}(Y_k \setminus Y_{k+1}),$$

откуда

$$\mathrm{m}\Big(\bigcap_n Y_n\Big) = \mathrm{m}Y_1 - \lim_n \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{m}(Y_k \setminus Y_{k+1}) = \\ = \lim_n \mathrm{m}\Big(Y_1 \setminus \sum_{k=1}^{n-1} \Big(Y_k \setminus Y_{k+1}\Big)\Big) = \lim_n \mathrm{m} Y_n.$$

∎

(13) Упражнения.

1. Сформулировать и доказать утверждения 6-9 для алгебр множеств.
2. Показать, что борелевская σ-алгебра на числовой прямой $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ совпадает с σ-алгеброй, порождённой множествами вида $[a, b)$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
3. Обозначим через $X = \{a, b, c\}$ множество, состоящее из трёх элементов, и через $\mathfrak{T}(X)$ — множество всех подмножеств множества X.

   1) Привести пример полукольца, состоящего из элементов $\mathfrak{T}(X)$, не являющегося кольцом.

   2) Описать полукольца, которые можно построить из элементов $\mathfrak{T}(X)$.

   3) Описать кольца и алгебры, которые можно построить из элементов $\mathfrak{T}(X)$.
4. Доказать, что получим эквивалентное определение кольца множеств, если потребовать замкнутость относительно операций:

   1) объединения «$\cup$» и разности «$\setminus$».

   2) объединения «$\cup$» и симметрической разности «$\triangle$».

   3) разности «$\setminus$» и симметрической разности «$\triangle$».
5. Доказать, что система множеств, замкнутая относительно операций объединения «$\cup$» и пересечения «$\cap$», может и не быть кольцом.
6. Доказать, что всякое кольцо является полукольцом, и что обратное не верно.
7. Доказать, что если полукольцо замкнуто относительно операции «$\cup$», то оно является кольцом.
8. Построить пример колец $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ таких, что система множеств $\{A_1 \times A_2 \bigm| A_i \in \mathfrak{T}_i, \quad i = 1, 2\}$ не является кольцом.
9. Пусть $\mathfrak{T} = \{X, Y\}$, где $X, Y \subseteq E$. Построить кольцо $\mathfrak{E}(\mathfrak{T})$, порождённое системой $\mathfrak{T}$.
10. Пусть $\mathfrak{T}$ — множество всех конечных полуинтервалов вида $[a, b)$ на $\mathbb{R}$. Доказать, что $\mathfrak{T}$ — полукольцо, а порождённое им кольцо $\mathfrak{E}(\mathfrak{T})$ не является ни σ-кольцом, ни алгеброй.

11. Показать, что σ-алгебра на числовой прямой $\mathbb{R}$, порождённая семейством всех промежутков вида $[a, b)$ совпадает с алгеброй $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

§4. Продолжение меры с полукольца на кольцо

(1) **Определение.** Пусть

$$\mathrm{m}\colon \mathfrak{T} \to [0, +\infty), \quad \mathrm{m}'\colon \mathfrak{T}' \to [0, +\infty)$$

— меры (конечно-аддитивные меры) на семействах $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}'$. Мера m' называется *продолжением* меры m, если:

1) $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}'$;
2) $\mathrm{m}'X = \mathrm{m}X$ для любого $X \in \mathfrak{T}$.

(2) *Пусть* $\mathrm{m}\colon \mathfrak{S} \to [0, +\infty)$ *— мера (конечно-аддитивная мера) на полукольце* $\mathfrak{S}$*;* $\mathfrak{E}(\mathfrak{S})$ *— кольцо, порождённое* $\mathfrak{S}$*. Тогда функция* $\mathrm{m}'\colon \mathfrak{E}(\mathfrak{S}) \to [0, +\infty)$ *такая, что*

$$\mathrm{m}'X = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m}X_i \quad \textit{для} \quad X = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad (X_i \in \mathfrak{S}),$$

задаёт меру (конечно-аддитивную меру) на $\mathfrak{E}(\mathfrak{S})$*, являющуюся единственным продолжением* m *на* $\mathfrak{E}(\mathfrak{S})$*.*

Доказательство.

Корректность: Пусть $X \in \mathfrak{E}(\mathfrak{S})$ можно представить в виде

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{и} \quad X = \sum_{k=1}^{m} Y_k \quad (X_i, Y_k \in \mathfrak{S}).$$

Тогда

$$\sum_i \mathrm{m}X_i = \sum_i \mathrm{m}\Big(\sum_k X_i Y_k\Big) = \sum_i \sum_k \mathrm{m}(X_i Y_k) =$$
$$= \sum_k \sum_i \mathrm{m}(X_i Y_k) = \sum_k \mathrm{m}\Big(\sum_i X_i Y_k\Big) = \sum_k \mathrm{m}Y_k.$$

Единственность: Пусть $\mathrm{m}''\colon \mathfrak{E}(\mathfrak{S}) \to [0, +\infty)$ — другое продолжение меры m. Пусть

$$X = \sum_i X_i \quad (X_i \in \mathfrak{S}).$$

Тогда
$$\mathrm{m}''X = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m}''X_i = \sum_{i=1}^{n} mX_i = m'X.$$

Если m σ-аддитивна, то m$'$ тоже σ-аддитивна: Пусть
$$X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \quad (X, X_n \in \mathfrak{E}(\mathfrak{S})).$$
Тогда найдутся $Y_i,\ Y_k^{(n)} \in \mathfrak{S}$ такие, что
$$X = \sum_{i=1}^{m} Y_i, \quad X_n = \sum_{k=1}^{l_n} Y_k^{(n)}.$$
Пусть $Y_{i,k}^{(n)} = Y_i \cap Y_k^{(n)}$, тогда
$$Y_k^{(n)} = \sum_i Y_{i,k}^{(n)}, \quad Y_i = \sum_{n,k} Y_{i,k}^{(n)}.$$
Следовательно,
$$\mathrm{m}'X = \sum_i \mathrm{m}Y_i = \sum_i \mathrm{m}\Big(\sum_{n,k} Y_{i,k}^{(n)}\Big) = \sum_i \sum_{n,k} \mathrm{m}Y_{i,k}^{(n)} =$$
$$= \sum_{n,k} \sum_i \mathrm{m}Y_{i,k}^{(n)} = \sum_{n,k} \mathrm{m}Y_k^{(n)} = \sum_n \mathrm{m}'X_n.$$

Заметим, что аналогичными рассуждениями можно доказать и конечную аддитивность m$'$ в случае конечной аддитивности исходной меры m. ■

(3) *Пусть* $\mathrm{m}\colon \mathfrak{S} \to [0, +\infty)$ *— конечно-аддитивная мера на полукольце* $\mathfrak{S}$*. Мера* m *—* σ*-аддитивна тогда и только тогда, когда*
$$\mathrm{m}X \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}X_n \quad \textit{для} \quad X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \quad (X, X_n \in \mathfrak{S}).$$

Доказательство.

Необходимость: Пусть $X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$, тогда $\mathrm{m}X \leqslant \sum_n \mathrm{m}X_n$. Обратное неравенство верно всегда (см. п. 2.3), поэтому
$$\mathrm{m}X = \sum_n \mathrm{m}X_n,$$
что означает σ-аддитивность m.

Достаточность: Легко видеть, что если утверждение верно для продолжения меры m' на $\mathfrak{E}(\mathfrak{S})$, то оно справедливо и для исходной меры m на $\mathfrak{S}$.

Для произвольной последовательности множеств $\{X_n\}$ $(X_n \in \mathfrak{E}(\mathfrak{S}))$ рассмотрим

$$Y_1 = XX_1, \quad Y_2 = XX_2 \setminus X_1, \quad \ldots, \quad Y_k = XX_k \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{k-1} X_i\Big).$$

Легко видеть, что тогда

$$Y_k \in \mathfrak{E}(\mathfrak{S}), \quad Y_k \cap Y_m = \varnothing, \quad X = \sum_k Y_k.$$

Из σ-аддитивности m' следует

$$\mathrm{m}'X = \sum_k \mathrm{m}'Y_k \leqslant \sum_k \mathrm{m}'X_k,$$

что, в силу сделанного замечания, означает выполнение этого свойства и для исходной меры m:

$$\mathrm{m}X \leqslant \sum_k \mathrm{m}X_k.$$

■

④ **Упражнения.**

1. Пусть m — конечно-аддитивная мера, определённая на кольце множеств $\mathfrak{E}$. Доказать, что для любых $A, B \in \mathfrak{E}$
$$\mathrm{m}(A \cup B) + \mathrm{m}(A \cap B) = \mathrm{m}(A) + \mathrm{m}(B).$$
2. Множество тех элементов из кольца $\mathfrak{E}$, на которых конечно-аддитивная мера m принимает конечные значения, образует кольцо.
3. Пусть m — конечно-аддитивная мера, определённая на кольце $\mathfrak{E}$. Доказать, что
   1) Если $A, B \in \mathfrak{E}$ и $A \subseteq B$, то $\mathrm{m}(A) \leqslant \mathrm{m}(B)$.
   2) Если $A, B \in \mathfrak{E}$ и $\mathrm{m}(A \vartriangle B) = 0$, то $\mathrm{m}(A) = \mathrm{m}(B)$.
4. Множество тех элементов из $\mathfrak{E}$, на которых m обращается в нуль, образует кольцо.
5. Пусть m — конечно-аддитивная мера, определённая на системе множеств $\mathfrak{T}$. Доказать, что следующие условия эквивалентны если $\mathfrak{T}$ — кольцо, и могут быть не эквивалентны, если $\mathfrak{T}$ — полукольцо:

1) m обладает свойством σ-аддитивность.

2) m полунепрерывна сверху, т.е. если $A_i \in \mathfrak{T}$ — убывающая последовательность множеств такая, что

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \quad (A \in \mathfrak{T}), \quad \text{то} \quad \mathrm{m}(A) = \lim \mathrm{m}(A_i).$$

3) полунепрерывна снизу, т.е. если $A_i \in \mathfrak{T}$ — возрастающая последовательность множеств такая, что

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad (A \in \mathfrak{T}), \quad \text{то} \quad \mathrm{m}(A) = \lim \mathrm{m}(A_i).$$

4) m непрерывна, т.е., если для последовательности $\{A_i\}$ определён $\lim A_i$, то $\mathrm{m}(\lim A_i) = \lim \mathrm{m}(A_i)$.

Часть 2. Лебегово продолжение меры

§5. Внешняя мера

(1) **Определение.** Счётное семейство множеств $\{X_n\} \subseteq \mathfrak{S}$ называется *покрытием* некоторого множества X, если

$$X \subseteq \bigcup_n X_n.$$

Определение. Пусть $\mathfrak{S}$ — полукольцо в E с единицей, m — мера на $\mathfrak{S}$. Величина

$$\mu^* X = \inf_{\substack{\{X_n\} \subseteq \mathfrak{S}: \\ X \subseteq \bigcup_n X_n}} \sum_n \mathrm{m} X_n,$$

где $X \subseteq E$, а inf берётся по всем конечным и счётным покрытиям множества X, называется *внешней мерой* множества X.

(Здесь inf конечен, т.к. $\leqslant \mathrm{m}E$)

(2) $\mu^* X + \mu^* X^{\mathrm{c}} \geqslant \mathrm{m}E.$

Доказательство. Пусть $\{X_n\}$ и $\{Y_k\}$ — произвольные покрытия X и X^{c}, соответственно. Тогда $\{X_n\} \cup \{Y_k\}$ — покрытие E, и

$$\mathrm{m}E \leqslant \sum_n \mathrm{m}X_n + \sum_k \mathrm{m}Y_k.$$

Так как неравенство верно для любых покрытий $\{X_n\}$ и $\{Y_k\}$ множеств X и X^{c}, то, беря inf по всем покрытиям для X, приходим к

$$\mathrm{m}E \leqslant \inf_{\{X_n\}} \Big(\sum_n \mathrm{m}X_n + \sum_k \mathrm{m}Y_k \Big) = \mu^* X + \sum_k \mathrm{m}Y_k,$$

и, беря inf по покрытиям для Y:

$$\mathrm{m}E \leqslant \inf_{\{Y_n\}} \Big(\mu^* X + \sum_k \mathrm{m}Y_k \Big) = \mu^* X + \mu^* X^{\mathrm{c}}.$$

■

(3) **Замечание.** В определении внешней меры достаточно рассматривать лишь покрытия, образованные попарно непересекающимися множествами:

$$\mu^* X = \inf_{\substack{\{X_n\} \subseteq \mathfrak{S}: \\ X \subseteq \sum_n X_n}} \sum_n \mathrm{m} X_n.$$

④ *Если*

$$X \subseteq \bigcup_n X_n, \quad \text{\textit{то}} \quad \mu^* X \leqslant \sum_n \mu^* X_n.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольная константа. Рассмотрим счётные покрытия $\{X_i^{(n)}\}$ множеств X_n такие, что

$$\sum_i \mathrm{m} X_i^{(n)} < \mu^* X_n + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Объединение покрытий $\bigcup_n \{X_i^{(n)}\}$ является покрытием для всего X, т.к.

$$X \subseteq \bigcup_n X_n \subseteq \bigcup_{n,i} X_i^{(n)}.$$

Следовательно,

$$\mu^* X \leqslant \sum_n \sum_i \mathrm{m} X_i^{(n)} < \sum_n \left(\mu^* X_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right),$$

и

$$\mu^* X < \sum_n \mu^* X_n + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε из этого следует требуемое утверждение.■

⑤ **Упражнения.**

1. Доказать, что для $A \subseteq B$: $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.
2. Доказать, что для произвольных множеств A, B:
   1) $\mu^*(A \cup B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B)$.
   2) $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \bigtriangleup B)$.
   3) $\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B)$.
3. Доказать, что внешняя мера, вообще говоря, не аддитивна.
4. Доказать. что для произвольного множества A и произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать такую последовательность попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots$ из $\mathfrak{S}$, что

$$A \subseteq \sum_i A_i \quad \text{и} \quad \mu^*(A) \geqslant \sum_i \mu^*(A_i) - \varepsilon.$$

§6. Измеримость по Лебегу и мера Лебега: случай полукольца с единицей

1 **Определение.** Пусть m — мера на полукольце с единицей $\mathfrak{S}$ во множестве E, μ^* — соответствующая им внешняя мера. Множество X ($\subseteq E$) называется *измеримым по Лебегу* (на полукольце с единицей), если

$$\mu^* X + \mu^* X^{\mathrm{c}} = \mathrm{m} E.$$

Обозначим через $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathrm{m})$ — класс всех измеримых по Лебегу множеств.

2 *Множества из кольца $\mathfrak{E}(\mathfrak{S})$, порождённого полукольцом с единицей $\mathfrak{S}$, измеримы по Лебегу, т.е. $\mathfrak{E}(\mathfrak{S}) \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathrm{m})$. При этом для всех $X \in \mathfrak{E}(\mathfrak{S})$*

$$\mu^* X = \mathrm{m}' X.$$

(Здесь m' — продолжение меры m с $\mathfrak{S}$ на $\mathfrak{E}(\mathfrak{S})$)

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{E}(\mathfrak{S})$, тогда для него верно представление

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad (X_k \in \mathfrak{S}).$$

Так как $\mathfrak{S}$ — полукольцо с единицей, то $X^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{E}(\mathfrak{S})$, и

$$X^{\mathrm{c}} = \sum_{i=1}^{m} Y_i \quad (Y_i \in \mathfrak{S}).$$

Имеем (см. п. 5.4 и п. 4.2)

$$\mu^* X \leqslant \sum_k \mathrm{m} X_k = \mathrm{m}' X, \quad \mu^* X^{\mathrm{c}} \leqslant \sum_i \mathrm{m} Y_i = \mathrm{m}' X^{\mathrm{c}}. \tag{1}$$

Тогда (см. п. 5.2)

$$\mathrm{m} E \leqslant \mu^* X + \mu^* X^{\mathrm{c}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathrm{m} X_k + \sum_{i=1}^{m} \mathrm{m} Y_i =$$
$$= \mathrm{m}' X + \mathrm{m}' X^{\mathrm{c}} = \mathrm{m}' E = \mathrm{m} E.$$

Пришли к

$$\mu^* X + \mu^* X^{\mathrm{c}} = \mathrm{m} E,$$

что означает $X \in \mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathrm{m})$. Учитывая (1):

$$\mu^* X = \mathrm{m} E - \mu^* X^{\mathrm{c}} \geqslant \mathrm{m} E - \sum_i \mathrm{m} Y_i =$$

$(\ \mathrm{m}E = \mathrm{m}'X - \mathrm{m}'X^{\mathrm{c}}; \ \sum_i \mathrm{m}Y_i = \mathrm{m}'X^{\mathrm{c}} \ )$

$$= \mathrm{m}E - \mathrm{m}'X^{\mathrm{c}} = \mathrm{m}'X \quad \Longrightarrow \quad \mu^* X = \mathrm{m}'X. \qquad \blacksquare$$

3 *Пусть* $X \in \mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathrm{m})$ *и*

$$X \subseteq \sum_i X_i, \quad X^{\mathrm{c}} \subseteq \sum_j Y_j \quad (X_i, Y_j \in \mathfrak{S}).$$

Если для некоторого значения $\varepsilon > 0$

$$\sum_i \mathrm{m}X_i < \mu^* X + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_j \mathrm{m}Y_j < \mu^* X^{\mathrm{c}} + \frac{\varepsilon}{2},$$

то

$$\sum_{i,j} \mathrm{m}X_i Y_j \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть заданы произвольные $s, t \in \mathbb{N}$. Тогда существует конечная система $\{Z_k\}_{k=1}^m \subseteq \mathfrak{S}$ попарно непересекающихся множеств такая, что

$$E \setminus \Big(\Big(\sum_{i=1}^s X_i \Big) \cup \Big(\sum_{j=1}^t Y_j \Big) \Big) = \sum_k Z_k.$$

Семейство $\{X_{s+1}, X_{s+2}, \ldots, Y_{t+1}, Y_{t+2}, \ldots\}$ образует покрытие для $\{Z_k\}$, и

$$\sum_k \mathrm{m}Z_k = \mathrm{m}'\Big(\sum_k Z_k \Big) \leqslant \sum_{i=s+1}^{\infty} \mathrm{m}X_i + \sum_{j=t+1}^{\infty} \mathrm{m}Y_j. \qquad (2)$$

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t X_i Y_j = \Big(\sum_{i=1}^s X_i \Big) \cap \Big(\sum_{j=1}^t Y_j \Big),$$

что в силу свойств меры верна формула:

$$\mathrm{m}(A \cap B) = \mathrm{m}A + \mathrm{m}B - \mathrm{m}(A \cup B),$$

и что

$$\Big(\sum_{i=1}^s X_i \Big) \cup \Big(\sum_{j=1}^t Y_j \Big) = E \setminus \sum_k Z_k.$$

Имеем:

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t \mathrm{m}X_i Y_j = \sum_{i=1}^s \mathrm{m}X_i + \sum_{j=1}^t \mathrm{m}Y_j + \sum_k \mathrm{m}Z_k - \mathrm{m}E \leqslant$$

(в силу (2))

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}X_i + \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{m}Y_j - \mathrm{m}E =$$

(т.к. $X \in \mathcal{L}$, то $\mathrm{m}E = \mu^* X + \mu^* X^{\mathrm{c}}$)

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}X_i - \mu^* X + \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{m}Y_j - \mu^* X^{\mathrm{c}} < \varepsilon.$$

■

4 *Класс измеримых по Лебегу множеств замкнут относительно операции дополнения, т.е. если*

$$X \in \mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathrm{m}), \quad \text{то} \quad X^{\mathrm{c}} \in \mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathrm{m}).$$

Доказательство. Пусть $X \in \mathcal{L}$. Тогда $\mu^* X + \mu^* X^{\mathrm{c}} = \mathrm{m}E$. Т.к. $(X^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = X$, то отсюда следует $X^{\mathrm{c}} \in \mathcal{L}$. ■

5 *Класс измеримых по Лебегу множеств замкнут относительно операции объединения, т.е. если*

$$X, Y \in \mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathrm{m}), \quad \text{то} \quad X \cup Y \in \mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathrm{m}).$$

Доказательство. Пусть X, $Y \in \mathcal{L}$. Пусть семейства $\{X_i\}$, $\{X'_j\}$, $\{Y_p\}$, $\{Y'_q\} \subseteq \mathfrak{S}$ — покрытия множеств $X, X^{\mathrm{c}}, Y, Y^{\mathrm{c}}$ такие, что внутри каждого семейства множества попарно не пересекаются и

$$\begin{gathered} \sum_i \mathrm{m}X_i < \mu^* X + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_j \mathrm{m}X'_j < \mu^* X^{\mathrm{c}} + \frac{\varepsilon}{2}, \\ \sum_p \mathrm{m}Y_p < \mu^* Y + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_q \mathrm{m}Y'_q < \mu^* Y^{\mathrm{c}} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{gathered} \tag{3}$$

Такие покрытия всегда существуют в силу определения внешней меры.

Семейства $\{X_i\} \cup \{X'_j Y_p\}$ и $\{X'_j Y'_q\}$ образуют покрытия для $X \cup Y$ и $(X \cup Y)^{\mathrm{c}}$, соответственно. Следовательно,

$$\mu^*(X \cup Y) + \mu^*(X \cup Y)^{\mathrm{c}} \leqslant \sum_i \mathrm{m}X_i + \sum_{j,p} \mathrm{m}X'_j Y_p + \sum_{j,q} \mathrm{m}X'_j Y'_q. \tag{4}$$

Оценим 2 последних слагаемых в (4). Пусть p_0 и q_0 — фиксированы. Тогда (исходя из формулы $\mathrm{m}(A \cup B) = \mathrm{m}A + \mathrm{m}B - \mathrm{m}(A \cap B)$)

$$\mathrm{m}X'_j \geqslant \sum_{p=1}^{p_0} \mathrm{m}X'_j Y_p + \sum_{q=1}^{q_0} \mathrm{m}X'_j Y'_q - \sum_{p=1}^{p_0} \sum_{q=1}^{q_0} \mathrm{m}X'_j Y_p Y'_q,$$

откуда

$$\sum_{p=1}^{p_0} \mathrm{m} X'_j Y_p + \sum_{q=1}^{q_0} \mathrm{m} X'_j Y'_q \leqslant \mathrm{m} X'_j + \sum_{p=1}^{p_0} \sum_{q=1}^{q_0} \mathrm{m} X'_j Y_p Y'_q. \tag{5}$$

Т.к. $X'_j Y_p Y'_q \subseteq Y_p Y'_q$ и $X'_j Y_p Y'_q$ по j попарно не пересекаются, то

$$\sum_j \mathrm{m} X'_j Y_p Y'_q \leqslant \mathrm{m} Y_p Y'_q.$$

Тогда

$$\sum_j \sum_{p,q} \mathrm{m} X'_j Y_p Y'_q = \sum_{p,q} \sum_j \mathrm{m} X'_j Y_p Y'_q \leqslant \sum_{p,q} \mathrm{m} Y_p Y'_q \leqslant \varepsilon$$

в силу (3) и п. 3. Тогда, учитывая (5) и произвольность p_0 и q_0, получаем

$$\sum_{j,p} \mathrm{m} X'_j Y_p + \sum_{j,q} \mathrm{m} X'_j Y'_q \leqslant \sum_j \mathrm{m} X'_j + \varepsilon.$$

Тогда из (4) с учётом (3) и измеримости по Лебегу X:

$$\mu^*(X \cup Y) + \mu^*(X \cup Y)^{\mathrm{c}} < \mu^* X + \mu^* X^{\mathrm{c}} + 2\varepsilon = \mathrm{m} E + 2\varepsilon.$$

В силу произвольности ε это означает

$$\mu^*(X \cup Y) + \mu^*(X \cup Y)^{\mathrm{c}} = \mathrm{m} E,$$

т.е. $X \cup Y \in \mathcal{L}$. ■

6 *Пусть $\mu = \mu^*|_{\mathcal{L}(\mathfrak{S},\mathrm{m})}$ — ограничение внешней меры μ^* на класс измеримых по Лебегу множеств. Тогда μ — конечно-аддитивна.*

Доказательство. Достаточно показать, что если $X + Y \in \mathcal{L}$ для непересекающихся множеств X, $Y \in \mathcal{L}$, то $\mu(X+Y) = \mu X + \mu Y$.

<u>$\mu(X+Y) \leqslant \mu X + \mu Y$:</u> Пусть $\{X_i\}$, $\{Y_j\} \subseteq \mathfrak{S}$ — некоторые покрытия X и Y такие, что

$$\sum_i \mathrm{m} X_i < \mu X + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_j \mathrm{m} Y_j < \mu Y + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Т.к. $\{X_i\} \cup \{Y_j\}$ образует покрытие для $X+Y$, то

$$\mu(X+Y) < \sum_i \mathrm{m} X_i + \sum_j \mathrm{m} Y_j < \mu X + \mu Y + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε приходим к

$$\mu(X+Y) \leqslant \mu X + \mu Y.$$

$\underline{\mu(X+Y) \geqslant \mu X + \mu Y:}$ Пусть семейства $\{X_i\}$, $\{X'_j\}$, $\{Y_p\}$, $\{Y'_q\}$ — покрытия для X, X^{c}, Y, Y^{c}, каждое из которых состоит из попарно непересекающихся множеств, и

$$\sum_i \mathrm{m}X_i < \mu^* X + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_j \mathrm{m}X'_j < \mu^* X^{\mathrm{c}} + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_p \mathrm{m}Y_p < \mu^* Y + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_q \mathrm{m}Y'_q < \mu^* Y^{\mathrm{c}} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\sum_{i,p} X_i Y_p \subseteq \Big(\sum_{i,j} X_i X'_j\Big) \cup \Big(\sum_{p,q} Y_p Y'_q\Big)$$

⌜ Если $x \in X_i Y_p$ для некоторых значений индексов i, p, но $x \notin X'_j$ для всех j, то $x \notin Y$ (т.к. $X \cap Y = \varnothing$). Поэтому существует q такое, что $x \in Y'_q$; следовательно $x \in Y_p Y'_q$. ⌟

Отсюда и в силу п. 3

$$\sum_{i,p} \mathrm{m}X_i Y_p \leqslant \sum_{i,j} \mathrm{m}X_i X'_j + \sum_{p,q} \mathrm{m}Y_p Y'_q \leqslant 2\varepsilon. \tag{6}$$

Пусть i_0, p_0 фиксированы, $\{Z_s\}_{s=1}^{l} \subseteq \mathfrak{S}$ — конечная система попарно пересекающихся множеств такая, что

$$\sum_s Z_s = \Big(\sum_{i=1}^{i_0} X_i\Big) \cup \Big(\sum_{p=1}^{p_0} Y_p\Big).$$

Пусть $\{U_k\} \subseteq \mathfrak{S}$ — покрытие $X+Y$ с попарно непересекающимися элементами такое, что

$$\sum_k \mathrm{m}U_k < \mu(X+Y) + \varepsilon. \tag{7}$$

Тогда (по формуле $\mathrm{m}A + \mathrm{m}B = \mathrm{m}(A \cup B) + \mathrm{m}(A \cap B)$)

$$\sum_{i=1}^{i_0} \mathrm{m}U_k X_i + \sum_{p=1}^{p_0} \mathrm{m}U_k Y_p =$$

$$= \mathrm{m}\Big(U_k \sum_s Z_s\Big) + \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{p=1}^{p_0} \mathrm{m}U_k X_i Y_p.$$

Просуммируем по k:

$$\sum_k \sum_{i=1}^{i_0} \mathrm{m}U_k X_i + \sum_k \sum_{p=0}^{p_0} \mathrm{m}U_k Y_p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \mathrm{m}\Big(U_k \sum_s Z_s\Big) + \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{p=1}^{p_0} \mathrm{m}\Big(X_i Y_p \sum_k U_k\Big)$$

(т.к. $U_k \sum_s Z_s \subseteq U_k$, $X_i Y_p \sum_k U_k \subseteq X_i Y_p$ и в силу (6))

$$\leqslant \sum_k \mathrm{m}U_k + \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{p=1}^{p_0} \mathrm{m}X_i Y_p \leqslant \sum_k \mathrm{m}U_k + 2\varepsilon.$$

Из произвольности i_0, p_0 и (7) следует, что

$$\sum_{k,i} \mathrm{m}U_k X_i + \sum_{k,p} \mathrm{m}U_k Y_p < \mu(X+Y) + 3\varepsilon.$$

Т.к. $\{U_k X_i\}$ и $\{U_k Y_p\}$ — покрытия элементами из $\mathfrak{S}$ множеств X и Y, соответственно, то

$$\mu X + \mu Y \leqslant \sum_{k,i} \mathrm{m}U_k X_i + \sum_{k,p} \mathrm{m}U_k Y_p < \mu(X+Y) + 3\varepsilon.$$

В силу произвольности ε это означает

$$\mu X + \mu Y \leqslant \mu(X+Y).$$ ■

7 *Класс измеримых по Лебегу множеств $\mathcal{L}$ является алгеброй, а функция $\mu = \mu^*|_{\mathcal{L}}$ (ограничение μ^* на класс $\mathcal{L}$) — мерой на $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Т.к. $\mathcal{L}$ замкнуто относительно операций дополнения и конечных объединений (см. п. 4 и п. 5), то $\mathcal{L}$ — алгебра.

Счётно-аддитивность μ следует из конечной аддитивности μ на $\mathcal{L}$ (см. п. 6) и свойства счётной полуаддитивности внешней меры μ^* (см. п. 5.4). ■

8 **Определение.** Мера μ, заданная на $\mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathrm{m})$ и совпадающая на нём с внешней мерой μ^*, называется *мерой Лебега*, построенной по мере m на полукольце с единицей $\mathfrak{S}$.

Если $E = [0,1]$, $\mathfrak{S}$ — полукольцо, образованное интервалами $\langle a, b\rangle$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $\mathrm{m}\langle a, b\rangle = b - a$, то μ называется *линейной мерой Лебега* на $[0,1]$.

Если $E = [0,1] \times [0,1]$, полукольцо $\mathfrak{S}$ образовано прямоугольниками на плоскости, а m определяется как их площадь, то порождаемая ими μ называется *плоской мерой Лебега* на $[0,1] \times [0,1]$.

(9) **Пример [** *неизмеримое по Лебегу множество* **].** Пусть μ — линейная мера Лебега на $[-1,2)$, $\mathcal{R}$ — отношение эквивалентности: $\mathcal{R}(x,y)$, если $x-y\in\mathbb{Q}$. Тогда множество $[0,1)$ разбивается на непересекающиеся смежные классы. Выберем в каждом классе по одной точке и образуем из них множество $X\subseteq[0,1)$.

Предположим, что X — измеримо. Тогда для любого $q\in\mathbb{Q}$ должно выполняться равенство

$$\mu(X+q)=\mu X,$$

где $(X+q)$ определяется как $(X+q)=\{x+q \mid x\in X\}$. Если $q_1,q_2,\ldots$ — последовательность всех рациональных чисел из $[-1,1)$, то $[0,1)\subseteq\sum_{k=1}^{\infty}(X+q_k)\subseteq[-1,2)$. Поэтому

$$1\leqslant\sum_k\mu(X+q_k)=\sum_k\mu X\leqslant 3,$$

что невозможно, т.к. если $\mu X=0$, то это противоречит оценке снизу, а если $\mu X>0$ — оценке сверху.

(10) **Упражнение.** Доказать, что множество A измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $B\in\mathfrak{S}$, что $\mu^*(A\bigtriangleup B)<\varepsilon$.

§7. Измеримость по Лебегу и мера Лебега: общий случай

(1) Пусть $\mathfrak{S}$ — полукольцо в E (может быть, без единицы), $\mathrm{m}\colon\mathfrak{S}\to[0,+\infty)$ — мера на $\mathfrak{S}$. Для $A\in\mathfrak{S}$ рассмотрим

$$\mathfrak{S}_A=\{BA \mid B\in\mathfrak{S}\},\quad \mathrm{m}_A X=\mathrm{m}X\quad(X\in\mathfrak{S}_A).$$

Тогда семейство $\mathfrak{S}_A$ образует полукольцо с единицей в виде множества A, $\mathrm{m}_A\colon\mathfrak{S}_A\to[0,+\infty)$ — меру на $\mathfrak{S}_A$. Обозначим через μ_A^* соответствующую паре $(\mathfrak{S}_A,\mathrm{m}_A)$ внешнюю меру.

(2) *Семейство внешних мер $\{\mu_A^*\}_{A\in\mathfrak{S}}$ согласовано, т.е. для любых $A,B\in\mathfrak{S}$ и $X\subseteq AB$:*

$$\mu_A^*X=\mu_B^*X.$$

Доказательство.

Случай $B\subseteq A$: Из $B\subseteq A$ следует $\mathfrak{S}_B\subseteq\mathfrak{S}_A$, а значит $\mathfrak{S}_A$ содержит все покрытия для X относительно $\mathfrak{S}_B$. Поэтому в определении внешней меры inf по всем покрытиям из $\mathfrak{S}_A$ будет меньше inf по всем покрытиям из $\mathfrak{S}_B$, т.е.

$$\mu_A^* X \leqslant \mu_B^* X.$$

Покажем, что справедливо и обратное неравенство. Пусть $\{X_n\} \in \mathfrak{S}_A$ — покрытие для X относительно $\mathfrak{S}_A$. Тогда $\{X_n B\} \subseteq \mathfrak{S}_B$ будет покрытием для X относительно $\mathfrak{S}_B$. Получаем,

$$\sum_n \mathrm{m} X_n B \leqslant \sum_n \mathrm{m} X_n \quad \Longrightarrow \quad \mu_B^* X \leqslant \mu_A^* X.$$

<u>Общий случай:</u> Т.к.

$$AB \subset A, \quad AB \subset B,$$

то из предыдущего случая получаем

$$\mu_A^* X = \mu_{AB}^* X = \mu_B^* X.$$ ■

(3) **Определение.** Пусть $\mathfrak{S}$ — полукольцо в E (может быть, без единицы),

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}(\mathfrak{S}_A, \mathrm{m}_A), \quad \mu_A = \mu_A^*.$$

Тогда

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathrm{m}) = \{X \subseteq E \bigm| \forall A \in \mathfrak{S} \quad AX \in \mathcal{L}_A\}$$

образует *класс множеств, измеримых по Лебегу.* Функция, определённая на классе измеримых по Лебегу множеств и совпадающая на нём с внешней мерой:

$$\mu X = \mu^* X \quad (X \in \mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathrm{m})),$$

называется *мерой Лебега.*

(4) **Замечание.** Т.к. $\mathfrak{S}$ — полукольцо, то семейство $\mathfrak{S}_A$ образует полукольцо с единицей в виде множества A. Поэтому для класса измеримых по Лебегу множеств $\mathcal{L}(\mathfrak{S}_A, \mathrm{m}_A)$ и соответствующей ему мере Лебега μ_A выполняются все свойства, рассмотренные в §6.

(5) *Класс измеримых по Лебегу множеств $\mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathrm{m})$ является σ-алгеброй.*

Доказательство. Замкнутость $\mathcal{L}$ относительно дополнения следует из соответствующего свойства $\mathcal{L}_A$ (см. п. 6.4). Докажем замкнутость относительно счётных объединений.

<u>1-й случай ($\mathfrak{S}$ — полукольцо с единицей):</u> Пусть

$$X = \bigcup_n X_n \quad (X_n \in \mathcal{L}).$$

Надо показать, что тогда $X \in \mathcal{L}$. Рассмотрим представление

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n,$$

где

$$Y_1 = X_1, \quad Y_2 = X_2 \setminus X_1, \quad \ldots, \quad Y_n = X_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i.$$

Т.к. Y_n образуется конечным числом объединений и разностей элементов из $\mathcal{L}$, то $Y_n \in \mathcal{L}$ (см. п. 6.7). В силу монотонности внешней меры (см. п. 5.4):

$$\mu^* X \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu Y_n. \tag{1}$$

В силу измеримости конечных сумм Y_n и σ-аддитивности μ:

$$\mu\Big(\sum_{n=1}^{N} Y_n\Big)^{\mathrm{c}} = \mathrm{m}E - \sum_{n=1}^{N} \mu Y_n.$$

Т.к. $\sum_{n=1}^{N} Y_n \subseteq X$, то

$$X^{\mathrm{c}} \subseteq \Big(\sum_{n=1}^{N} Y_n\Big)^{\mathrm{c}},$$

откуда

$$\mu^* X^{\mathrm{c}} \leqslant \mathrm{m}E - \sum_{n=1}^{N} \mu Y_n. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует

$$\mu^* X + \mu^* X^{\mathrm{c}} \leqslant \mathrm{m}E + \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu Y_n.$$

Перейдём в правой части к lim при $N \to \infty$:

$$\mu^* X + \mu^* X^{\mathrm{c}} \leqslant \mathrm{m}E.$$

Обратное неравенство верно всегда (см. п. 5.2), следовательно:

$$\mu^* X^C + \mu^* X = \mathrm{m}E \quad \Longrightarrow \quad X \in \mathcal{L}.$$

<u>2-й случай (общий):</u> Пусть

$$X = \bigcup_n X_n \quad (X_n \in \mathcal{L}),$$

$A \in \mathfrak{S}$ — произвольное множество. Тогда $AX_n \in \mathcal{L}_A$ и (согласно доказанному 1-му случаю, рассматриваемому относительно $\mathcal{L}_A$)

$$AX = \bigcup_{n=1}^{\infty} AX_n \in \mathcal{L}_A,$$

что означает $X \in \mathcal{L}$ по определению.

Мы получили, что $\mathcal{L}$ замкнута относительно операций дополнения и счётного объединения, а значит $\mathcal{L}$ — σ-алгебра. ■

(6) $\mathcal{L}(\mathfrak{S}_A, \mathrm{m}_A) \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathrm{m})$ *для любого* $A \in \mathfrak{S}$.

Доказательство. Пусть $X \in \mathcal{L}_A$, $B \in \mathfrak{S}$ — произвольно. Требуется доказать, что $XB \subseteq \mathcal{L}_B$, т.е.

$$\mu_B^*(XB) + \mu_B^*(B \setminus X) = \mathrm{m}B.$$

Имеем

$$\mu_B^*(XB) + \mu_B^*(B \setminus X) =$$

(т.к. $XB \in \mathcal{L}_A$, то первый μ_B^* можно заменить на μ_A^*; замена $B \setminus X = A(B \setminus X) + B \setminus A$)

$$= \mu_A^*(XB) + \mu_B^*(A(B \setminus X) + B \setminus A) =$$

(аддитивность μ_B^*)

$$= \mu_A^*(XB) + \mu_B^*(A(B \setminus X)) + \mu_B^*(B \setminus A) =$$

(т.к. $A(B \setminus X) \in \mathcal{L}$, переходим от μ_B^* к μ_A^*)

$$= \mu_A^*(XB) + \mu_A^*(A(B \setminus X)) + \mu_B^*(B \setminus A) =$$

(т.к. $B \setminus A \in \mathfrak{S}_B$, то $\mu_B^*(B \setminus A) = \mathrm{m}(B \setminus A)$)

$$= \mu_A^*(XB) + \mu_A^*(A(B \setminus X)) + \mathrm{m}(B \setminus A) =$$
$$= \mu_A^*(XB + A(B \setminus X)) + \mathrm{m}(B \setminus A) =$$

($XB + A(B \setminus X) = A \cap B \in \mathfrak{S}_A$)

$$= \mathrm{m}(AB) + \mathrm{m}(B \setminus A) = \mathrm{m}B.$$ ■

(7) Ограничимся в дальнейшем рассмотрением лишь случая σ-конечных мер.

Определение. Пусть m — σ-конечна. Функция $\mu\colon \mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathrm{m}) \to [0, +\infty]$, определяемая формулой

$$\mu X = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{E_n}(XE_n),$$

называется *мерой Лебега на классе* $\mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathrm{m})$. Если ряд расходится, то полагают $\mu X = +\infty$.

Корректность: Рассмотрим два представления для E:

$$E = \sum_n E_n, \quad E = \sum_k F_k \quad (E_n, F_k \in \mathfrak{S}).$$

Тогда

$$\sum_n \mu_{E_n}(XE_n) = \sum_n \mu_{E_n}\Big(\sum_k XE_nF_k\Big) =$$
$$= \sum_n \sum_k \mu_{E_n}(XE_nF_k) = \sum_k \sum_n \mu_{F_k}(XE_nF_k) =$$
$$= \sum_k \mu_{F_k}(XF_k).$$

σ-аддитивность: Пусть

$$X = \sum_{m=1}^{\infty} X_m, \quad (X, X_m \in \mathcal{L}).$$

Тогда

$$\mu X = \sum_n \mu_{E_n}(XE_n) = \sum_n \mu_{E_n}\big(\sum_m X_mE_n\big) =$$
$$= \sum_n \sum_m \mu_{E_n}(X_mE_n) = \sum_m \sum_n \mu_{E_n}(X_mE_n) = \sum_m \mu X_m.$$

8 *X измеримо по Лебегу и $\mu X = 0$ тогда и только тогда, когда при любом $\varepsilon > 0$ для множества X существует покрытие $\{X_n\} \subseteq \mathfrak{S}$ с мерой меньшей ε:*

$$X \subseteq \bigcup_n X_n \quad \text{и} \quad \sum_n \mathrm{m}X_n < \varepsilon.$$

Доказательство.

Необходимость: Пусть $\varepsilon > 0$, $A \in \mathfrak{S}$ — произвольное множество. Тогда найдётся покрытие $\{X_n\}$ такое, что

$$XA \subseteq \bigcup_n X_nA, \quad \sum_n \mathrm{m}(X_nA) \leqslant \sum_n \mathrm{m}X_n < \varepsilon.$$

В силу произвольности ε и по определению внешней меры приходим к $\mu_A^*(AX) = 0$. Тогда

$$\mu_A^*(AX) + \mu_A^*(A \setminus X) = \mu_A^*(A \setminus X) \leqslant \mu_A^* A = \mathrm{m}A.$$

Обратное неравенство верно всегда (см. п. 5.2); следовательно, для любого $A \in \mathfrak{S}$ выполняется $AX \in \mathcal{L}_A$, что по определению означает $X \in \mathcal{L}$. Тогда
$$\mu_A(AX) = \mu_A^*(AX) = 0,$$
а значит
$$\mu X = \sum_n \mu_{E_n}(XE_n) = \sum_n 0 = 0.$$

Достаточность: Пусть $X \in L$ и $\mu X = 0$. Тогда для любого n
$$\mu_{E_n}^*(XE_n) = 0.$$
Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие $\{Y_k^{(n)}\}$ множества XE_n такое, что
$$\sum_k \mathrm{m} Y_k^{(n)} < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Положим
$$X_n = \bigcup_k Y_k^{(n)},$$
тогда
$$X \subseteq \bigcup_n X_n \quad \text{и} \quad \sum_n \mathrm{m} X_n \leqslant \sum_n \sum_k \mathrm{m} Y_k^{(n)} < \varepsilon.$$
■

9 **Пример.** Пусть $\mathfrak{S} = \{\langle a; b\rangle \bigm| a, b \in \mathbb{R}\}$ — полукольцо в $\mathbb{R}$, $\mathrm{m}(\langle a, b\rangle) = b - a$ — σ-конечна. Тогда $(\mathfrak{S}, \mathrm{m})$ порождает линейную меру Лебега, и $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathrm{m})$.

10 **Упражнение.** Пусть $\mathfrak{S}$ — полукольцо, порождённое отрезками на $\mathbb{R}$, m — мера на $\mathfrak{S}$, определяемая как длина отрезка. Доказать, что все ограниченные замкнутые множества на прямой $\mathbb{R}$ измеримы по Лебегу относительно $\mathfrak{S}$ и m.

§8. Меры Лебега–Стилтьеса на числовой прямой

1 Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех неубывающих и непрерывных слева функций $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) < +\infty.$$
Пусть $\mathfrak{S}$ — полукольцо с единицей в $\mathbb{R}$ всех интервалов вида $[a, b)$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$.

Определение. Зададим исходя из $F \in \mathcal{F}$ меру на $\mathfrak{S}$:

$$\mathrm{m}_F[a, b) = F(b) - F(a).$$

Эта мера допускает продолжение до меры Лебега на $\mathcal{L}_F = \mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathrm{m}_F)$:

$$\mu_F \colon \mathcal{L}_F \to [0, +\infty).$$

Мера Лебега μ_F, порождаемая m_F, называется *мерой Лебега–Стилтьеса* на числовой прямой.

Заметим, что по построению для каждой $F \in \mathcal{F}$ верно включение $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}_F$.

Меры Лебега–Стилтьеса интересны тем, что ими исчерпываются все меры на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

(2) *Пусть* $\mathrm{m} \colon \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty)$ *— некоторая мера. Тогда существует и определена однозначно с точностью до постоянного слагаемого функция* $F \in \mathcal{F}$ *такая, что порождаемая ей мера Лебега–Стилтьеса* μ_F *совпадает с* m *на* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$*:*

$$\mathrm{m} = \mu_F|_{\mathfrak{B}(\mathbb{R})}.$$

Доказательство. Определим функцию F равенством

$$F(t) = \mathrm{m}(-\infty, t].$$

Из свойств меры (см. п. 2.4 и п. 3.12) следует, что F не убывает, непрерывна слева и $F(+\infty) - F(-\infty) \leqslant \mathrm{m}E < +\infty$, т.е. $F \in \mathcal{F}$. Т.к. $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ порождается множествами вида $[a, b)$ $(a, b \in \mathbb{R})$, то $\mathrm{m} = \mathrm{m}_F$, а значит и

$$\mathrm{m} = \mu_F|_{\mathfrak{B}(\mathbb{R})}.$$

Покажем, что функция, соответствующая m, определяется с точностью до константы. Пусть $G \in \mathcal{F}$ — другая функция, порождающая подходящую меру Лебега–Стилтьеса:

$$\mathrm{m} = \mu_G|_{\mathfrak{B}(\mathbb{R})} = \mu_F|_{\mathfrak{B}(\mathbb{R})}. \tag{1}$$

Предположим не существует такой константы $c \in \mathbb{R}$, что $F = G + c$. Тогда найдётся пара $x < y$:

$$G(y) - G(x) \neq F(y) - F(x),$$

т.е. $\mu_F \neq \mu_G$, что противоречит (1). Следовательно, предположение неверно и функции F и G совпадают с точностью до константы. ■

(3) Аналогично можно определить меры Лебега–Стилтьеса на отрезках $[a, b]$. Эти меры можно перечислить с помощью неубывающих, непрерывных слева функций Φ, определённых на $[a, b]$. В частности, функция вида $\Phi(t) = t \quad (t \in [a, b])$ порождает линейную меру Лебега на отрезке $[a, b]$.

(4) Если функция $F \in \mathcal{F}$ принимает не более чем счётное число значений, то $\mathcal{L}_F$ совпадает с семейством всех подмножеств $\mathbb{R}$.

(5) **Упражнения.**

1. Пусть $F = \chi_{(0,+\infty)}$. Показать, что
   1) $\mu_F\{0\} = 1$.
   2) $\mathcal{L}_F$ совпадает с семейством всех подмножеств $\mathbb{R}$.
   3) Для любого $X \subseteq R$:
   $$\mu_F X = \begin{cases} 1, & 0 \in X; \\ 0, & 0 \notin X. \end{cases}$$
2. Доказать утверждение п. 4.
3. Показать, что порождаемая $F \in \mathcal{F}$ функция
   $$\mathrm{m}_F[a, b) = F(b) - F(a) \quad (a < b \in \mathbb{R})$$
   является σ-аддитивной.

§9. Разложение меры Лебега–Стилтьеса на дискретную и непрерывную компоненты

(1) **Определение.** Для $F \in \mathcal{F}$ определим функцию
$$F_d(t) = \sum_{t_k < t} (F(t_k+) - F(t_k)),$$
где $\{t_k\}$ — множество всех точек разрыва F (известно, что для функций из $\mathcal{F}$ их не более, чем счётное число). Назовём F_d *дискретной компонентой* функции F.

Функцию $F_c = F - F_d$ назовём *непрерывной компонентой* функции F.

Легко видеть, что $F_d \in \mathcal{F}$.

(2) *Для любой $F \in \mathcal{F}$ функция F_c непрерывна и $F_c \in \mathcal{F}$.*

Доказательство. Покажем, что F_c не убывает. Для $t < s$

$$F(s) - F(t) \geqslant \sum_{t \leqslant t_k < s} (F(t_k+) - F(t_k)) =$$

$$= \sum_{t_k < s} (F(t_k+) - F(t_k)) - \sum_{t_k < t} (F(t_k+) - F(t_k)) = F_d(s) - F_d(t).$$

Поэтому $F_c(s) = F(s) - F_d(s) \geqslant F(t) - F_d(t) = F_c(t)$.

F_c непрерывна слева в силу непрерывности слева фукнций F, F_d. С другой стороны, т.к. $F(t+) = F(t) + F_d(t+) - F_d(t)$, то

$$F_c(t+) = F(t+) - F_d(t+) = F(t) + F_d(t+) - F_d(t) - F_d(t+) = F_c(t),$$

т.е. F_c непрерывна справа. Итак, F_c не убывает и непрерывна, следовательно $F_c \in \mathcal{F}$. ∎

(3) Всякая функция $F \in \mathcal{F}$ есть сумма своей дискретной F_d и непрерывной F_c компонент:

$$F = F_d + F_c.$$

Следовательно, для порождаемой функцией F меры m_F верно представление (см. п. 8.1):

$$\mathrm{m}_F = \mathrm{m}_d + \mathrm{m}_c,$$

где $\mathrm{m}_d = \mathrm{m}_{F_d}$, $\mathrm{m}_c = \mathrm{m}_{F_c}$.

Аналогичное равенство верно и для лебеговского продолжения меры m_F. Пусть μ_c и μ_d — меры Лебега, порождённые мерами m_c и m_d, соответственно.

(4) *Всякая мера Лебега–Стилтьеса μ_F представима в виде*

$$\mu_F = \mu_c + \mu_d$$

в том смысле, что равенство

$$\mu_F X = \mu_d X + \mu_c X$$

справедливо при любом множестве X, для которого определена левая или правая часть равенства.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}$ — полукольцо с единицей, образованное интервалами $[a, b)$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$ и $\{X_n\} \subseteq \mathfrak{S}$ — покрытие X. Тогда

$$\sum_n \mathrm{m}_F X_n = \sum_n \mathrm{m}_c X_n + \sum_n \mathrm{m}_d X_n \geqslant \mu_c^* X + \mu_d^* X.$$

В силу произвольности покрытия $\{X_n\}$ отсюда следует

$$\mu_F^* X \geqslant \mu_c^* X + \mu_d^* X. \tag{1}$$

С другой стороны, пусть задана $\varepsilon > 0$. Для X найдутся покрытия с попарно непересекающимися элементами $\{Y_n\}$, $\{Z_k\}$ такие, что

$$\sum_n \mathrm{m}_c Y_n < \mu_c^* X + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_k \mathrm{m}_d Z_k < \mu_d^* X + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\{Y_n Z_k\}_{n,k}$ образует покрытие X, причём

$$\sum_n \sum_k \mathrm{m}_F(Y_n Z_k) = \sum_n \sum_k \mathrm{m}_c(Y_n Z_k) + \sum_k \sum_n \mathrm{m}_d(Y_n Z_k) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_n \mathrm{m}_c Y_n + \sum_k \mathrm{m}_d Z_k < \mu_c^* X + \mu_d^* X + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε это означает

$$\mu_F^* X \leqslant \mu_c^* X + \mu_d^* X. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем

$$\mu_F^* X = \mu_c^* X + \mu_d^* X. \tag{3}$$

Осталось показать, что в этом равенстве можно от внешних мер перейти к мерам Лебега, т.е. что из $X \in \mathcal{L}_F$ следует $X \in \mathcal{L}_{F_c}$ и $X \in \mathcal{L}_{F_d}$, и наоборот.

Сложим (3) с аналогичным равенством для X^{c}:

$$\mu_F^* X + \mu_F^* X^{\mathrm{c}} = \mu_c^* X + \mu_d^* X + \mu_c^* X^{\mathrm{c}} + \mu_d^* X^{\mathrm{c}}.$$

Заметим, что из п. 8.4 следует $\mu_d^* X + \mu_d^* X^{\mathrm{c}} = \mathrm{m}_d X$, поэтому $X \in \mathcal{L}_{F_d}$ и

$$\mu_F^* X + \mu_F^* X^{\mathrm{c}} = \mu_c^* X + \mu_c^* X^{\mathrm{c}} + \mathrm{m}_F \mathbb{R} - \mathrm{m}_c \mathbb{R}. \tag{4}$$

Пусть $X \in \mathcal{L}_F$. Тогда из (4) следует $\mu_c^* X + \mu_c^* X^{\mathrm{c}} = \mathrm{m}_c \mathbb{R}$, т.е. $X \in \mathcal{L}_{F_c}$. Пусть, обратно, $X \in \mathcal{L}_{F_c}$. Тогда из (4) приходим к $X \in \mathcal{L}_F$.

Итак, для любого $X \subseteq \mathbb{R}$ выполняется

$$\mu_F X = \mu_d X + \mu_c X,$$

если для этого X определена левая или правая часть равенства. ■

Часть 3. Измеримость функций. Виды сходимости

§10. Прообраз кольца относительно отображения

① **Определение.** Пусть для произвольных множеств E, F задано отображение $f\colon E \to F$. *Прообразом* множества $Y \subseteq F$ относитильно отображения f называется множество
$$f^{-1}(Y) = \{x \in E \mid f(x) \in Y\}.$$

Пусть $\mathfrak{T}$ — семейство подмножеств в F. *Прообразом семейства* $\mathfrak{T}$ относительно отображения f называется класс
$$f^{-1}(\mathfrak{T}) = \{f^{-1}(Y) \mid Y \in \mathfrak{T}\}.$$

② **Замечание.** Прообраз обладает следующими свойствами:

1) $f^{-1}\Big(\bigcup\limits_{i\in I} Y_i\Big) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(Y_i)$;
2) $f^{-1}\Big(\bigcap\limits_{i\in I} Y_i\Big) = \bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}(Y_i)$;
3) $f^{-1}(Y^{\mathrm{c}}) = (f^{-1}(Y))^{\mathrm{c}}$.

Прообраз кольца в F относительно отображения f является кольцом в E.

③ *Пусть задано отображение $f\colon E \to F$ и $\mathfrak{E}(\mathfrak{T})$ — кольцо, порождённое семейством $\mathfrak{T}$ в F. Кольцо, порождённое $f^{-1}(\mathfrak{T})$, совпадает с прообразом $\mathfrak{E}(\mathfrak{T})$ относительно f:*
$$f^{-1}(\mathfrak{E}(\mathfrak{T})) = \mathfrak{E}(f^{-1}(\mathfrak{T})).$$

Доказательство.

<u>Включение $f^{-1}(\mathfrak{E}(\mathfrak{T})) \supset \mathfrak{E}(f^{-1}(\mathfrak{T}))$:</u> Т.к. $\mathfrak{T} \in \mathfrak{E}(\mathfrak{T})$, то
$$f^{-1}(\mathfrak{T}) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{E}(\mathfrak{T})).$$

Согласно п. 2 семейство $f^{-1}(\mathfrak{E}(\mathfrak{T}))$ является кольцом, а значит содержит порождаемое $f^{-1}(\mathfrak{T})$ кольцо:
$$\mathfrak{E}(f^{-1}(\mathfrak{T})) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{E}(\mathfrak{T})).$$

<u>Включение $f^{-1}(\mathfrak{E}(\mathfrak{T})) \subset \mathfrak{E}(f^{-1}(\mathfrak{T}))$:</u> Пусть $\mathfrak{R}$ — произвольное кольцо в E такое, что $f^{-1}(\mathfrak{T}) \subseteq \mathfrak{R}$. Пусть
$$\mathfrak{E}_0(\mathfrak{T}) = \{Y \in \mathfrak{E}(\mathfrak{T}) \mid f^{-1}(Y) \in \mathfrak{R}\}.$$

$\mathfrak{E}_0$ обладает следующими свойствами:

1) $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{E}_0(\mathfrak{T}) \subseteq \mathfrak{E}(\mathfrak{T})$.
2) Если $\mathfrak{E}_0(\mathfrak{T})$ — кольцо, то $\mathfrak{E}_0(\mathfrak{T}) = \mathfrak{E}(\mathfrak{T})$.

Тогда $\mathfrak{R}$ содержит $f^{-1}(\mathfrak{E}(\mathfrak{T}))$. Взяв в качестве $\mathfrak{R}$ семейство $\mathfrak{E}(f^{-1}(\mathfrak{T}))$, получаем требуемое. ■

(4) **Замечание.** Рассмотренные утверждения также верны для алгебр, σ-колец и σ-алгебр.

(5) **Упражнения.**

1. Пусть $f\colon E \to F$, $\mathfrak{T}_E$ — кольцо на E. Показать, что $f(\mathfrak{T}_E)$ — не обязательно кольцо.
2. Пусть $f\colon E \to F$, $\mathfrak{T}_F$ — σ-алгебра на F. Показать, что $f^{-1}(\mathfrak{T}_F)$ — также σ-алгебра.

§11. Определение измеримых функций

(1) Пусть E — произвольное множество, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра в E. Функция

$$f\colon E \to \mathbb{R}$$

называется *измеримой*, если

$$f^{-1}(\mathfrak{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathfrak{A}.$$

Обозначим через $\mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$ класс всех измеримых относительно $(E, \mathfrak{A})$ фукнций.

(2) **Пример.** Пусть для $X \in \mathfrak{A}$

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in X; \\ 0, & x \notin X. \end{cases}$$

Тогда χ_X — измеримая функция.

(3) *Функция $f \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда для любого $c \in \mathbb{R}$*

$$f^{-1}((-\infty, c)) = \{x \in E \mid f(x) < c\} \in \mathfrak{A}.$$

Доказательство.

Достаточность: Очевидно следует из $(-\infty, c) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

<u>Необходимость:</u> Пусть $\mathfrak{T} = \{(-\infty, c)\}_{c\in\mathbb{R}}$. Семейство $\mathfrak{T}$ порождает σ-алгебру $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{T})$, совпадающую с борелевской $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Поэтому (см. п. 10.3 и 10.4)

$$f^{-1}(\mathfrak{B}(\mathbb{R})) = f^{-1}(\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{T})) = \mathfrak{A}_\sigma(f^{-1}(\mathfrak{T})) \subseteq \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}. \qquad \blacksquare$$

(4) *Пусть* $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$ *и* $f_n \to f$*. Тогда* $f \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$*.*

Доказательство. Пусть $c \in \mathbb{R}$. Для фиксированного $x \in E$ из сходимость $f_n(x) \to f(x)$ следует:

$$f(x) < c \quad \Longrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n\ \forall m \geqslant n \quad f_m(x) < c + \frac{1}{k}.$$

Т.к. сходимость происходит при любом $x \in E$, то

$$\{x \in E \mid f(x) < c\} = \bigcap_k \bigcup_n \bigcap_m \Big\{x \in E \mid f_m(x) < c + \frac{1}{k}\Big\}.$$

В силу $f_m \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$ множества $\{x \in E \mid f_m(x) < c + 1/k\} \in \mathfrak{A}$, а значит и их счётные объединения и пересечения, т.е.

$$\{x \in E \mid f(x) < c\} \in \mathfrak{A} \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$f \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A}). \qquad \blacksquare$$

(5) **Определение.** Измеримые функции, принимающие не более чем счётное число значений, называются *простыми.*

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — различные значения, которые принимает простая функция $f\colon E \to \mathbb{R}$. Т.к. $\{\lambda_k\} \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, то

$$X_k = \{x \in E \mid f(x) = \lambda_k\} = f^{-1}(\{\lambda_k\}) \in \mathfrak{A}$$

и

$$X_k X_m = \varnothing, \quad \sum_k X_k = E.$$

Таким образом, любая простая функция может быть представлена в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \chi_{X_k}(x), \tag{1}$$

где

$$\sum_k X_k = E \quad (X_k \in \mathfrak{A}).$$

Верно и обратное: если функция представима в виде (1), то она проста и измерима.

6 $f \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$ *тогда и только тогда, когда существует последовательность простых функций* $\{f_n\}$ *такая, что* $f_n \rightrightarrows f$.

Доказательство.

Необходимость: Т.к. простые функции f_n измеримы, то их предельная функция f тоже измерима (см. п. 4).

Достаточность: Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно и $n \in \mathbb{N}$ такое, что $1/n < \varepsilon$. Определим последовательность простых функций $\{f_n\}$ согласно правилу:

$$f_n(x) = \frac{k}{n}, \quad \text{если} \quad \frac{k-1}{n} \leqslant f(x) < \frac{k}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

т.е.

$$f_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{k}{n} \chi_{X_k}(x), \quad X_k = f^{-1}\Big(\Big[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\Big)\Big).$$

Тогда для любого $x \in E$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

т.е. $f_n \rightrightarrows f$. ∎

7 **Упражнения.**

1. Пусть $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$ и
$$f(x) = \sup_n f_n(x) < +\infty.$$
Показать, что $f \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$.
2. Пусть $f^3(x) \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$. Тогда $f \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$.
3. Пусть $f, g \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$,
$$m(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \quad M(x) = \max\{f(x), g(x)\}.$$
Показать, что $m, M \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$.
4. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Показать, что $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.
5. Пусть $f, g \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$. Показать, что $\{x \in E \bigm| f(x) \neq g(x)\} \in \mathfrak{A}$.
6. Пусть $f \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$. Показать, что тогда $|f| \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$, но обратное утверждение неверно.
7. Пусть $f \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$, $a, b \in \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию
$$\varphi(x) = \begin{cases} a, & f(x) < a; \\ f(x), & a \leqslant x \leqslant b; \\ b, & f(x) > b. \end{cases}$$

Показать, что $\varphi \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$.

8. Пусть $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $h_1, h_2 \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$. Рассмотрим
$$\varphi(x) = f(h_1(x), h_2(x)) \quad (x \in E).$$
Тогда $\varphi \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$.

9. Пусть $f_n \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$. Определить, при каких условиях измеримы функции
   1) $g_1(x) = \sup\limits_n f_n(x) \quad (x \in E)$.
   2) $g_2(x) = \inf\limits_n f_n(x) \quad (x \in E)$.
   3) $g_3(x) = \varlimsup\limits_n f_n(x) \quad (x \in E)$.
   4) $g_4(x) = \varliminf\limits_n f_n(x) \quad (x \in E)$.

§12. Свойства измеримых функций

1 *Пусть* $f, g \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$. *Тогда функции*
$$f \pm g,\ \lambda f\ (\lambda \in \mathbb{R}),\ fg,\ 1/f\ \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A}).$$

Доказательство.

$\underline{f \pm g}$: Пусть $f, g \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$. Тогда существуют последовательности простых функций $\{f_n(x)\}$, $\{g_n(x)\}$ такие, что $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$, и
$$f_n(x) = \sum_k \lambda_k^{(n)} \chi_{X_k}(x), \quad g_n(x) = \sum_s \mu_s^{(n)} \chi_{Y_s}(x),$$
где
$$X_k^{(n)}, Y_s^{(n)} \in \mathfrak{A}, \quad \sum_k X_k^{(n)} = \sum_s Y_s^{(n)} = E.$$
Рассмотрим последовательность простых функций
$$h_n(x) = \sum_{k,s} (\lambda_k^{(n)} + \mu_s^{(n)}) \chi_{X_k^{(n)} Y_s^{(n)}}(x).$$
Очевидно,
$$h_n(x) \rightrightarrows f + g \quad \Longrightarrow \quad f + g \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A}).$$

$\underline{f^2}$: Пусть $c \geqslant 0$. Тогда
$$\{x \in E \mid f^2(x) < c\} = \{x \in E \mid |f(x)| < \sqrt{c}\} =$$
$$= \{x \in E \mid f(x) < \sqrt{c}\} \cap \{x \in E \mid f(x) > -\sqrt{c}\} \in \mathfrak{A}.$$

При $c < 0$
$$\{x \in E \mid f^2(x) < c\} = \varnothing \in \mathfrak{A}.$$
Следовательно, $f^2 \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$.

<u>fg:</u> Следует из доказанных пунктов и представления
$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2). \qquad \blacksquare$$

(2) **Замечание.** Если $f \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$ и $X \in \mathfrak{A}$, то
$$f\chi_X \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A}).$$

(3) **Определение.** Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *измеримой по Борелю* (*$\mathcal{B}$-измеримой*), если
$$f^{-1}(\mathfrak{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$

Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ $(X \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ называется измеримой по Борелю, если
$$f^{-1}(\mathfrak{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathfrak{B}(X) = \{B \cap X \mid B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}.$$

(4) *Пусть $f \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$, φ — $\mathcal{B}$-измерима. Тогда их суперпозиция*
$$\varphi \circ f \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A}).$$

Доказательство. Пусть $Y \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Т.к. $f \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$, то $f^{-1}(X) \in \mathfrak{A}$ $(X \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Следовательно,
$$(\varphi \circ f)^{-1}(Y) = f^{-1}(\varphi^{-1}(Y)) \in \mathfrak{A}. \qquad \blacksquare$$

(5) **Упражнения.**

1. Пусть $f \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$ и для любого $x \in E$: $f(x) \neq 0$. Тогда $1/f \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$.
2. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная функция. Показать, что $f\chi_{\mathbb{Q}}$ измерима по Борелю.
3. Пусть $f(x)$ $(0 < x < 1)$ дифференцируема на $(0, 1)$. Тогда $f'(x)$ измерима по Борелю на $(0, 1)$.

§13. Эквивалентные функции

1 **Определение.** Мера μ называется *полной*, если для любого $X \in \mathfrak{A}$ такого, что
$$\mu X = 0,$$
из $Y \subseteq X$ следует
$$Y \in \mathfrak{A} \quad \text{и} \quad \mu Y = 0.$$

Рассмотрим $(E, \mathfrak{A}, \mu)$, где E — некоторое множество, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра на E, μ — полная σ-конечная мера.

Определение. Функции $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ называются *эквивалентными*, если
$$\mu\{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\} = 0,$$
т.е. они равны почти всюду на E. Обозначение: $f \sim g$.

2 *Если $f \sim g$ и $f \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$, то $g \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$.*

Доказательство. Для $c \in \mathbb{R}$ рассмотрим
$$\begin{aligned}\{x \in E \mid g(x) < c\} &= \{x \in E \mid f(x) = g(x), \quad f(x) < c\} + \\ &\quad + \{x \in E \mid f(x) \neq g(x), \quad g(x) < c\} = \\ &= \{x \in E \mid f(x) < c\} \cap \{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}^{\mathrm{c}} + \\ &\quad + \{x \in E \mid f(x) \neq g(x), \quad g(x) < c\}.\end{aligned}$$
Здесь
1) $\{x \in E \mid f(x) < c\} \in \mathfrak{A}$ в силу $f \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$;
2) $\{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$ в силу $f \sim g$;
3) $\{x \in E \mid f(x) \neq g(x), \quad g(x) < c\} \in \mathfrak{A}$ в силу включения
$$\{x \in E \mid f(x) \neq g(x), \quad g(x) < c\} \subseteq \{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}$$
и полноты меры μ.

Следовательно
$$\{x \in E \mid g(x) < c\} \in \mathfrak{A}. \qquad \blacksquare$$

3 *Пусть $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, μ — линейная мера Лебега. Тогда из $f \sim g$ следует $f = g$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторой точки $x_0 \in \mathbb{R}$
$$f(x_0) \neq g(x_0).$$

По свойству сохранения знака непрерывной функции найдётся $\delta > 0$:
$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) \neq g(x),$$
т.е.
$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}.$$
Тогда
$$\mu\{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\} \geqslant \mu((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = 2\delta > 0,$$
что противоречит эквивалентности $f \sim g$. Следовательно, $f = g$. ∎

(4) Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности на $\mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$, т.е. оно удовлетворяет следующим свойствам:

1) *рефлексивность*: $f \sim f$;
2) *симметричность*: если $f \sim g$, то $g \sim f$;
3) *транзитивность*: если $f \sim g$ и $g \sim h$, то $f \sim h$.

Если нас интересуют измеримые функции с точностью до множеств меры нуль, то можно отождествлять функции с эквивалентными им, т.е. рассматривать классы измеримых функций $\mathfrak{F}_i$ такие, что
$$f, g \in \mathfrak{F}_i \iff f \sim g.$$
Семейство таких классов образует $\mathcal{M}(E, \mathfrak{A}, \mu)$ — множество классов измеримых функций.

§14. Сходимость почти всюду

(1) **Определение.** Пусть дано пространство $(E, \mathfrak{A}, \mu)$, где μ — σ-конечная мера. Говорят, что функция $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ сходится *почти всюду* к функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, если
$$\lim_n f_n \overset{\text{п.в.}}{=} f,$$
т.е.
$$\mu\{x \in E \mid f_n(x) \not\to f(x)\} = 0.$$
Обозначение: $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$.

(2) **Пример.** Пусть на $\mathbb{R}$ с линейной мерой Лебега задана последовательность функций
$$f_n(x) = (-1)^n x^n \chi_{[0,1]}(x).$$
Тогда $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$, но при этом $f \not\to 0$, т.к. в точке 1 последовательность f_n расходится.

③ *Если $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(E, \mathfrak{A}, \mu)$ и $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$, то $f \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A}, \mu)$.*

Доказательство. Пусть

$$X = \{x \in E \mid f_n(x) \not\to f(x)\}.$$

Тогда из $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$ следует $X \in \mathfrak{A}$ и $\mu X = 0$, а значит $X^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{A}$ и $f_n \chi_{X^{\mathrm{c}}}$ — измеримы. Т.к.

$$f_n \chi_{X^C} \to f \chi_{X^C},$$

то $f \chi_{X^C}$ — измерима. Осталось заметить, что из $f \chi_{X^C} \sim f$ следует измеримость f (см. п. 13.2). ∎

④ **Теорема Егорова.** *Пусть $\mu E < +\infty$, $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(E, \mathfrak{A}, \mu)$ и*

$$f_n \overset{\text{п.в.}}{\rightrightarrows} f.$$

Тогда для любого $\delta > 0$ найдётся $X \in \mathfrak{A}$ такое, что

$$\mu X < \delta \quad \text{и} \quad f_n \chi_{X^{\mathrm{c}}} \rightrightarrows f \chi_{X^{\mathrm{c}}}.$$

Доказательство. Т.к. f_n — измеримы, то f — измерима. Рассмотрим для $m \in \mathbb{N}$ множества

$$X_n^{(m)} = \bigcap_{i \geqslant n} \left\{ x \in E \;\middle|\; |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \right\}.$$

При фиксированном m

$$X_1^{(m)} \subseteq X_2^{(m)} \subseteq \ldots.$$

Пусть

$$X_m = \bigcup_n X_n^{(m)}.$$

Заметим, что $\mu X_m^{\mathrm{c}} = 0$.

⌜ Действительно, пусть $x \in X_m^{\mathrm{c}}$. Тогда

$$x \in \bigcap_n (X_n^{(m)})^{\mathrm{c}} \quad \Longrightarrow \quad x \in \bigcap_n \bigcup_{i \geqslant n} \left\{ x \in E \;\middle|\; |f_i(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{m} \right\} \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad x \in \{x \in E \mid f_n(x) \not\to f(x)\},$$

что означает $X_m^{\mathrm{c}} \subseteq \{x \in E \mid f_n(x) \not\to f(x)\}$, откуда $\mu X_m^{\mathrm{c}} = 0$. ⌟

Согласно п. 3.12:

$$\mu X_m = \lim_n \mu X_n^{(m)}.$$

Тогда $\forall \delta > 0\ \exists n_0 = n_0(m)$:

$$\mu(X_m \setminus X^{(m)}_{n_0(m)}) < \frac{\delta}{2^m}. \tag{1}$$

Пусть

$$X = \Big(\bigcap_m X^{(m)}_{n_0(m)}\Big)^{\mathrm{c}}.$$

Тогда $\forall x \in X^{\mathrm{c}}\ \forall m \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \quad (n > n_0(m)).$$

Следовательно, $f_n \rightrightarrows f$ на X^{c}. Кроме того,

$$\mu X = \mu\Big(\bigcap_m X^{(m)}_{n_0(m)}\Big)^{\mathrm{c}} = \mu \bigcup_m (X^{(m)}_{n_0(m)})^{\mathrm{c}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_m \mu(X^{(m)}_{n_0(m)})^{\mathrm{c}} = \sum_m \mu\Big((X_m + X_m^{\mathrm{c}})(X^{(m)}_{n_0(m)})^{\mathrm{c}}\Big) =$$

(из $X^{(m)}_{n_0(m)} \subseteq X_m$ следует $(X^{(m)}_{n_0(m)})^{\mathrm{c}} \supseteq X_m^{\mathrm{c}}$, а значит $X_m^{\mathrm{c}}(X^{(m)}_{n_0(m)})^{\mathrm{c}} = X_m^{\mathrm{c}}$)

$$= \sum_m \Big(\mu X_m^{\mathrm{c}} + \mu(X_m \setminus X^{(m)}_{n_0(m)})\Big) = \sum_m \frac{\delta}{2^m} = \delta,$$

т.к. $\mu X_m^{\mathrm{c}} = 0$ и в силу (1). ■

5 **Упражнения.**

1. Пусть

$$f_n(x) = \frac{n \sin x}{1 + n^2 \sin^2 x} \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

Указать функцию f и множество $X \in \mathfrak{A}$ такие, что

$$\mu X < \delta \quad \text{и} \quad f_n \chi_{X^{\mathrm{c}}} \rightrightarrows f \chi_{X^{\mathrm{c}}}.$$

2. Пусть $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$, $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} g$. Показать, что тогда $f \sim g$.
3. Пусть $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$, $f \sim g$. Показать, что тогда $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} g$.

§15. Сходимость по мере

1 Пусть дана $(E, \mathfrak{A}, \mu)$, где μ — полная σ-конечная мера.

Определение. Последовательность измеримых функций $f_n \colon E \to \mathbb{R}$ *сходится по мере* к измеримой функции $f \colon E \to \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_n \mu\{x \in E \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} = 0.$$

Обозначение: $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

(2) *Пусть $\mu E < +\infty$ и $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ — измеримы. Если*

$$f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f, \quad \text{то} \quad f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

Доказательство. Функция f измерима как п.в. предел последовательности измеримых функций f_n (см. п. 14.3). Пусть

$$X_n(\varepsilon) = \{x \in E \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}.$$

Требуется показать, что $\lim_n \mu X_n(\varepsilon) = 0$. Пусть

$$X = \bigcap_{m=1}^{\infty} Y_m, \quad Y_m = \bigcup_{n \geqslant m} X_n(\varepsilon).$$

Из $\mu E < +\infty$ следует $\mu Y_m < +\infty$. Т.к., к тому же, $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots$, то (см п. 3.12)

$$\mu X = \lim_m \mu Y_m.$$

Если $x \in X$, то x принадлежит бесконечному числу множеств $X_n(\varepsilon)$, что означает $f_n(x) \not\to f(x)$. Следовательно,

$$X \subseteq \{x \in E \mid f_n(x) \not\to f(x)\} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \mu X = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_m \mu Y_m = 0.$$

Т.к. $X_n(\varepsilon) \subseteq Y_n$, то для любых $\varepsilon > 0$

$$\mu X_n(\varepsilon) \to 0. \qquad \blacksquare$$

(3) **Замечание.** Из сходимости по мере, вообще говоря, не следует сходимость п.в.

Например, пусть $E = [0, 1)$, μ — линейная мера Лебега. Рассмотрим последовательность функций

$$f_{i,j} = \chi_{[\frac{i-1}{j}, \frac{i}{j})} \quad (\forall i, j \in \mathbb{N}\colon i \leqslant j).$$

Перенумеруем эту последовательность подряд: $\{f_n\}$. Тогда

$$\mu\{x \mid |f_n| \geqslant \varepsilon\} \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{\mu} 0.$$

При этом при фиксированном x последовательность $\{f_n(x)\}$ состоит из бесконечного числа 0 и 1, а значит $f_n(x) \not\to 0$ ни в одной точке $x \in E$.

4 *Пусть* $f_n \xrightarrow{\mu} f$. *Тогда существует подпоследовательность* $\{f_{n_k}\}$ *такая, что* $f_{n_k} \xrightarrow{\text{п.в.}} f$.

Доказательство. Пусть даны последовательности чисел $\{\varepsilon_n\}$, $\{\eta_n\}$ такие, что

$$\varepsilon_n > 0, \quad \varepsilon_n \to 0; \qquad \eta_n > 0, \quad \sum_n \eta_n < +\infty.$$

Положим

$$X_n(\varepsilon) = \{x \in E \ \big|\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}.$$

Построим последовательность $\{f_{n_k}\}$ по индукции. Пусть индекс $n_1 \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\mu X_{n_1}(\varepsilon_1) < \eta_1.$$

Предположим, что $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$ уже выбраны. Индекс n_k определим исходя из условий

$$n_k > n_{k-1}, \quad \mu X_{n_k}(\varepsilon_k) < \eta_k.$$

Рассмотрим

$$X = \bigcap_i \bigcup_{k \geqslant i} X_{n_k}(\varepsilon_k).$$

Тогда

$$\mu X \leqslant \mu\Big(\bigcup_{k \geqslant i} X_{n_k}(\varepsilon_k)\Big) \leqslant \sum_{k \geqslant i} \mu(X_{n_k}(\varepsilon_k)) < \sum_{k=i}^{\infty} \eta_k \to 0 \quad (i \to \infty).$$

Следовательно,

$$\mu X = 0. \tag{1}$$

Если для некоторого $x \in E$

$$f_{n_k}(x) \not\to f(x) \quad (k \to \infty),$$

то, в силу $\varepsilon_k \to 0$, для бесконечного числа индексов k

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_k.$$

Следовательно, $x \in X_{n_k}(\varepsilon_k)$ для бесконечно многих n_k, что означает $x \in X$. Учитывая, к тому же, (1), приходим к

$$\mu\{x \in E \ \big|\ f_{n_k}(x) \not\to f(x)\} = 0. \qquad \blacksquare$$

5 **Замечание.** Если $\mu E < +\infty$, то

$$f_n \rightrightarrows f \quad \Longrightarrow \quad f_n \to f \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

⑥ Упражнения.

1. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность измеримых функций. Показать, что
$$f_n \xrightarrow{\mu} f, \quad f_n \xrightarrow{\mu} g \quad \Longleftrightarrow \quad f \sim g.$$

2. Если $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и $g_n \xrightarrow{\mu} g$, то $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$.

3. Пусть $\mu E < +\infty$. Показать, что
$$f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{m \geqslant n} |f_m - f| \xrightarrow{\mu} 0.$$

4. Пусть $f_n \xrightarrow{\mu} f,\ \ f \sim g$. Показать, что тогда $f_n \xrightarrow{\mu} g$.

5. Пусть $f_n \xrightarrow{\mu} f, \quad f_n(x) \leqslant \alpha \quad (x \in E)$. Показать, что $f(x) \leqslant \alpha$ п.в. на E.

Часть 4. Интеграл Лебега

§16. Определение интеграла Лебега

Пусть здесь и далее μ — полная конечная мера на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ в E; все рассматриваемые множества из $\mathfrak{A}$, все функции измеримы.

(1) **Определение.** Простая функция

$$f = \sum_k \lambda_k \chi_{X_k} \quad \Big(\sum_k X_k = E, \quad X_k \in \mathfrak{A}\Big)$$

называется *интегрируемой по Лебегу*, если

$$\sum_k |\lambda_k| \mu X_k < \infty.$$

Сумма ряда

$$\sum_k \lambda_k \mu X_k$$

называется *интегралом Лебега* (от простой функции) и обозначается как

$$\int f d\mu.$$

(2) *Если f, g — простые интегрируемые функции, то функции $f+g$, $\lambda f \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ тоже интегрируемы и*

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu, \qquad \int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu.$$

Доказательство. Произведём доказательство для $f+g$ (случай фунции λf доказывается аналогично). Пусть

$$f = \sum_k \lambda_k \chi_{X_k}, \quad g = \sum_n \xi_n \chi_{Y_n}.$$

Тогда функция

$$f + g = \sum_{n,k} (\lambda_k + \xi_n) \chi_{X_k Y_n}$$

— простая. Покажем, что она интегрируема:

$$\sum_{n,k} |\lambda_k + \xi_n| \mu(X_k Y_n) \leqslant \sum_{n,k} |\lambda_k| \mu(X_k Y_n) + \sum_{n,k} |\xi_n| \mu(X_k Y_n) =$$

$$= \sum_k |\lambda_k| \sum_n \mu(X_k Y_n) + \sum_n |\xi_n| \sum_k \mu(X_k Y_n) =$$

$$= \sum_k |\lambda_k| \mu X_k + \sum_n |\xi_n| \mu Y_n < +\infty.$$

Повторяя аналогичные выкладки, получим и равенства интегралов:

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu. \qquad \blacksquare$$

③ *Если f — простая ограниченная функция, то f интегрируема и*

$$\Big| \int f d\mu \Big| \leqslant \|f\|_E \mu E,$$

где $\|f\|_E = \sup_{x \in E} |f(x)|$.

Доказательство. Пусть

$$f = \sum_k \lambda_k \chi_{X_k},$$

тогда $\|f\|_E = \sup_k |\lambda_k|$. Следовательно,

$$\sum_k |\lambda_k| \mu X_k \leqslant \|f\|_E \sum_k \mu X_k = \|f\|_E \mu E < +\infty,$$

и

$$\Big| \int f d\mu \Big| = \Big| \sum_k \lambda_k \mu X_k \Big| \leqslant \sum_k |\lambda_k| \mu X_k = \|f\|_E \mu E. \qquad \blacksquare$$

④ **Определение.** Измеримая функция f называется *интегрируемой по Лебегу*, если существует последовательность простых интегрируемых функций $\{f_n\}$ такая, что

$$f_n \rightrightarrows f.$$

При этом значение интеграла от f полагают равным

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

⑤ *Определение интеграла Лебега корректно:*

1) $\lim\limits_n \int f_n d\mu$ *существует;*

2) $\lim\limits_n \int f_n d\mu$ *не зависит от выбора последовательности простых функций* $\{f_n\}$*;*

3) Определение п. 4 согласуется с определением п. 1.

Доказательство.

<u>Пункт 1:</u> Пусть f — измерима, и $\{f_n\}$ — последовательность простых интегрируемых функций такая, что $f_n \rightrightarrows f$. Тогда $\|f_n - f_m\|_E \to 0$ и

$$\Big|\int f_n d\mu - \int f_m d\mu\Big| = \Big|\int (f_n - f_m) d\mu\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \|f_n - f_m\|_E \mu_E \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

Следовательно, последовательность $\int f_n d\mu$ фундаментальна, а значит сходится.

<u>Пункт 2:</u> Пусть $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows f$. Тогда

$$f_n - g_n \rightrightarrows 0, \quad \|f_n - g_n\|_E \to 0.$$

Следовательно,

$$\Big|\int f_n d\mu - \int g_n d\mu\Big| \leqslant \|f_n - g_n\|_E \mu E \to 0,$$

из чего вытекает

$$\lim_n \int f_n d\mu = \lim_n \int g_n d\mu.$$

<u>Пункт 3:</u> Сформируем последовательность простых функций $\{f_n\}$ для простой функции f как

$$f_n = f \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, $f_n \rightrightarrows f$ и

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu. \qquad \blacksquare$$

⑥ Упражнения.

1. Существует ли интеграл Лебега по $E = [0, 1]$ от функции
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ \sin\frac{1}{x}, & x \neq \frac{1}{\pi n}; \\ -1, & x = \frac{1}{\pi n}. \end{cases}$$

2. Вычислить интеграл Лебега по $E = [0, 1]$ от функции
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}^c \cap (1/3, 1); \\ x^3, & x \in \mathbb{Q}^c \cap (0, 1/3); \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]. \end{cases}$$

3. Вычислить интеграл Лебега по $E = (1, 2)$ от функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.

4. Определить, существует ли интеграл Лебега на $E = (0, 1)$ от функции $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$.
5. Вычислить интеграл Лебега по $E = (0, 1)$ от функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}$.
6. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ не является интегрируемой по Лебегу на $E = (0, 1)$.
7. Найти при каких положительных α, β будет интегрируемой по Лебегу на $E = [0, 1]$ фукнция
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^{-\beta}}{x^\alpha}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$
8. При каких неотрицательных значениях α и β будет интегрируемой по Лебегу на $E = [0, 1]$ функция $f(x) = x^\alpha \sin(x^\beta)$.
9. Определить, будет ли интегрируемой по Лебегу на $E = (0, 1)$ функция $f(x) = \frac{d}{dx}(x^2 \sin\frac{1}{x^2})$.

§17. Свойства интеграла Лебега

(1) *Если f, g интегрируемы по Лебегу, то функции*
$$f \pm g, \quad \lambda f \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$
тоже интегрируемы по Лебегу и
$$\int (f \pm g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu, \qquad \int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu.$$

(2) *Если $f \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A}, \mu)$ ограничена, то она интегрируема и*
$$\left| \int f d\mu \right| \leqslant \|f\|_E \mu E.$$

(3) *Если f, g интегрируемы и*
$$f \geqslant g, \quad \textit{то} \quad \int f d\mu \geqslant \int g d\mu.$$

Доказательство. В силу арифметических свойств достаточно рассмотреть случай $g(x) \equiv 0$.

<u>f — простая функция:</u> Тогда $f = \sum_k \lambda_k \chi_{X_k}$. Т.к. $f \geqslant 0$, то $\lambda_k \geqslant 0$ и
$$\int f d\mu = \sum_k \lambda_k \mu X_k \geqslant 0 = \int g d\mu.$$

<u>Общий случай:</u> Рассмотрим последовательность

$$f_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \chi_{X_k^n}, \quad X_k^n = f^{-1}\Big(\Big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\Big]\Big).$$

Из

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant \frac{1}{n} \quad (x \in E)$$

следует $f_n \rightrightarrows f$. Т.к. $(f_n - f)$ — ограничена и измерима, то она интегрируема (см п. 2). В силу арифметических свойств интеграла Лебега и представления $f_n = f - (f - f_n)$, простая функция f_n будет тоже интегрируема. Т.к. $f_n \geqslant 0$, то

$$\int f_n d\mu \geqslant 0,$$

а значит по определению интеграла Лебега (см п. 16.4):

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu \geqslant 0, \qquad \blacksquare$$

(4) **Определение.** Функция f называется *интегрируемой по множеству* $A \in \mathfrak{A}$, если интегрируема фукнция $f\chi_A$. При этом полагают

$$\int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu.$$

(5) *Если функция f интегрируема, то f интегрируема по любому $A \in \mathfrak{A}$.*

Доказательство.

<u>f — простая функция:</u> Пусть $f = \sum_n \lambda_n \chi_{X_n}$ — интегрируема. Тогда

$$\sum_n |\lambda_n| \mu X_n < +\infty,$$

а значит и

$$\sum_n |\lambda_n| \mu(X_n A) < +\infty.$$

Следовательно, функция

$$f\chi_A = \sum_n \lambda_n \chi_{X_n A}$$

интегрируема.

<u>Общий случай:</u> Пусть f интегрируема; по определению это означает, что существует последовательность простых интегрируе-

мых функций $\{f_n\}$ такая, что $f_n \rightrightarrows f$. Тогда $f_n \chi_A \rightrightarrows f\chi_A$, что означает интегрируемость $f\chi_A$ по определению. ■

(6) **Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.** *Если f — интегрируема и*

$$\mu A = 0, \quad \textit{то} \quad \int_A f d\mu = 0.$$

Доказательство.

<u>f — простая функция:</u> Пусть $f = \sum_n \lambda_n \chi_{X_n}$. Тогда

$$\int_A f d\mu = \int f\chi_A d\mu = \sum_n \lambda_n \mu(X_n A) = 0,$$

т.к. $\mu(X_n A) = 0 \ \ \forall n$.

<u>Общий случай:</u> Пусть $f_n \rightrightarrows f$, где f_n — простые интегрируемые функции. Тогда

$$\int_A f d\mu = \int f\chi_A d\mu = \lim_n \int f_n \chi_A d\mu = \lim_n \int_A f_n d\mu = 0.$$

■

(7) *Пусть*

$$E = \sum_k A_k \quad (A_k \in \mathfrak{A})$$

и f интегрируема. Тогда

$$\int f d\mu = \sum_k \int_{A_k} f d\mu,$$

где ряд в правой части сходится абсолютно.

Доказательство.

<u>f — простая функция:</u> Пусть $f = \sum_n \lambda_n \chi_{X_n}$. Т.к. $X_n = \sum_k X_n A_k$, то

$$\sum_k \left| \int_{A_k} f d\mu \right| = \sum_k \left| \sum_n \lambda_n \mu(X_n A_k) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \sum_n |\lambda_n| \mu(X_n A_k) = \sum_n |\lambda_n| \sum_k \mu(X_n A_k) =$$

$$= \sum_n |\lambda_n| \mu X_n < +\infty$$

в силу интегрируемости f. Следовательно, ряд

$$\sum_k \Big|\int_{A_k} f d\mu\Big|$$

сходится абсолютно. Остаётся заметить, что

$$\sum_k \int_{A_k} f d\mu = \sum_k \sum_n \lambda_n \mu(X_n A_k) =$$
$$= \sum_n \lambda_n \sum_k \mu(X_n A_k) = \sum_n \lambda_n \mu X_n = \int f d\mu.$$

Общий случай: Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольная константа. Тогда существует простая интегрируемая функция g такая, что $\|f - g\|_E < \varepsilon$, и

$$\sum_k \Big|\int_{A_k} f d\mu\Big| \leqslant \sum_k \Big|\int_{A_k} (f-g) d\mu\Big| + \sum_k \Big|\int_{A_k} g d\mu\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \|f-g\|_E \sum_k \mu A_k + \sum_k \Big|\int_{A_k} g d\mu\Big| < \varepsilon \mu E + \sum_k \Big|\int_{A_k} g d\mu\Big| < +\infty,$$

т.к. $\sum_k |\int_{A_k} g d\mu|$ сходится согласно доказанному случаю для простых функций. Следовательно, ряд $\sum_k |\int_{A_k} f d\mu|$ сходится абсолютно.

Покажем, что интеграл от f вычислим как сумма интегралов по $\{A_k\}$. Т.к. для простой функции g уже получено $\sum_k \int_{A_k} g d\mu - \int g d\mu = 0$, то

$$\Big|\int f d\mu - \sum_k \int_{A_k} f d\mu\Big| =$$
$$= \Big|\int f d\mu - \sum_k \int_{A_k} f d\mu + \Big(\sum_k \int_{A_k} g d\mu - \int g d\mu\Big)\Big| =$$
$$= \Big|\int (f-g) d\mu - \sum_k \int_{A_k} (f-g) d\mu\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \|f-g\|_E \mu E + \|f-g\|_E \mu E \leqslant 2\varepsilon \mu E.$$

В силу произвольности ε это означает

$$\int f d\mu = \sum_k \int_{A_k} f d\mu. \qquad \blacksquare$$

(8) *Если $|f| \leqslant \varphi$ и φ интегрируема, то f тоже интегрируема.*

Доказательство.

<u>f, φ — простые функции:</u> Пусть

$$f = \sum_n \lambda_n \chi_{X_n}, \quad \varphi = \sum_k \xi_k \chi_{Y_k}.$$

Т.к. $X_n = \sum_k X_n Y_k$ и $Y_k = \sum_n Y_k X_n$, то:

$$f = \sum_{n,k} \lambda_n \chi_{X_n Y_k}, \quad \varphi = \sum_{n,k} \xi_k \chi_{X_n Y_k}.$$

Рассмотрев покрытие $\{A_n\}$, образованное всевозможными пересечениями покрытий $\{X_n\}$ и $\{Y_k\}$, и произведя необходимым образом перенумеровку $\{\lambda_n\}$ и $\{\xi_k\}$, можно перейти к представлению

$$f = \sum_n \lambda_n \chi_{A_n}, \quad \varphi = \sum_n \xi_n \chi_{A_n}.$$

Тогда легко видеть, что

$$|f| \leqslant \varphi \iff |\lambda_n| \leqslant \xi_n \quad \forall n,$$

поэтому

$$\sum_n |\lambda_n| \mu A_n \leqslant \sum_n \xi_n \mu A_n < +\infty.$$

<u>Общий случай:</u> В силу измеримости f и φ (см. п. 11.6) существуют последовательности простых функций $\{f_n\}$ и $\{\varphi_n\}$ такие, что

$$f_n = \sum_i \lambda_{ni} \chi_{X_{ni}}, \quad f_n \rightrightarrows f; \qquad \varphi_n = \sum_j \xi_{nj} \chi_{Y_{nj}}, \quad \varphi_n \rightrightarrows f.$$

Т.к. $\varphi \geqslant 0$ — интегрируема, то $\{\varphi_n\}$ можно выбрать интегрируемыми и неотрицательными. Определим последовательность простых функций f_n^*:

$$f_n^* = \sum_{ij} \nu_{nij} \chi_{X_{ni} Y_{nj}}, \quad \text{где} \quad \nu_{nij} = \begin{cases} -\varphi_{nj}, & \lambda_{ni} < -\varphi_{nj}; \\ \varphi_{nj}, & \varphi_{nj} < \lambda_{ni}; \\ \lambda_{ni}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, $f_n^* \rightrightarrows f$. Т.к. $|f_n^*| < \varphi_n$, то (по доказанному случаю для простых функций) f_n^* — интегрируемые простые фукнции, что означает интегрируемость f по определению. ■

9 *Функция f интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема $|f|$.*

Доказательство.

<u>f — простая функция:</u> Утверждение следует из определения интеграла Лебега для простых функций (см п. 16.1).

<u>Общий случай:</u> Т.к. $f \leqslant |f|$, то из интегрируемости $|f|$ следует интегрируемость f (см. п. 8).

Если, наоборот, f интегрируема, то существует последовательность простых функций $\{f_n\}$ такая, что $f_n \rightrightarrows f$. Тогда $|f_n|$ — простые интегрируемые функции, $|f_n| \rightrightarrows |f|$, а значит $|f|$ интегрируема. ■

10 *Если f интегрируема и*

$$\int |f| d\mu = 0, \quad \textit{то} \quad f \overset{\text{п.в.}}{=} 0.$$

Доказательство. Рассмотрим представление

$$\{x \in E \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_n A_n, \quad A_n = \left\{x \in E \mid |f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

Имеем

$$0 \leqslant \int_{A_n} |f| d\mu \leqslant \int |f| d\mu = 0,$$

т.е. $\forall n$

$$\int_{A_n} |f| d\mu = 0.$$

С другой стороны,

$$\int_{A_n} |f| d\mu \geqslant \frac{1}{n} \mu A_n \quad \Longrightarrow \quad \mu A_n = 0 \quad \forall n.$$

Итого

$$\mu\{x \in E \mid f(x) \neq 0\} = \mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) \leqslant \sum_n \mu A_n = 0,$$

что означает $f \overset{\text{п.в.}}{=} 0$. ■

11 **Упражнения.**

1. Пусть $f \in \mathcal{M}(E, \mathfrak{A})$ — ограниченная и неотрицательная функция; $A = \{x \in E \mid f(x) > c\}$ для $c \in \mathbb{R}$. Показать, что $\int f d\mu \geqslant c\, \mu A$.
2. Пусть множество E имеет вид $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$; функция f ограничена на E и $\int_{E_n} f(x) dx = 0$ для любого n. Следует ли отсюда, что f интегрируема по Лебегу на E?

3. Вычислить интеграл Лебега по множеству $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n = (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ от функции $f(x)$ вида $f(x) = \sin(nx)$, $x \in E_n$.
4. Вычислить интеграл Лебега по множеству $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n = (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ от функции $f(x)$ вида $f(x) = (-1)^n$, $x \in E_n$.
5. Пусть f — непрерывная функция на числовой прямой, g — неограниченная функция, интегрируемая по Лебегу на некотором подмножестве числовой прямой $\mathbb{R}$, имеющем конечную меру. Будет ли функция $F(x) = (f \circ g)(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве $\mathbb{R}$?
6. Пусть функция f интегрируема по Лебегу на множестве конечной меры E. Следует ли отсюда, что f эквивалентна на E некоторой ограниченной функции?
7. Пусть f — ограниченная измеримая по Лебегу на E функция. Определить, будут ли интегрируемы по Лебегу на E функции $f^{10}(x)$, $|f(x)|$, $1/f(x)$.
8. Построить последовательность неотрицательных функций $\{f_n(x)\}$, заданных на множестве E, такую, что $f_n \xrightarrow{\mu} 0$, но $\int f_n d\mu \not\to 0$.
9. Пусть $E = (0, 1]$, $E_n = (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$. Построить интегрируемую по Лебегу на каждом E_n функцию f такую, что ряд $\sum_n \int_{E_n} f d\mu$ сходится, но f не является интегрируемой по Лебегу на E.

§18. Теорема о предельном переходе

(1) **Теорема Лебега.** *Пусть $\{f_n\}$ измеримы, φ интегрируема,*

$$|f_n| \leqslant \varphi \quad \textit{и} \quad f_n \to f.$$

Тогда f интегрируема и

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Доказательство. Перейдя к lim в неравенстве $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$, приходим к

$$|f(x)| \leqslant \varphi(x),$$

что означает интегрируемость $|f|$, а значит и f (см. п. 17.8 и п. 17.9).

Рассмотрим множества

$$A_k = \varphi^{-1}([k-1, k]) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Легко видеть, что $E = \sum_k A_k$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольная константа,

$$B_s = \sum_{k=s+1}^{\infty} A_k,$$

где s выбирается так, чтобы

$$\int_{B_s} \varphi d\mu < \varepsilon.$$

$\ulcorner$ Такое s существует, т.к.

$$\int \varphi d\mu = \sum_k \int_{A_k} \varphi d\mu$$

сходится; следовательно существует s, что для $n > s$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{A_k} \varphi d\mu < \varepsilon. \qquad \lrcorner$$

Исходя из теоремы Егорова (см. п. 14.4) возможно представление:

$$B_s^{\mathrm{c}} = Y + Z,$$

где $\mu Z < \varepsilon / s$ и $f_n \rightrightarrows f$ на Y, т.е.

$$\exists n_0 \; \forall n > n_0 \quad \|f_n - f\|_Y < \frac{\varepsilon}{\mu E}.$$

Тогда

$$\Big| \int f_n d\mu - \int f d\mu \Big| =$$

$$= \Big| \int_{B_s} f_n d\mu + \int_Y f_n d\mu + \int_Z f_n d\mu - \int_{B_s} f d\mu + \int_Y f d\mu + \int_Z f d\mu \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{B_s} |f_n| d\mu + \int_{B_s} |f| d\mu + \int_Y |f_n - f| d\mu + \int_Z |f| d\mu + \int_Z |f_n| d\mu \leqslant$$

(заметим, что $Z \subseteq B_s^{\mathrm{c}} \implies |f|, |f_n| \leqslant s$ на Z)

$$\leqslant 2 \int_{B_s} \varphi d\mu + \|f_n - f\|_Y \mu Y + 2s\mu Z < 5\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu. \qquad \blacksquare$$

Следствие. *Если $|f_n| \leqslant c$, $f_n \to f$, то f интегрируема и*

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

2 **Замечание.** В условии теоремы Лебега можно считать, что $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$.

$\ulcorner$ Вместо f_n и f можно рассматривать функции $f_n \chi_X$ и $f \chi_X$, где

$$X = \{x \in E \mid f_n(x) \to f(x)\}, \quad \mu X^C = 0.$$

$\lrcorner$

3 **Теорема Леви.** *Пусть дана последовательность $\{f_n\}$ и $K \in \mathbb{R}$:*

$$f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots \quad \text{и} \quad \int f_n d\mu \leqslant K.$$

Тогда

1) Существует интегрируемая функция f такая, что $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$;

2) $\lim\limits_n \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

Доказательство.

Пункт 1: Можно считать, что

$$0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots,$$

иначе достаточно перейти к рассмотрению функций $f_k^* = f_k - f_1$. Введём множество

$$A = \{x \in E \mid f_n(x) \to +\infty\} = \bigcap_r \bigcup_n A_n^r,$$

где

$$A_n^r = \{x \in E \mid f_n(x) > r\}.$$

В силу монотонного возрастания $\{f_n\}$

$$A_1^r \subseteq A_2^r \subseteq \ldots \quad \Longrightarrow \quad \mu A \leqslant \bigcup_n \mu A_n^r = \lim_n \mu A_n^r.$$

Имеем

$$\mu A_n^r = \int_{A_n^r} d\mu < \int_{A_n^r} \frac{f_n}{r} d\mu \leqslant \frac{1}{r} \int f_n d\mu \leqslant \frac{K}{r}.$$

Следовательно, для любого r

$$\mu A \leqslant \lim_n \mu A_n^r \leqslant \frac{K}{r} \quad \Longrightarrow \quad \mu A = 0.$$

Определим функцию f как

$$f(x) = \begin{cases} \lim_n f_n(x), & x \notin A; \\ 0, & x \in A. \end{cases}$$

$\lim_n f_n(x)$ для $x \notin A$ существует в силу монотонности последовательности f_n. Очевидно, $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$. Пусть

$$B_r = f^{-1}([r-1, r]), \quad \text{тогда} \quad E = \sum_r B_r.$$

Рассмотрим простую функцию

$$\varphi = \sum_r r\chi_{B_r}.$$

Тогда

$$f < \varphi \leqslant f + 1.$$

Если $\sum_r r\mu B_r$ сходится, то φ интегрируема, а значит интегрируема и f (см. п. 17.8). Покажем сходимость этого ряда:

$$\sum_{r=1}^{N} r\mu B_r = \int_{\sum_{r=1}^N B_r} \varphi d\mu \leqslant \int_{\sum_{r=1}^N B_r} f d\mu + \mu E =$$
$$= \int f\chi_{\sum_{r=1}^N B_r} d\mu + \mu E =$$

(т.к. $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$, то в силу теоремы Лебега (п. 1) $\int f d\mu = \lim_n \int f d\mu$)

$$= \lim_n \int_{\sum_{r=1}^N B_r} f_n d\mu + \mu E \leqslant K + \mu E.$$

Это означает сходимость ряда.

<u>Пункт 2:</u> Т.к. $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$ и f — интегрируема, то по замечанию (п. 2) к теореме Лебега (полагая в ней $\varphi = f$):

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

■

Следствие 1. *Если*

$$\psi_n \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_n \int \psi_n d\mu < +\infty,$$

то ряд $\sum_n \psi_n$ *сходится и*

$$\int \Big(\sum_n \psi_n\Big) d\mu = \sum_n \int \psi_n d\mu.$$

⌜ Рассмотрим последовательность $f_k = \sum_{n=1}^{k} \psi_n$. Т.к. $\psi_n \geqslant 0$, то

$$0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \dots \quad \text{и} \quad \int f_k d\mu \leqslant \sum_n \int \psi_n d\mu = K.$$

Условия теоремы Леви выполнены; следовательно, ряд $\sum_n \psi_n = \lim_k f_k$ существует и

$$\int \Big(\sum_n \psi_n\Big) d\mu = \lim_k \int f_k d\mu = \sum_k \int \psi_k d\mu.$$ ⌟

Следствие 2. *Если*

$$E = \sum_k A_k \quad \textit{и} \quad \sum_k \int_{A_k} |f| d\mu < +\infty,$$

то f интегрируема и

$$\int f d\mu = \sum_k \int_{A_k} f d\mu.$$

⌜ Пусть $\psi_n = |f| \chi_{A_n}$. Рассматривая аналогично следствию 1 последовательность частичных сумм $\sum_{n=1}^{k} \psi_n$, можно показать, что из теоремы Леви и представления

$$\lim_k \sum_{n=1}^{k} \psi_n = |f|$$

следует интегрируемость $|f|$, а значит f — интегрируема (по п. 17.9). ⌟

(4) **Теорема Фату.** *Пусть $f_n \geqslant 0$ — измеримые функции,*

$$\int f_n d\mu \leqslant K \quad \textit{и} \quad f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f.$$

Тогда f интегрируема и

$$\int f d\mu \leqslant K.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_n(x) = \inf_{k \geqslant n} f_k(x).$$

Тогда

$$\varphi_n(x) \geqslant 0, \quad \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \dots$$

и φ_n измеримы.

$\ulcorner$ Покажем измеримость φ_n. В силу измеримости функций f_k выполняется включение

$$\bigcup_{k\geqslant n}\{x\in E \mid f_k(x)<c\}\in\mathfrak{A}.$$

Следовательно, достаточно показать справедливость равенства

$$\{x\in E \mid \varphi_n(x)<c\}=\bigcup_{k\geqslant n}\{x\in E \mid f_k(x)<c\}.$$

Включение $\subseteq$: Пусть x такой, что $\varphi_n(x)<c$. Если $\varphi_n(x)<c$, то, согласно определению inf,

$$\exists k\geqslant n \quad \varphi_n(x)<f_k(x)<c,$$

а значит $f_k(x)<c$.

Включение $\supseteq$: Пусть

$$x\in\bigcup_{k\geqslant n}\{x\in E \mid f_k(x)<c\} \implies$$
$$\implies \exists k \quad x\in\{x\in E \mid f_k(x)<c\} \implies \varphi_n(x)<c.$$

$\lrcorner$

Т.к. $0\leqslant\varphi_n\leqslant f_n$, то φ_n — интегрируемы (см. п. 17.8). Тогда (см. п. 17.3)

$$\int\varphi_n(x)d\mu<\int f_n d\mu\leqslant K,$$

и по теореме Леви (п. 3) существует функция φ такая, что

$$\varphi_n\xrightarrow{\text{п.в.}}\varphi.$$

Покажем, что $\varphi\overset{\text{п.в.}}{=}f$. Пусть

$$A=\{x\in E \mid f_n(x)\to f(x)\};$$

$\mu A^C=0$ в силу $f_n\xrightarrow{\text{п.в.}}f$. Рассмотрим $x\in A$, тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geqslant N \quad |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Т.к. неравенство выполняется для всех f_n с $n>N$, то оно будет выполняться и для φ_n:

$$\forall n\geqslant N \quad |\varphi_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

что означает $\varphi_n \to f$ на A, т.е. $\varphi_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$, а значит $\varphi \overset{\text{п.в.}}{=} f$. Следовательно, f интегрируема и $\int f d\mu \leqslant K$. ∎

(5) Упражнения.

1. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность ограниченных измеримых неотрицательных функций такая, что $\int f_n d\mu \to 0$. Следует ли отсюда, что $f_n(x) \to 0$ всюду или почти всюду?

2. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность ограниченных неотрицательных интегрируемых функций. Можно ли утверждать, что из $f_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$ следует $\int f_n d\mu \to 0$?

3. Для любого $a > 0$ построить последовательность заданных на отрезке $[0, 1]$ неотрицательных функций $\{f_n\}$ такую, что $f_n \to 0$ на $[0, 1]$, но $\int_{[0,1]} f_n d\mu = a$.

4. Пусть последовательность интегрируемых функций $\{f_n\}$ такая, что $f_n \to f$ и $\lim_n \int f_n d\mu = 0$. Следует ли отсюда интегрируемость функции f?

5. Показать, что в теореме Лебега (п. 1) наличие мажорантной функции φ достаточное, но не необходимое условие, т.е. привести пример последовательности функций $\{f_n\}$ такой, что:
   1) $f_n \to f$;
   2) f, f_n интегрируемы;
   3) $\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu$,

   но не существует интегрируемой функции $\varphi(x)$ такой, что $|f_n| \leqslant \varphi$.

§19. Связь между интегралом Римана и интегралом Лебега

(1) Пусть определённая на $[0, 1]$ функция f интегрируема на этом отрезке по Риману ($(\mathcal{R})$-интегрируема). Пусть

$$\mathscr{I} = (\mathcal{R}) \int_0^1 f(x)dx = \sup_\Delta \underset{*}{S}_\Delta = \inf_\Delta \overset{*}{S}_\Delta,$$

— интеграл Римана от f на $[0, 1]$, где sup и inf берётся по всевозможным разложениям Δ отрезка $[0, 1]$; $\underset{*}{S}_\Delta$, $\overset{*}{S}_\Delta$ — нижняя и верхняя частичная сумма интеграла Римана относительно Δ. Тогда найдётся последовательность разложений

$$\Delta_n = (x_1^{(n)}, \dots, x_{n+1}^{(n)}) \colon \quad 0 = x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_{n+1}^{(n)} = 1,$$

такая, что $\Delta_n \ll \Delta_{n+1}$ (все узлы Δ_n входят в Δ_{n+1}) и

$$\underset{*}{S}_{\Delta_n} \to \mathscr{I}, \quad \overset{*}{S}_{\Delta_n} \to \mathscr{I} \quad (n \to \infty),$$

где

$$\overset{*}{S}_{\Delta_n} = \sum_{k=1}^{n} M_k^n (x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}), \quad M_k^n = \sup_{x \in [x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]} f(x);$$

$$\underset{*}{S}_{\Delta_n} = \sum_{k=1}^{n} m_k^n (x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}), \quad m_k^n = \inf_{x \in [x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]} f(x).$$

С другой стороны, $\overset{*}{S}_{\Delta_n}$ и $\underset{*}{S}_{\Delta_n}$ можно рассматривать как интегралы Лебега от простых функций $\overset{*}{f}_n$ и $\underset{*}{f}_n$:

$$\overset{*}{S}_{\Delta_n} = \int \overset{*}{f}_n d\mu, \quad \overset{*}{f}_n = \sum_k M_k^n \chi_{[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)})},$$

$$\underset{*}{S}_{\Delta_n} = \int \underset{*}{f}_n d\mu, \quad \underset{*}{f}_n = \sum_k m_k^n \chi_{[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)})}.$$

Т.к. $\Delta_n \ll \Delta_{n+1}$, то

$$\overset{*}{f}_1 \geqslant \overset{*}{f}_2 \geqslant \ldots \geqslant f \geqslant \ldots \geqslant \underset{*}{f}_2 \geqslant \underset{*}{f}_1.$$

Имеем возрастающую последовательность функций $\underset{*}{f}_n$, ограниченную сверху, и убывающую последовательность $\overset{*}{f}_n$, ограниченную снизу. Следовательно, существуют $\overset{*}{f}$ и $\underset{*}{f}$ такие, что

$$\overset{*}{f}_n \to \overset{*}{f}, \quad \underset{*}{f}_n \to \underset{*}{f} \quad \text{и} \quad \underset{*}{f} \leqslant f \leqslant \overset{*}{f}.$$

По теореме Леви (п. 18.3) функции $\overset{*}{f}$ и $\underset{*}{f}$ интегрируемы и

$$\int \overset{*}{f} d\mu = \lim_n \int \overset{*}{f}_n d\mu, \quad \int \underset{*}{f} d\mu = \lim_n \int \underset{*}{f}_n d\mu.$$

Следовательно, по определению интеграла Римана

$$\mathscr{I} = \lim_n \overset{*}{S}_{\Delta_n} = \lim_n \int \overset{*}{f}_n d\mu = \int \overset{*}{f} d\mu,$$

$$\mathscr{I} = \lim_n \underset{*}{S}_{\Delta_n} = \lim_n \int \underset{*}{f}_n d\mu = \int \underset{*}{f} d\mu.$$

Мы пришли к тому, что

$$\int (\overset{*}{f} - \underset{*}{f}) d\mu = 0,$$

а значит $\overset{*}{f}, \underset{*}{f} \xrightarrow{\text{п.в.}} f$ (см. п. 17.10) и

$$\mathscr{I} = \int \overset{*}{f} d\mu = \int f d\mu.$$

Т.о., если f интегрируема по Риману на $[0,1]$, то f интегрируема на $[0,1]$ по Лебегу и

$$(\mathcal{R}) \int_0^1 f(x)dx = \int_{[0,1]} f d\mu.$$

(2) Рассмотрим $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ — несобственный сходящийся интеграл. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0,1]; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ не интегрируема по Риману на $[0,1]$, но интегрируема по Лебегу. Действительно, пусть

$$f_n(x) = f(x)\chi_{[\frac{1}{n},1]}(x).$$

Тогда

$$\int f_n d\mu = (\mathcal{R}) \int_{1/n}^1 f_n(x)dx = \int_{1/n}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 2.$$

Т.к. $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$, то по теореме Леви (п. 18.3) функция f интегрируема по Лебегу и значение $\int f d\mu$ совпадает с несобственным интегралом.

(3) *Если*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} (\mathcal{R}) \int_\varepsilon^1 |f(x)|dx < +\infty,$$

то f интегрируема по Лебегу на $[0,1]$ и

$$\int f d\mu = \lim_{\varepsilon \to 0+} (\mathcal{R}) \int_\varepsilon^1 f(x)dx.$$

(4) *Если*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} (\mathcal{R}) \int_\varepsilon^1 |f(x)|dx = +\infty,$$

то f не интегрируема по Лебегу даже, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} (\mathcal{R}) \int_\varepsilon^1 f(x)dx < +\infty.$$

Доказательство. Пусть
$$f_n = f\chi_{[\frac{1}{n},1]}.$$
Тогда $|f_n| \leqslant |f|$ и $|f_n| \xrightarrow{\text{п.в.}} |f|$. Если f интегрируема по Лебегу, то
$$\int |f| d\mu < +\infty,$$
и
$$(\mathcal{R}) \int_{1/n}^{1} |f(x)| dx = \int |f_n(x)| d\mu \leqslant \int |f| d\mu < +\infty.$$
Но
$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} |f(x)| dx = +\infty$$
— противоречие. ∎

5 **Упражнения.**

1. Привести пример ограниченной функции, разрывной в каждой точке отрезка $[a, b]$ и интегрируемой по Лебегу. Будет ли она интегрируема по Риману?
2. Проверить, является ли интегрируемой по Риману и по Лебегу на отрезке $[0, 1]$ функция
$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]; \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$
Если это так, вычислить интеграл.
3. Проверить, является ли интегрируемой по Риману и по Лебегу на отрезке $[0, 1]$ функция
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]; \\ -x, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$
Если это так, вычислить интеграл.

Литература

1. *Власова Е.А.* **Элементы функционального анализа: Учебное пособие**. – СПб.: Издательство «Лань», 2015. – 400 с.
2. *Колмогоров, А.Н.* **Элементы теории функций и функционального анализа** / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – 7-е издание. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 572 с.
3. *Ульянов П.Л.* **Действительный анализ в задачах** / П.Л. Ульянов, А.Н. Бахвалов, М.И. Дьяченко, К.С. Казарян, П. Сифуэнтес. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 416 с.
4. *Шерстнёв А.Н.* **Конспект лекций по математическому анализу. Изд. 6**. – Москва: УРСС, 2016. – 480 с.