

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.С. ГАББАСОВ, Р.Р. ЗАМАЛИЕВ

**ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ФРЕДГОЛЬМА ТРЕТЬЕГО РОДА**

Учебное пособие

Казань – 2016

УДК 517.968:519.642

ББК 22.1

*Печатается по решению учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Казанского (Приволжского) федерального университета
№ 10 от 25 июня 2015 г.*

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений Ю.Р. Агачев,
кандидат физико-математических наук, доцент,
проректор по ДОП НИСПТР И.А. Шакиров

Габбасов Н.С., Замалиев Р.Р.

Прямые методы решения интегральных уравнений Фредгольма третьего рода/Габбасов Н.С., Замалиев Р.Р. – Казань: Казан. ун-т, 2016. – 149 с.

Пособие посвящено методам решения линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода в пространстве обобщенных функций. Построена полная теория разрешимости указанных уравнений (нётеровость, условия разрешимости, методы точного решения, достаточные условия непрерывной обратимости оператора уравнения). Разработаны и теоретически обоснованы вычислительные алгоритмы на основе ряда классических прямых проекционных методов решения исследуемых уравнений в классах обобщенных функций. Предложены и обоснованы специальные прямые методы, обладающие существенным преимуществом перед классическими методами в смысле улучшения скорости сходимости приближенных решений. Решена задача оптимизации прямых проекционных методов решения уравнений третьего рода, при этом установлено, что предложенные в работе специальные обобщенные методы являются оптимальными по порядку точности.

Книга предназначена для студентов старших курсов, магистрантов и аспирантов, специализирующихся в областях теории функций и приближений, численного анализа интегральных уравнений, прикладного функционального анализа и вычислительных методов.

© Габбасов Н.С., Замалиев Р.Р., 2016

© Казанский университет, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ	3
ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ГЛАВА I ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОСНОВНЫХ ПРОСТРАНСТВ И СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ В НИХ.....	8
§1. Класс <u>$C\{m; t_0\}$</u> и некоторые его элементарные свойства	8
§2. Основные функциональные свойства пространства <u>$C\{m; t_0\}$</u>	11
§3. Частные тейлоровские производные и определяемые ими классы функций.....	17
§4. Пространства <u>$C\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$</u> и <u>$P\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$</u>	20
§5. К теории приближения в пространствах <u>$C\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$</u> и <u>$P\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$</u>	29
Глава II Теория разрешимости интегральных уравнений Фредгольма третьего рода в пространствах обобщенных функций	47
§1. Введение	47
§2. Исследование разрешимости уравнений третьего рода с коэффициентом, имеющим нули степенного порядка внутри промежутка интегрирования.....	49
§3. Непрерывная обратимость интегрального оператора третьего рода.....	59
ГЛАВА III Классический подход к приближенному решению интегральных уравнений ТРЕТЬЕГО РОДА В классах обобщенных функций.....	66
§1. Постановка задачи и вспомогательные результаты	66

§2. Приближенное решение уравнений третьего рода в пространстве
 $D \{ \bar{m}; \bar{\tau} \}$ 70

§3. Решение в пространстве $V \{ \bar{m}; \bar{\tau} \}$ 82

**ГЛАВА IV СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА В ПРОСТРАНСТВАХ**

ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ 94

§1. «Полиномиальные» методы решения в пространствах $D \{ \bar{m}; \bar{\tau} \}$ и
 $V \{ \bar{m}; \bar{\tau} \}$ 94

§2. «Сплайновые» методы решения в классах $D \{ \bar{m}; \bar{\tau} \}$ и $V \{ \bar{m}; \bar{\tau} \}$.. 124

§3. Оптимизация прямых проекционных методов 135

ЛИТЕРАТУРА 143

ПРЕДИСЛОВИЕ

Ряд важных теоретических и современных прикладных задач приводит (см., напр., монографии [26,39], диссертации [23, 36, 50, 55], работы [5, 7-10, 48, 49, 52-54, 62, 63, 65] и библиографию в них) к необходимости решения линейных интегральных уравнений третьего рода (кратко: УТР) вида

$$Ax \equiv v(t)x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t) (t \in [a, b]), \quad (0.1)$$

где λ – числовой параметр, коэффициент $v(t)$ – непрерывная функция, имеющая на отрезке $[a, b]$ конечное множество нулей степенного порядка; K и y – известные непрерывные функции, обладающие определенными свойствами “гладкости” точечного характера, а x – искомая функция. При этом, как правило, естественными классами решений УТР являются специальные пространства обобщенных функций. Исследуемые уравнения точно решаются лишь в очень редких частных случаях, поэтому разработка теоретически обоснованных эффективных методов их приближенного решения (т.е. “приближенных методов” их решения) в классах обобщенных функций является актуальным и активно развивающимся направлением математического анализа и вычислительной математики.

В данном учебном пособии излагаются результаты по теории разрешимости УТР и прямым методам решения исследуемых уравнений в различных пространствах обобщенных функций. Изложение ведется главным образом по монографии [26] первого из авторов, основное содержание которой образуют работы [11-25, 64].

Глава I посвящена изучению функциональных свойств основных пространств, необходимых в дальнейших исследованиях, и построению специальной теории приближения в этих пространствах. Предлагаемые в этой главе результаты, а также используемые при их получении обозначения существенно применяются во всех последующих главах

работы. Это, в значительной мере, и предопределило выбор материала рассматриваемой главы.

Во второй главе строится полная теория разрешимости УТР в пространствах обобщенных функций (нётеровость, условия разрешимости, методы точного решения, достаточные условия непрерывной обратимости оператора уравнения). При этом пары основных пространств конструируются в зависимости от структуры коэффициентов исследуемых уравнений.

Третья глава посвящена приближенному решению УТР в пространствах обобщенных функций. Здесь на основе ряда классических прямых проекционных методов разрабатываются соответствующие вычислительные схемы и дается их теоретическое обоснование. Как и в [37, 29], под теоретическим обоснованием приближенных методов понимается следующий круг задач:

- доказательство теорем существования и единственности решения приближенного уравнения;
- установление оценок погрешности приближенного решения;
- доказательство сходимости приближенных решений к точному решению и исследование скорости сходимости;
- исследование устойчивости и обусловленности приближенных уравнений.

При обосновании рассматриваемых методов существенно используются: вариант общей теории приближенных методов анализа, предложенный Б.Г. Габдулхаевым [29], установленные в главах 1 и 2 результаты, а также некоторые факты конструктивной теории функций.

Результаты §§ 2, 3 главы III показывают, что при решении УТР классическими приближенными методами для сходимости приближенных решений требуется большая степень гладкости исходных данных. Это означает, что известные методы приводят к низкой скорости сходимости (в частности, по естественному сравнению со случаем уравнений второго

рода). В этой связи в четвертой главе строятся и обосновываются специальные прямые методы, имеющие существенное преимущество перед классическими методами по скорости сходимости приближенных решений. Устанавливается, что предложенные в пособии обобщенные методы являются оптимальными по порядку точности среди всех прямых проекционных методов решения УТР.

Настоящая книга является первым учебным пособием в математической практике по приближенному решению УТР в пространствах обобщенных функций. Она рассчитана на научно-технических работников, аспирантов, магистрантов и студентов, специализирующихся в таких областях, как теория функций и приближений, численного анализа интегральных уравнений, прикладного функционального анализа и вычислительных методов.

ГЛАВА I

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОСНОВНЫХ ПРОСТРАНСТВ И СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ В НИХ

Эта глава посвящена изучению свойств основных пространств, необходимых в дальнейших исследованиях, и построению теории полиномиального и сплайнового приближений в этих пространствах.

§1. Класс $C\{m; t_0\}$ и некоторые его элементарные свойства

1.1. Пусть $C = C[a, b]$ – пространство непрерывных на конечном отрезке $[a, b]$ функций с нормой

$$\|\varphi\|_C \equiv \max_{a \leq t \leq b} |\varphi(t)| \quad (\varphi \in C).$$

Если существуют последовательно пределы

$$\begin{aligned} j! \lim_{t \rightarrow t_0} (T^j \varphi)(t) &\equiv j! \lim_{t \rightarrow t_0} \left\{ \left[\varphi(t) - \sum_{i=0}^{j-1} \varphi^{(i)}(t_0) (t-t_0)^i / i! \right] / (t-t_0)^j \right\} = \\ &= \varphi^{(j)}(t_0) \quad (j = 0, 1, \dots, m; m \in \mathbb{N}, \quad \varphi^{(0)}(t_0) \equiv \varphi(t_0)), \end{aligned}$$

то величины $\varphi^{(j)}(t_0)$ называются тейлоровскими (или разностными) производными j -го порядка от функции $\varphi \in C$ в точке $t_0 \in (a, b)$ [47,33].

Линейал непрерывных на $[a, b]$ функций, имеющих в точке $t_0 \in (a, b)$ тейлоровские производные до m -го порядка включительно, обозначим через $C_{t_0}^{\{m\}}[a, b] = C\{m; t_0\}$ (естественно считая, что $C\{0; t_0\} \equiv C$). Снабдим его нормой

$$\|\varphi\|_{C\{m; t_0\}} \equiv \|T\varphi\|_C + \sum_{i=0}^{m-1} |\varphi^{(i)}(t_0)|, \quad (1.1.1)$$

где оператор (назовем его «характеристическим» оператором класса $C\{m; t_0\}$) $T\varphi \equiv (T^m \varphi)(t) = \Phi(t)$ ставит в соответствие функциям

$\varphi \in C\{m; t_0\}$ функции $\Phi \in C$, причём $\Phi(t_0) \equiv \lim_{t \rightarrow t_0} \Phi(t)$. Ясно (см. также [47], с.87), что функция $\varphi(t)$ принадлежит классу $C\{m; t_0\}$ тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$\varphi(t) = (t - t_0)^m \Phi(t) + \sum_{i=0}^{m-1} a_i (t - t_0)^i, \quad (1.1.2)$$

где $\Phi = T\varphi \in C$, $a_i = \varphi^{(i)}(t_0)/i!$ ($i = \overline{0, m-1}$). В силу (1.1.2) ясно также, что по норме (1.1.1) пространство $C\{m; t_0\}$ – полное.

1.2. Остановимся теперь на некоторых свойствах тейлоровских производных, являющихся аналогами известных фактов из математического анализа относительно обычных производных высших порядков. При этом без ограничения общности будем считать, что $[a, b] = [-1, 1]$, $at_0 = 0$.

Лемма 1.1.1(аналог формулы Лейбница). Если φ и $\psi \in C\{m; 0\}$, то $\varphi\psi \in C\{m; 0\}$, причем

$$(\varphi\psi)^{(m)}(0) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \varphi^{(k)}(0) \cdot \psi^{(m-k)}(0), \quad (1.1.3)$$

где $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ ($k = \overline{0, m}$) – биномиальные коэффициенты.

Доказательство формулы (1.1.3) проведем по индукции. При $m = 1$ она очевидна. Если предположить, что она верна при всех натуральных $\leq m$, то ее справедливость для $m + 1$ получается из следующих выкладок:

$$\begin{aligned} (\varphi\psi)^{(m+1)}(0) &\equiv (m+1)! \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi\psi)(t) - \sum_{i=0}^m (\varphi\psi)^{(i)}(0) t^i / i!}{t^{m+1}} = \\ &= (m+1)! \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)[\psi(t) - \sum_{i=0}^m \psi^{(i)}(0) t^i / i!]}{t^{m+1}} + \\ &+ (m+1)! \lim_{t \rightarrow 0} t^{-m-1} \left\{ \varphi(t) \cdot \sum_{i=0}^m \psi^{(i)}(0) t^i / i! - \sum_{i=0}^m \left[\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \psi^{(k)}(0) \varphi^{(i-k)}(0) \right] t^i / i! \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi(0)\psi^{\{m+1\}}(0) + (m+1)! \lim_{t \rightarrow 0} t^{-m-1} \times \\
&\left[\varphi(t) \cdot \sum_{i=0}^m \psi^{\{i\}}(0)t^i / i! - \sum_{k=0}^m \sum_{i=k}^{m-k} \binom{i}{k} \varphi^{\{k\}}(0)\psi^{\{i-k\}}(0)t^i / i! \right] = \\
&= \varphi(0)\psi^{\{m+1\}}(0) + (m+1)! \lim_{t \rightarrow 0} t^{-m-1} \times \\
&\times \left[\varphi(t) \cdot \sum_{i=0}^m \psi^{\{i\}}(0)t^i / i! - \sum_{k=0}^m \sum_{i=0}^{m-k} \binom{i+k}{k} \varphi^{\{k\}}(0)\psi^{\{i\}}(0)t^{i+k} / (i+k)! \right] = \\
&= \varphi(0)\psi^{\{m+1\}}(0) + (m+1)! \\
&\lim_{t \rightarrow 0} t^{-m-1} \cdot \sum_{i=0}^m \psi^{\{i\}}(0) \left[\varphi(t)t^i / i! - \sum_{k=0}^{m-i} \binom{i+k}{i} \varphi^{\{k\}}(0)t^{i+k} / (i+k)! \right] = \\
&= \varphi(0)\psi^{\{m+1\}}(0) + (m+1)! \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^m (T^{m+1-i} \varphi)(t) \psi^{\{i\}}(0) / i! = \\
&= \varphi(0)\psi^{\{m+1\}}(0) + \sum_{i=0}^m \psi^{\{i\}}(0) \varphi^{\{m+1-i\}}(0) (m+1)! / (i!(m+1-i)!) = \\
&= \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} \psi^{\{i\}}(0) \varphi^{\{m+1-i\}}(0).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из определения тейлоровской производной непосредственно вытекает следующая

Лемма 1.1.2 (аналог правила Лопиталья). Пусть функции $\varphi, \psi \in C\{m;0\}$ таковы, что $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi^{\{2\}}(0) = \dots = \varphi^{\{m-1\}}(0) = \psi(0) = \psi'(0) = \dots = \psi^{\{m-1\}}(0) = 0$, но $\psi^{\{m\}}(0) \neq 0$.

Тогда имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi^{\{m\}}(0)}{\psi^{\{m\}}(0)}.$$

Далее, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1.3 (аналог локальной формулы Тейлора). Если $\varphi \in C\{m;0\}$, то верно однозначное представление

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^m \varphi^{\{i\}}(0) t^i / i! + o(t^m) \quad (t \rightarrow 0). \quad (1.1.4)$$

Доказательство. Из соотношения (1.1.2) и определения m -ой тейлоровской производной функции φ следует, что

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^m \varphi^{(i)}(0) t^i / i! + t^m [(T\varphi)(t) - \varphi^{(m)}(0) / m!] = \sum_{i=0}^m \varphi^{(i)}(0) t^i / i! + t^m \cdot o(1) \quad (t \rightarrow 0).$$

Единственность представления функции $\varphi(t) (t \rightarrow 0)$ в форме (1.1.4) доказывается так же, как в случае обычной локальной формулы.

Следствие. Если существует обычная производная $\varphi^{(m)}(0)$, то справедлива локальная формула Тейлора.

Замечание 1.1.1. Соотношение (1.1.4) позволяет сформулировать в терминах тейлоровских производных (обычные производные высших порядков в соответствующих критических точках могут и не существовать) достаточные условия существования локального экстремума и точек перегиба функции. Кроме того, в силу леммы 1.1.3 наличие тейлоровской производной высшего порядка является необходимым и достаточным условием (наличие обычной производной соответствующего порядка является лишь достаточным условием) существования касательного полинома функции в точке.

§2. Основные функциональные свойства пространства $C\{m; t_0\}$

В этом параграфе рассмотрим некоторые важные свойства пространства $C\{m; t_0\}$, интересные также с точки зрения функционального анализа.

2.1. Справедлива следующая

Теорема 1.2.1 (аналог теоремы Вейерштрасса). Для любой функции $\varphi \in C\{m; 0\}$ и для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой алгебраический полином $Q(t)$, что имеет место неравенство

$$\|\varphi - Q\|_{C\{m;0\}} < \varepsilon.$$

Доказательство. Так как $T\varphi = \Phi \in C$, то по известной теореме Вейерштрасса для любого $\varepsilon > 0$ существует алгебраический полином $G(t)$ такой, что $\|\Phi - G\|_C < \varepsilon$. Легко показать, что полином

$$Q(t) = t^m G(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \varphi^{\{i\}}(0) t^i / i!$$

является искомым. Действительно, в силу (1.1.2) и (1.1.1) имеем

$$\|\varphi - Q\|_{C\{m;0\}} = \|t^m [\Phi(t) - G(t)]\|_{C\{m;0\}} = \|\Phi - G\|_C < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следствие. Пространство $C\{m; t_0\}$ в метрике, порожденной нормой (1.1.1), сепарабельно.

Имеет место (определения о вложении банаховых пространств см., напр., в [41], с.9-10)

Лемма 1.2.1. Банахово пространство $C\{m; t_0\}$ с нормой (1.1.1) нормально вложено в пространства $C\{m-j; 0\}$, ($j = \overline{1, m}$).

Доказательство. Покажем, что $C\{m; 0\}$ вложено в $C\{m-j; 0\}$ ($j = \overline{1, m}$) с константой вложения, не превышающей единицы. Имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{C\{m-j;0\}} &\equiv \max_{-1 \leq t \leq 1} \left| (T^{m-j} \varphi)(t) + \sum_{i=0}^{m-j-1} \varphi^{\{i\}}(0) t^i \right| \leq \max_t \left[\left| (T \varphi)(t) + \sum_{i=m-j}^{m-1} \varphi^{\{i\}}(0) t^{i-m+j} / i! \right| + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{m-j-1} \left| \varphi^{\{i\}}(0) \right| \right] \leq \|T \varphi\|_C + \sum_{i=0}^{m-1} \left| \varphi^{\{i\}}(0) \right| \equiv \|\varphi\|_{C\{m;0\}} \quad (j = \overline{1, m}). \end{aligned}$$

Кроме того, в силу теоремы 1.2.1 множество H алгебраических полиномов плотно в пространстве $C\{m-j; 0\}$, следовательно, $C\{m; 0\} \supset H$ также плотно в $C\{m-j; 0\}$ ($j = \overline{1, m}$). Требуемое доказано.

Обозначим через $C^{(m)} = C^{(m)}_{[-1,1]}$ банахово пространство m раз непрерывно дифференцируемых на $[-1,1]$ функций с нормой

$$\|\varphi\|_{C^{(m)}} \equiv \sum_{i=0}^m \|\varphi^{(i)}\|_C. \quad (1.2.1)$$

Лемма 1.2.2. *Пространство $C^{(m)}$ по норме (1.2.1) нормально вложено в банахово пространство $C\{m;0\}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in C^{(m)}$. С помощью формулы Тейлора находим

$$|(T\varphi)(t)| = \frac{1}{m!} |\varphi^{(m)}(\delta \cdot t)| \leq \|\varphi^{(m)}\|_C (t \in [-1,1], \delta = \delta(t) \in (0,1)). \quad (1.2.2)$$

Тогда из соотношений (1.1.1), (1.2.2) и (1.2.1) следует, что

$$\|\varphi\|_{C\{m;0\}} \leq \|\varphi^{(m)}\|_C + \sum_{i=0}^{m-1} \|\varphi^{(i)}\|_C \equiv \|\varphi\|_{C^{(m)}} \quad (1.2.3)$$

Из неравенства (1.2.3) и теоремы 1.2.1 следует требуемое утверждение.

Пусть $\Pi = \Pi_n : C\{m;0\} \rightarrow H_n$ – линейный оператор, отображающий пространство $C\{m;0\}$ в подпространство $H_n \subset C\{m;0\}$ алгебраических полиномов степени n . Тогда справедлив следующий факт.

Лемма 1.2.3. *Пусть $m=0,1,2,\dots$ – произвольное фиксированное целое число. Тогда для любых $n=1,2,\dots$ верна оценка (здесь и далее e_i ($i=1,2,\dots$) – вполне определенные положительные константы, значение которых не зависит от n)*

$$\|\Pi\|_{C\{m;0\}} = \|\Pi\|_{C\{m;0\} \rightarrow C\{m;0\}} \leq e_1 n^{2m} \|\Pi\|_C. \quad (1.2.4)$$

Доказательство. Используя соотношения (1.2.3), (1.2.1), неравенство Маркова [31] и лемму 1.2.1 при $j=m$, последовательно находим

$$\begin{aligned} \|\Pi\varphi\|_{C\{m;0\}} &\leq \sum_{i=0}^m \left\| (\Pi\varphi)^{(i)} \right\|_C \leq \sum_{i=0}^m n^{2i} \|\Pi\varphi\|_C \leq e_1 n^{2m} \|\Pi\|_C \|\varphi\|_C \leq \\ &\leq e_1 n^{2m} \|\Pi\|_C \|\varphi\|_{C\{m;0\}}. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Из условия (1.2.5) следует неравенство (1.2.4).

Следствие. Пусть Π – интерполяционный полиномиальный оператор Лагранжа [31] по узлам Чебышева первого (или второго) рода. В этом случае имеет место оценка

$$\|\Pi\|_{C\{m;0\}} \leq e_2 n^{2m} \ln n \quad (n=2,3,\dots). \quad (1.2.6)$$

2.2. Критерий компактности в пространстве $C\{m;0\}$ устанавливает следующее утверждение.

Теорема 1.2.2. Множество $M \subset C\{m;0\}$ относительно компактно в пространстве $C\{m;0\}$ тогда и только тогда, когда выполнены условия:

- (i) множество M ограничено;
- (ii) семейство $T(M)$ непрерывных на $[-1,1]$ функций равностепенно непрерывно.

Доказательство. Необходимость условия (i) теоремы следует из ограниченности относительно компактных множеств. Далее, так как множество M относительно компактно, то в силу теоремы Хаусдорфа (см., напр., [40]) для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует конечная ε -сеть $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ для M . Это означает, что для всякого $x(t) \in M$ найдется функция $x_{i_0}(t) \in \{x_i(t)\}_1^n$ такая, что $\|x - x_{i_0}\|_{C\{m;0\}} < \varepsilon$. Конечная система $\{(Tx_1)(t), (Tx_2)(t), \dots, (Tx_n)(t)\}$ равностепенно непрерывна на $[-1,1]$, поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что $|(Tx_i)(t_1) - (Tx_i)(t_2)| < \varepsilon$ ($i = \overline{1, n}$), как только $|t_1 - t_2| < \delta$ ($t_1, t_2 \in [-1,1]$). Тогда для любой функции $x(t) \in M$ имеем

$$\begin{aligned} |(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)| &\leq |(T(x - x_{i_0}))(t_1)| + |(Tx_{i_0})(t_1) - (Tx_{i_0})(t_2)| + |(T(x_{i_0} - x))(t_2)| \leq \\ &\leq \varepsilon + 2\|x - x_{i_0}\|_{C\{m;0\}} < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

как только $|t_1 - t_2| < \delta$ ($t_1, t_2 \in [-1,1]$), т.е. семейство $T(M)$ равностепенно непрерывно.

Для доказательства достаточности условий (i) и (ii) выберем произвольную ограниченную последовательность $\{\varphi_k(t)\}_1^\infty \subset M$.

Пусть $\|\varphi_k\|_{C\{m;0\}} \leq r$ ($k = \overline{1, \infty}$), следовательно, в силу (1.1.1) имеем $|(T\varphi_k)(t)| \leq r$ и $|\varphi_k^{\{i\}}(0)| \leq r$ ($t \in [-1,1], i = \overline{0, m-1}, k = \overline{1, \infty}$). Так как каждая из последовательностей $\{\varphi_k^{\{i\}}(0)\}_{k=1}^\infty$ ($i = \overline{0, m-1}$) относительно компактна, то, используя диагональный метод Кантора, можно выбрать такую последовательность $\{\varphi_{n_k}^{\{i\}}(0)\}_{n_k}$, которая будет сходиться при каждом i ($i = \overline{0, m-1}$). Пусть, далее, (t_j) – последовательность, всюду плотно лежащая в $[-1,1]$; годится, например, последовательность всех рациональных чисел из $[-1,1]$. При помощи того же диагонального процесса можно образовать последовательность $\{(T\varphi_{n_{k_s}})(t_j)\}$, сходящуюся для каждой фиксированной точки t_j ($j = \overline{1, \infty}$). А тогда, с учетом условия (ii) теоремы, имеет место оценка

$$\begin{aligned} \left| (T\varphi_{n_{k_s}})(t) - (T\varphi_{n_{k_q}})(t) \right| &\leq \left| (T\varphi_{n_{k_s}})(t) - (T\varphi_{n_{k_s}})(t_j) \right| + \left| (T\varphi_{n_{k_s}})(t_j) - (T\varphi_{n_{k_q}})(t_j) \right| + \\ &+ \left| (T\varphi_{n_{k_q}})(t_j) - (T\varphi_{n_{k_q}})(t) \right| < 3\varepsilon \quad (t \in [-1,1]), \end{aligned}$$

как только n_{k_s} и n_{k_q} достаточно большие, а $|t - t_j| < \delta$. Из нее по определению нормы (1.1.1) сразу следует, что последовательность $\{\varphi_{n_{k_s}}(t)\}$ фундаментальна:

$$\left\| \varphi_{n_{k_s}} - \varphi_{n_{k_q}} \right\|_{C\{m;0\}} \rightarrow 0 \quad (n_{k_s}, n_{k_q} \rightarrow \infty).$$

Значит, в силу полноты пространства $C\{m;0\}$, $\{\varphi_{n_{k_s}}(t)\}$ – искомая сходящаяся последовательность.

Теорема доказана.

Замечание 1.2.1. При $m = 0$ имеем

$$C\{0;0\} \equiv C[-1;1], T(M) = M.$$

Следовательно, полученный выше критерий в случае $m = 0$ совпадает с известным критерием компактности в пространстве $C[-1;1]$ (см., напр., [40], с.110).

Пример 1.2.1. Рассмотрим оператор $T^m : C^{(1)} \rightarrow C\{m;0\}$, задаваемый

$$\text{соотношением } T^m \varphi \equiv \left[a(t) - \sum_{i=0}^{m-1} a^{(i)}(0)t^i / i! \right] \varphi(t) \quad (\varphi \in C^{(1)}),$$

где $a \in C\{m;0\}$ – некоторая заданная функция.

Очевидно, что T^m является линейным ограниченным оператором из $C^{(1)}$ в $C\{m;0\}$, т.е. $T^m \in Z(C^{(1)}, C\{m;0\})$, причем

$$\|T^m\|_{C^{(1)} \rightarrow C\{m;0\}} \leq \|a\|_{C\{m;0\}}.$$

На основании теоремы 1.2.2 можно показать, что для оператора T^m имеет место более сильное утверждение. А именно: *оператор $T^m : C^{(1)} \rightarrow C\{m;0\}$ вполне непрерывен.*

Действительно, пусть F – некоторое ограниченное множество в пространстве $C^{(1)}$, т.е. $\|\varphi\|_{C^{(1)}} \leq e_3$ ($\varphi \in F$). Ясно, что множество $T^m(F)$ ограничено в пространстве $C\{m;0\}$. Проверим выполнение условия (ii) теоремы 1.2.2 для семейства $T \circ T^m(F)$ непрерывных на $[-1;1]$ функций. Для любого $\varepsilon > 0$ и всякого элемента $\varphi \in F$ имеем

$$\begin{aligned} \left| (T T^m \varphi)(t_1) - (T T^m \varphi)(t_2) \right| &= \left| (Ta)(t_1)\varphi(t_1) - (Ta)(t_2)\varphi(t_2) \right| \leq \left| \varphi(t_1) \right| \cdot \left| (Ta)(t_1) - (Ta)(t_2) \right| + \\ &+ \left| (Ta)(t_2) \right| \cdot \left| \varphi(t_1) - \varphi(t_2) \right| \leq \| \varphi \|_C \cdot \varepsilon + \| a \|_{C\{m;0\}} \cdot \| \varphi' \|_C \cdot |t_1 - t_2| \leq e_3 \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

как только $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon) \leq \varepsilon \cdot \|a\|_{C\{m;0\}}^{-1}$ ($t_1, t_2 \in [-1,1]$).

Таким образом, множество $T^m(F)$ относительно компактно в пространстве $C\{m;0\}$; следовательно, оператор T^m вполне непрерывен.

Заметим, что в [47] другим способом устанавливается полная непрерывность оператора $T^1 : C^{(1)} \rightarrow C\{1;0\}$. Затем она используется при доказательстве нётеровости некоторого дифференциального оператора.

§3. Частные тейлоровские производные и определяемые ими классы функций

Пусть $K(t, s) \in C([-1,1]^2)$ и при каждом фиксированном $s \in [-1,1]$ существуют последовательно следующие пределы:

$$\begin{aligned} j! \lim_{t \rightarrow 0} (T_t^j K)(t, s) &\equiv j! \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left[K(t, s) - \sum_{i=0}^{j-1} K_t^{\{i\}}(0, s) t^i / i! \right] / t^j \right\} \equiv \\ &\equiv K_t^{\{j\}}(0, s) \quad (j = 0, 1, \dots, m; K_t^{\{0\}}(0, s) \equiv K(0, s)). \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Тогда величины $K_t^{\{1\}}(0, s), K_t^{\{2\}}(0, s), \dots, K_t^{\{m\}}(0, s)$ назовем частными тейлоровскими производными по переменной t соответствующих порядков от функции $K(t, s)$ в точке $t = 0$. Аналогично определяем частные тейлоровские производные функции $K(t, s)$ и по второй переменной s , а именно,

$$K_s^{\{j\}}(t, 0) \equiv j! \lim_{s \rightarrow 0} (T_s^j K)(t, s) \quad (j = \overline{0, q}; K_s^{\{0\}}(t, 0) \equiv K(t, 0)). \quad (1.3.2)$$

Величины (1.3.1) и (1.3.2) являются функциями переменных s и t соответственно. Если $K_t^{\{j\}}(0, s) \in C(j = \overline{1, m})$, то будем писать $K(t, s) \in C_t^{\{m\}}([-1,1]^2)$. Отметим, что класс $C_s^{\{m\}}([-1,1]^2)$ вводится аналогично. Условимся также в следующем обозначении:

$$C^{\{m\}}([-1,1]^2) \equiv C_t^{\{m\}}([-1,1]^2) \cap C_s^{\{m\}}([-1,1]^2).$$

В дальнейшем при исследовании интегральных уравнений третьего рода на ядро интегрального оператора будем накладывать, в зависимости от ситуации, некоторые условия из определенной совокупности

требований. В связи с этим рассмотрим пример функции, обладающей только что упомянутой совокупностью условий.

Пример 1.3.1. Пусть функция $K(t, s)$ имеет вид

$$K(t, s) = (t \cdot s)^m h(t, s) + t^m \sum_{i=0}^{m-1} g_i(t) s^i + \sum_{i=0}^{m-1} b_i(s) t^i,$$

где $h \in C([-1, 1]^2)$, $g_i \in C$, $b_i \in C\{m; 0\}$ ($i = \overline{0, m-1}$).

Тогда она удовлетворяет следующей системе условий:

- (а) $(T_t K)(t, s) \in C_s^{\{m\}}([-1, 1]^2)$;
- (б) $\int_{-1}^1 (T_s^j K)(t, s) ds \in C\{m; 0\}$ ($j = \overline{0, m}$);
- (в) $(T_t K)_s^{\{i\}}(t, 0) = T[K_s^{\{i\}}(t, 0)]$ ($i = \overline{0, m}$);
- (г) $K_t^{\{i\}}(0, s), K_s^{\{i\}}(t, 0) \in C\{m; 0\}$ ($i = \overline{0, m}$).

Перечисленные свойства (а)-(г) функции $K(t, s)$ без труда получаются из определений (1.3.1), (1.3.2) и соотношения (1.1.2).

В дальнейшем важную роль будет играть следующая

Лемма 1.3.1. Пусть $\theta(t, s) \in C_s^{\{m\}}([-1, 1]^2)$ и n – произвольное фиксированное натуральное число. Тогда существует такая функция $\psi(t, s) \equiv \psi(t, s; n) \in C_s^{\{m\}}([-1, 1]^2)$, что имеют место оценки:

- (i) $|(\theta - \psi)(t, s)| \leq \varepsilon_{n-1}^t(\theta)$ ($t, s \in [-1, 1]$);
- (ii) $|(\theta - \psi)_s^{\{k\}}(t, 0)| \leq (m-1)! \varepsilon_{n-1}^t(\theta)$ ($t \in [-1, 1], k = \overline{0, m-1}$);
- (iii) $|(T_s^k(\theta - \psi))(t, s)| \leq \varepsilon_{n-1}^t(\theta)$ ($t, s \in [-1, 1], k = \overline{1, m}$),

где

$$\varepsilon_{n-1}^t(\theta) = E_{n-1}^t(h) + \sum_{i=0}^{m-1} E_{n-1}(g_i), h(t, s) = (T_s \theta)(t, s),$$

$$g_i(t) = \theta_s^{\{i\}}(t, 0) / i! \quad (i = \overline{0, m-1}),$$

$E_l(f)$ – наилучшее равномерное приближение непрерывной функции $f(t)$ полиномами из класса $H_l(l \geq 0)$, а $E_{n-1}^t(h)$ обозначает частное наилучшее равномерное приближение $h(t, s)$ по переменной t элементами множества H_{n-1} .

Доказательство. В силу соотношения (1.1.2) имеем представление

$$\theta(t, s) = s^m \cdot h(t, s) + \sum_{k=0}^{m-1} g_k(t) s^k. \quad (1.3.3)$$

Далее, пусть $Q_{n-1}^t(t, s)$ и $G_{n-1}^k(t)$ – алгебраические полиномы степени $n-1$ наилучшего равномерного приближения для $h(t, s)$ (по аргументу t) и $g_k(t)$ ($k = \overline{0, m-1}$) соответственно. Введем в рассмотрение функцию

$$\psi(t, s) \equiv s^m Q_{n-1}^t(t, s) + \sum_{k=0}^{m-1} G_{n-1}^k(t) s^k. \quad (1.3.4)$$

Тогда из (1.3.3), (1.3.4) и (1.3.2) с учётом (1.1.2) следуют требуемые оценки:

$$(i) \quad |(\theta - \psi)(t, s)| = \left| s^m [h(t, s) - Q_{n-1}^t(t, s)] + \sum_{k=0}^{m-1} [g_k(t) - G_{n-1}^k(t)] s^k \right| \leq \varepsilon_{n-t}^t(\theta)$$

$(t, s \in [-1, 1])$;

$$(ii) \quad |(\theta - \psi)_s^{\{k\}}(t, 0)| = |k! [g_k(t) - G_{n-1}^k(t)]| \leq k! E_{n-1}(g_k) \leq (m-1)! \varepsilon_{n-1}^t(\theta)$$

$(t \in [-1, 1], k = \overline{0, m-1})$;

$$(iii) \quad |(T_s^k(\theta - \psi))(t, s)| = \left| s^{m-k} [h(t, s) - Q_{n-1}^t(t, s)] + \sum_{i=k}^{m-1} [g_i(t) - G_{n-1}^i(t)] s^{i-k} \right| \leq$$

$\leq \varepsilon_{n-1}^t(\theta) (t, s \in [-1, 1], k = \overline{1, m})$.

Лемма доказана.

§4. Пространства $C\{\overline{m};\overline{\tau}\}$ и $P\{\overline{m};\overline{\tau}\}$

4.1. В этом пункте приведем некоторые определения и вспомогательные факты, которыми будем пользоваться в дальнейшем изложении.

Рассмотрим сингулярный интеграл

$$S(m, \varphi, t_0) = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-t_0)^m} dt \quad (-1 < t_0 < 1), \quad (1.4.1)$$

где $m \geq 1$ – целое число.

При $m \geq 2$ интеграл (1.4.1) будем понимать в смысле конечной части (F.P.) по Адамару (см., напр., [3, 61]), т.е.

$$S(m, \varphi, t_0) \equiv F.P. \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-t_0)^m} dt \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-1}^{t_0-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{(t-t_0)^m} dt + \int_{t_0+\varepsilon}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-t_0)^m} dt - \frac{\Delta(t_0)}{\varepsilon^{m-1}} \right],$$

$$\text{где } \Delta(t_0) = \sum_{k=0}^{m-2} \frac{\varphi^{(k)}(t_0)}{k!} \cdot \varepsilon^{m-1} \cdot \frac{(t-t_0)^{k-m+1}}{k-m+1} \Big|_{t_0+\varepsilon}^{t_0-\varepsilon} = \sum_{k=0}^{m-2} \frac{\varphi^{(k)}(t_0)}{k!} \cdot \frac{\varepsilon^k [1 + (-1)^{m-k}]}{m-k-1}.$$

В частности, если $\varphi(t) \equiv 1$, имеем

$$S(m, 1, t_0) \equiv S(m, t_0) \equiv \frac{1}{1-m} \left[\frac{1}{(1-t_0)^{m-1}} + \frac{(-1)^m}{(1+t_0)^{m-1}} \right].$$

При $m = 1$ интеграл (1.4.1) понимаем в смысле главного значения (V.P.) по Коши (см., напр., [30]), т.е.

$$S(1, \varphi, t_0) = S(\varphi, t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{t_0-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt + \int_{t_0+\varepsilon}^1 \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt \right).$$

Очевидно, что если $S(1, \varphi, t_0)$ существует в смысле V.P., то он существует и в смысле F.P., причем

$$F.P. \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = V.P. \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt.$$

Справедлива следующая

Лемма 1.4.1. Пусть функция $K(t, s) \in C_t^{\{m\}}([-1, 1]^2)$ ($m \in \mathbb{N}$) и $f(t) \in C$.

Тогда верна перестановка порядка интегрирования (здесь и в дальнейшем при интегрировании знак "F.P." будем опускать):

$$\int_{-1}^1 f(s) ds \int_{-1}^1 \frac{K(t, s)}{t^m} dt = \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^m} \int_{-1}^1 K(t, s) f(s) ds .$$

Доказательство. Учитывая интегрируемость функции $(T_t^m K)(t, s)$ на множестве $[-1, 1]^2$ и используя теорему Фубини (см., напр., [40]), имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(s) ds \int_{-1}^1 \frac{K(t, s)}{t^m} dt &= \int_{-1}^1 f(s) ds \left[\int_{-1}^1 (T_t^m K)(t, s) dt + \sum_{i=0}^{m-1} (i!)^{-1} K_t^{\{i\}}(0, s) \cdot \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^{m-i}} \right] = \\ &= \int_{-1}^1 dt \int_{-1}^1 (T_t^m K)(t, s) f(s) ds + \sum_{i=0}^{m-1} (i!)^{-1} \int_{-1}^1 K_t^{\{i\}}(0, s) f(s) ds \cdot \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^{m-i}} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^m} \cdot \int_{-1}^1 K(t, s) f(s) ds . \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Далее, введем следующие определения (см. [32]).

Определение 1.4.1. Банахово пространство E' называется союзным к банахову пространству E , если $E' \subset E^*$ (E^* — пространство, сопряженное к E) и существует такое положительное число c , что

$$|(f, \varphi)| \leq c \|f\|_{E'} \cdot \|\varphi\|_E$$

для всех элементов $f \in E'$ и $\varphi \in E$ (норма $\|f\|_{E'}$, вообще говоря, не является эквивалентной норме $\|f\|_{E^*}$).

Ясно, что исходное пространство E , в свою очередь, можно рассматривать как союзное к пространству E' .

Обозначим, как обычно, через $Z(E_1, E_2)$ пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из E_1 в E_2 .

Определение 1.4.2. Пусть E_1, E'_1 и E_2, E'_2 — пары взаимно союзных пространств и $A \in Z(E_1, E_2), A' \in Z(E'_1, E'_2)$. Операторы A и A' называются союзными, если

$$(A'f, \varphi) = (f, A\varphi)$$

для всех $f \in E_1'$ и $\varphi \in E_1$.

Отметим, что основные понятия и обозначения, относящиеся к теории операторов Нетера, мы будем заимствовать из [51]. В частности, если $A \in \mathcal{Z}(E_1, E_2)$, то $\alpha(A) = \dim \ker A$ – первое дефектное число оператора A , $\beta(A) = \dim \text{co ker } A$ – второе дефектное число оператора A и $\chi(A) = \alpha(A) - \beta(A)$ – индекс оператора A .

В дальнейшем при исследовании интегральных уравнений третьего рода значительную роль играет следующая [32]

Лемма 1.4.2. Пусть E_1, E_1' и E_2, E_2' – пары союзных пространств и $A \in \mathcal{Z}(E_1, E_2), A' \in \mathcal{Z}(E_1', E_2')$ – союзные нетеровы операторы, причем

$$\chi(A) = -\chi(A').$$

Тогда для разрешимости уравнения $Ax = y$ ($x \in E_1, y \in E_2$) необходимо и достаточно выполнение условия

$$(f, y) = 0$$

для всех $f \in E_2'$, удовлетворяющих уравнению $A'f = 0$.

4.2. Рассмотрим на основном пространстве $C\{m;0\}$ совокупность $P\{m;0\}$ обобщенных функций $u(t)$ вида

$$u(t) = v(t) + \sum_{i=0}^{m-1} [w_i \delta^{\{i\}}(t) + \alpha_i F.P.t^{-i-1}], \quad (1.4.2)$$

где $t \in [-1, 1], v \in C; w_i, \alpha_i \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные, а δ и $\delta^{\{i\}}$ – соответственно дельта-функция Дирака и ее «тейлоровские» производные, определенные на пространстве $C\{m;0\}$ основных функций по следующему правилу:

$$(\delta^{\{i\}}(t), \varphi) = \int_{-1}^1 \delta^{\{i\}}(t) \varphi(t) dt \equiv (-1)^i \varphi^{\{i\}}(0) \quad (\varphi \in C\{m;0\}, i = \overline{0, m-1}).$$

Обобщенные функции $F.P. t^{-k}$, ($k = \overline{1, m}$) определим с помощью соотношения

$$(F.P. t^{-k}, \varphi) \equiv F.P. \int_{-1}^1 \varphi(t) t^{-k} dt \quad (\varphi \in C\{m; 0\}, k = \overline{1, m}).$$

Легко показать, что векторное пространство $P\{m; 0\}$ относительно нормы

$$\|u\|_{P\{m; 0\}} \equiv \|v\|_C + \sum_{i=0}^{m-1} (|w_i| + |\alpha_i|) \quad (1.4.3)$$

является банаховым.

Пусть $u \in P\{m; 0\}$ и $\varphi \in C\{m; 0\}$. Тогда по определению

$$\begin{aligned} u(\varphi) &\equiv (u, \varphi) = \int_{-1}^1 \left[v(t) + \sum_{i=0}^{m-1} (w_i \delta^{\{i\}}(t) + \alpha_i t^{-i-1}) \right] \varphi(t) dt = \\ &= \int_{-1}^1 v(t) \varphi(t) dt + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i w_i \varphi^{\{i\}}(0) + \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \left[\int_{-1}^1 (T^{i+1} \varphi)(t) dt + \sum_{j=0}^i \frac{\varphi^{\{j\}}(0)}{j!} \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^{i+1-j}} \right], \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} |(u, \varphi)| &\leq 2 \|v\|_C \|\varphi\|_{C\{m; 0\}} + \|\varphi\|_{C\{m; 0\}} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} |w_i| + \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} |\alpha_i| \left\{ 2 \left[\|T^m \varphi\|_C + \sum_{j=m-i}^{m-1} |\varphi^{\{j\}}(0)| \right] + \sum_{j=0}^{m-i-1} |\varphi^{\{j\}}(0)| \cdot \left| \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^{m-i-j}} \right| \right\} \leq \\ &e_4 \|u\|_{P\{m; 0\}} \|\varphi\|_{C\{m; 0\}}, \end{aligned}$$

где

$$e_4 = \max \left\{ 2, \max_{\substack{j=0, m-i-1, \\ i=0, m-1}} \left| \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^{m-i-j}} \right| \right\}.$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 1.4.3. *Имеет место неравенство*

$$|(u, \varphi)| \leq e_4 \|u\|_{P\{m; 0\}} \|\varphi\|_{C\{m; 0\}} \quad (\forall u \in P\{m; 0\}, \forall \varphi \in C\{m; 0\}). \quad (1.4.4.)$$

Следствие 1. Элементы $u(t)$ пространства $P\{m;0\}$ являются линейными непрерывными функционалами (обобщенными функциями), заданными на пространстве $C\{m;0\}$ основных функций.

Следствие 2. Пространства $P\{m;0\}$ и $C\{m;0\}$ являются взаимно союзными.

Лемма 1.4.4. Система элементов $\{\delta(t), \delta'(t), \dots, \delta^{\{m-1\}}(t), t^{-1}, t^{-2}, \dots, t^{-m}, 1, t, t^2, \dots, t^n\}$ ($n=0,1,2,\dots$) линейно независима в пространстве $P\{m;0\}$.

Доказательство. Допустим, что

$$c_0\delta(t) + c_1\delta'(t) + \dots + c_{m-1}\delta^{\{m-1\}}(t) + c_m t^{-1} + c_{m+1}t^{-2} + \dots + c_{2m-1}t^{-m} + c_{2m} + c_{2m+1}t + \dots + c_{2m+n}t^n = 0, \quad (1.4.5)$$

т.е.

$$\left(\sum_{i=0}^{m-1} c_i \delta^{\{i\}}(t) + \sum_{i=1}^m c_{m+i-1} t^{-i} + \sum_{i=0}^n c_{2m+i} t^i, \varphi \right) = 0 \quad (\forall \varphi \in C\{m;0\}),$$

где c_i ($i = \overline{0, 2m+n}$) – не все нули. После умножения обеих частей равенства (1.4.5) на функцию t^m , учитывая при этом свойства

$$t^m \cdot \delta^{\{i-1\}}(t) = 0, \quad t^m \cdot F.P.t^{-i} = t^{m-i} \quad (i = \overline{1, m})$$

и линейную независимость системы $\{1, t, t^2, \dots\}$, получим, что $c_m = c_{m+1} = \dots = c_{2m+n} = 0$. Тогда (1.4.5.) приобретает вид

$$\sum_{i=0}^{m-1} c_i \delta^{\{i\}}(t) = 0.$$

Но система $\{\delta(t), \delta^{\{1\}}(t), \dots, \delta^{\{m-1\}}(t)\}$ в пространстве $P\{m;0\}$ линейно независима. В противном случае, выбирая в качестве основных функций последовательно $1, t, \dots, t^{m-1}$, получили бы $c_0 = c_1 = \dots = c_{m-1} = 0$.

Таким образом, $c_0 = c_1 = \dots = c_{2m+n} = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

4.3. Пусть t_1, t_2, \dots, t_p – произвольные фиксированные попарно различные точки интервала $(-1,1)$. Каждой точке $t_j \in (-1,1)$ поставим в

соответствие некоторое натуральное число $m_j \in \mathbb{N}$ ($j = \overline{1, p}$). Введем в рассмотрение векторное пространство

$$C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} = C\{\overline{m}\}_{\overline{\tau}}[-1, 1] \equiv \bigcap_{j=1}^p C\{m_j; t_j\},$$

где $\overline{m} = (m_1, m_2, \dots, m_p)$ и $\overline{\tau} = (t_1, t_2, \dots, t_p)$ — конечные наборы соответствующих величин. Наделим его нормой

$$\|\varphi\|_{C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} \equiv \|\Gamma\varphi\|_C + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \left| \varphi^{\{i\}}(t_j) \right| \quad (\varphi \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}), \quad (1.4.6)$$

где

$$\Gamma\varphi = [\varphi(t) - U_{\mu-1}(t)]/l(t) \quad (\varphi \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}), \quad (1.4.7)$$

$$U_{\mu-1}(t) = U_{\mu-1}(\varphi; t) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \varphi^{\{i\}}(t_j) R_{ji}(t), \quad \mu = \sum_{j=1}^p m_j,$$

$$U_{\mu-1}^{(i)}(t_j) = \varphi^{\{i\}}(t_j) \quad (i = \overline{0, m_j-1}, j = \overline{1, p}),$$

$R_{ji}(t)$ — фундаментальные полиномы Эрмита степени $\mu - 1$ вида (см., напр., [44])

$$R_{ji}(t) = \frac{1}{i!} \cdot \frac{l(t)}{(t-t_j)^{m_j-i}} \cdot \sum_{k=0}^{m_j-i-1} \frac{1}{k!} \left[\frac{(t-t_j)^{m_j}}{l(t)} \right]_{t=t_j}^{(k)} (t-t_j)^k,$$

$$l(t) = \prod_{j=1}^p (t-t_j)^{m_j} \quad (i = \overline{0, m_j-1}, j = \overline{1, p}).$$

Ясно, что $\Gamma : C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow C$, причем с помощью леммы 1.1.2 находим

$$(\Gamma\varphi)(t_j) = \lim_{t \rightarrow t_j} (\Gamma\varphi)(t) = \frac{(\varphi - U_{\mu-1})^{\{m_j\}}(t_j)}{m_j! \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p (t_j - t_i)^{m_i}} \quad (j = \overline{1, p}).$$

Оператор Γ обратим справа, и его правый обратный $-l(t) \cdot E$, где E — единичный оператор в пространстве C . Действительно, если $z \in C$, то

$$(\Gamma\Gamma^{-1}z)(t) = \Gamma(l(t)z(t)) = z(t).$$

Имеет место следующая

Лемма 1.4.5. *Справедливы утверждения:*

(i) функция $\varphi(t)$ принадлежит классу $C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$\varphi(t) = (l \cdot \mathcal{J})(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} a_{ji} R_{ji}(t), \quad (1.4.8)$$

где $\mathcal{J} = T\varphi$ и $a_{ji} = \varphi^{(i)}(t_j)$ ($i = \overline{0, m_j-1}$, $j = \overline{1, p}$);

(ii) $C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ по норме (1.4.6) полно и вложено в C .

Доказательство легко следует из соотношения (1.4.7) и определения тейлоровской производной.

4.4. Пусть $K(t, s) \in C([-1, 1]^2)$. Следуя §3, введем некоторые классы функций двух переменных. А именно, будем говорить, что функция $K(t, s)$ принадлежит классу $C_t^{(\overline{m})}([-1, 1]^2)$, если существуют частные тейлоровские производные $K_t^{(i)}(t_j, s)$ по переменной t в точке t_j ($j = \overline{1, p}$) и $K_t^{(i)}(t_j, s) \in C$ ($i = \overline{1, m_j}$, $j = \overline{1, p}$). По аналогии определяем классы $C_s^{(\overline{m})}([-1, 1]^2)$ и $C_{\tau}^{(\overline{m})}([-1, 1]^2)$.

В дальнейшем при обосновании приближенных методов решения интегральных уравнений третьего рода важную роль будет играть следующее утверждение, которое является обобщением леммы 1.3.1.

Лемма 1.4.6. Пусть $\theta(t, s) \in C_s^{(\overline{m})}([-1, 1]^2)$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует такая функция $\psi(t, s) \equiv \psi(t, s; n) \in C_s^{(\overline{m})}([-1, 1]^2)$, что справедливы оценки

$$(i) \quad |(\theta - \psi)(t, s)| \leq e_5 \varepsilon_{n-1}^t(\theta) \quad (t, s \in [-1, 1]);$$

$$(ii) \quad |(\theta - \psi)_s^{(i)}(t, t_j)| \leq e_6 \varepsilon_{n-1}^t(\theta) \quad (t \in [-1, 1], t_j \in (-1, 1), i = \overline{0, m_j-1}, j = \overline{1, p});$$

$$(iii) \quad |(T_s^k(\theta - \psi))(t, s)| \leq e_7 \varepsilon_{n-1}^t(\theta) \quad (t, s \in [-1, 1], k = \overline{1, m_j}, j = \overline{1, p}),$$

где

$$\varepsilon_{n-1}^t(\theta) = E_{n-1}^t(h) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} E_{n-1}(g_{ji}),$$

$$h(t, s) = (T_s \theta)(t, s) \in C, \quad g_{ji}(t) = \theta_s^{(i)}(t, t_j) \quad (i = \overline{0, m_j-1}, j = \overline{1, p}),$$

а символы T_s^k и T_s обозначают операторы вида (1.3.1) и (1.4.7) соответственно, примененные по аргументу s .

Доказательство. В силу (1.4.8) имеем

$$\theta(t, s) = l(s)h(t, s) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} g_{ji}(t)R_{ji}(s).$$

Пусть $h'_{n-1}(t, s)$ и $g'_{n-1}(t)$ – алгебраические полиномы степени $n-1$ наилучшего равномерного приближения для $h(t, s)$ (по аргументу t) и $g_{ji}(t)$ ($i = \overline{0, m_j-1}$, $j = \overline{1, p}$) соответственно. Образует функцию

$$\psi(t, s) = l(s)h'_{n-1}(t, s) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} g'_{n-1}(t)R_{ji}(s). \quad (1.4.9)$$

Теперь с учетом доказательства леммы 1.3.1 ясно, что $\psi(t, s)$ является искомой функцией из класса $C_s^{(\overline{m})}([-1, 1]^2)$. Справедливость оценок (i) - (iii) проверяется непосредственно. Доказательство окончено.

4.5. Обозначим через $P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ класс обобщенных функций $f(t)$, определенных на основном пространстве $C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$, вида

$$f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} [w_{ji} \delta^{(i)}(t - t_j) + \alpha_{ji} F.P.(t - t_j)^{-i-1}], \quad (1.4.10)$$

где $g \in C$, $t \in [-1, 1]$, $t_j \in (-1, 1)$, $m_j \in \mathbb{N}$ ($j = \overline{1, p}$); $w_{ji}, \alpha_{ji} \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные, а $\delta(t - t_j)$ и $F.P.(t - t_j)^{-i-1}$ – функционалы, введенные выше. Легко видеть, что с нормой

$$\|f\|_{P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} \equiv \|g\|_C + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} (|w_{ji}| + |\alpha_{ji}|) \quad (1.4.11)$$

$P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ является пространством Банаха.

Пусть $f \in P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ и $\varphi(t) \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} (f, \varphi) &\equiv \int_{-1}^1 \left\{ g(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} [w_{ji} \delta^{(i)}(t - t_j) + \alpha_{ji} (t - t_j)^{-i-1}] \right\} \varphi(t) dt = \\ &= \int_{-1}^1 g(t) \varphi(t) dt + \sum_j \sum_i (-1)^i w_{ji} \varphi^{(i)}(t_j) + \sum_j \sum_i \alpha_{ji} \int_{-1}^1 \varphi(t) (t - t_j)^{-i-1} dt, \end{aligned}$$

причем, как и в лемме 1.4.3, с учетом (1.4.8) получим

$$|(f, \varphi)| \leq e_8 \|f\|_{P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} \|\varphi\|_{C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}}. \quad (1.4.12)$$

Таким образом, $P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ – пространство линейных непрерывных функционалов (обобщенных функций), заданных на пространстве $C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ основных функций. Из неравенства (1.4.12) также непосредственно следует, что пространства $C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ и $P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ являются взаимно союзными.

Лемма 1.4.7. Система $\{\delta^{\{i\}}(t - t_j)\}$ ($i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}$) обобщенных функций в пространстве $P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ линейно независима.

Доказательство. Пусть система линейно зависима, т.е.

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{ji} \delta^{\{i\}}(t - t_j) = 0, \quad (1.4.13)$$

где среди c_{ji} ($i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}$) имеются коэффициенты, отличные от нуля.

Тогда умножая равенство (1.4.13) последовательно на функции

$$l_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p (t - t_j)^{m_j} \quad (i = \overline{1, p}),$$

учитывая при этом линейную независимость

каждой из систем $\{\delta^{\{i\}}(t - t_j)\}_{i=0}^{m_j-1}$ ($j = \overline{1, p}$) (см. доказательство леммы 1.4.4),

получаем $c_{ji} = 0$ ($i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}$). Тем самым пришли к противоречию с

тем, что не все c_{ji} нули.

Лемма доказана.

§5. К теории приближения в пространствах $C\{\bar{m};\bar{\tau}\}$ и $P\{\bar{m};\bar{\tau}\}$

5.1. Полноту системы полиномов в $C\{\bar{m};\bar{\tau}\}$ устанавливает следующая

Теорема 1.5.1 (аналог теоремы Вейерштрасса). Для всякого элемента $\varphi \in C\{\bar{m};\bar{\tau}\}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует полином $F(t)$ такой, что

$$\|\varphi - F\|_{C\{\bar{m};\bar{\tau}\}} < \varepsilon.$$

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 1.2.1 с учетом (1.4.8) и (1.4.6).

Следствие. Пространство $C\{\bar{m};\bar{\tau}\}$ в метрике, определяемой нормой (1.4.6), сепарабельно.

Обозначим, как и выше, через H_n множество всех алгебраических полиномов степени не выше n , т.е.

$$H_n = \text{span} \{t^i\}_0^n \equiv \left\{ x(\cdot) \mid x(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k, \alpha_k \in \mathbf{R} \right\}.$$

Далее, пусть $\varphi \in C\{\bar{m};\bar{\tau}\}$ и $\varphi_n \in H_n$. В соответствии с формулой (1.4.6) в качестве уклонения полинома $\varphi_n(t)$ от функции $\varphi(t)$ принимаем величину $\|\varphi - \varphi_n\|_{C\{\bar{m};\bar{\tau}\}}$. Введем обозначение

$$E_n^T(\varphi) \equiv \inf_{\varphi_n \in H_n} \|\varphi - \varphi_n\|_{C\{\bar{m};\bar{\tau}\}} \quad (\varphi \in C\{\bar{m};\bar{\tau}\}). \quad (1.5.1)$$

Величину (1.5.1) назовем наилучшим приближением функции $\varphi \in C\{\bar{m};\bar{\tau}\}$ элементами из класса H_n . Полином $Q_n(t) \in H_n$, для которого выполняется условие

$$E_n^T(\varphi) = \|\varphi - Q_n\|_{C\{\bar{m};\bar{\tau}\}}, \quad (1.5.2)$$

назовем полиномом наилучшего приближения функции $\varphi \in C\{\bar{m};\bar{\tau}\}$ на $[-1,1]$.

Справедлива следующая

Теорема 1.5.2. Если $\varphi \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$, то при каждом $n \left(n \geq \mu, \mu = \sum_{j=1}^p m_j \right)$ в

H_n существует полином наилучшего приближения функции $\varphi \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$, причем

$$E_n^T(\varphi) = E_{n-\mu}(\Gamma\varphi). \quad (1.5.3)$$

Доказательство. Как известно (см., напр., [31]), для непрерывной функции $\mathcal{J}(t) = (\Gamma\varphi)(t)$ при каждом $q \geq 0$ в классе H_q существует полином

$F_q(t) = \sum_{k=0}^q \alpha_k t^k$ такой, что $\|\mathcal{J} - F_q\|_C = E_q(\mathcal{J})$. Покажем, что

$$\mathcal{Q}_n(t) \equiv l(t)F_q(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \varphi^{\{i\}}(t_j) R_{ji}(t) \quad (n = \mu + q)$$

является искомым полиномом наилучшего приближения функции $\varphi \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$.

Пусть $\varphi_n(t) = \varphi_{\mu+q}(t) \in H_n$ — произвольный полином. Очевидно, что для него имеет место представление

$$\varphi_n(t) = l(t) \cdot \sum_{k=0}^q \beta_k t^k + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \gamma_{ji} R_{ji}(t), \quad (1.5.4)$$

где β_k ($k = \overline{0, q}$) — некоторые постоянные, $\gamma_{ji} = \varphi_n^{\{i\}}(t_j)$ ($i = \overline{0, m_j-1}, j = \overline{1, p}$).

Тогда, в силу соотношений (1.4.8) и (1.5.4), имеем

$$(\varphi - \varphi_n)(t) = l(t) \left[\mathcal{J}(t) - \sum_{k=0}^q \beta_k t^k \right] + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} (\alpha_{ji} - \gamma_{ji}) R_{ji}(t),$$

где, как и раньше, $\alpha_{ji} = \varphi^{\{i\}}(t_j)$ ($i = \overline{0, m_j-1}, j = \overline{1, p}$). Отсюда, с учетом нормы (1.4.6) и (1.4.8), следует, что

$$\begin{aligned} E_n^T(\varphi) &\equiv \inf_{\varphi_n \in H_n} \|\varphi - \varphi_n\|_{C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} = \inf_{\{\beta_k\}, \{\gamma_{ji}\}} \left(\left\| \mathcal{J}(t) - \sum_{k=0}^q \beta_k t^k \right\|_C + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} |\alpha_{ji} - \gamma_{ji}| \right) = \\ &= \inf_{\{\beta_k\}} \left\| \mathcal{J}(t) - \sum_{k=0}^q \beta_k t^k \right\|_C \equiv E_q(\mathcal{J}) = E_{n-\mu}(\Gamma\varphi), \end{aligned}$$

т.е. $\gamma_{j_i} = \alpha_{j_i}$ ($i = \overline{0, m_j - 1}$, $j = \overline{1, p}$) и $\beta_k = \alpha_k$ ($k = \overline{0, q}$).

Доказательство теоремы завершено.

Следствие 1. Пусть $Lip(\alpha, M)$ – класс функций, удовлетворяющих на отрезке $[-1, 1]$ условию Липшица порядка $\alpha \in (0, 1]$ с постоянной $M > 0$ и функция $(T\varphi)(t)$ непрерывно дифференцируема p раз на $[-1, 1]$, причем $(T\varphi)^{(p)}(t) \in Lip(\alpha, M)$. Тогда при $n > \mu + p$ справедливо неравенство

$$E_n^T(\varphi) \leq \frac{D_{p,\alpha} \cdot M}{(n - \mu)^{p+\alpha}}, \quad (1.5.5)$$

где $\varphi \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$, $D_{p,\alpha}$ – константа, зависящая от p и α .

Следствие 2. Если $Z \subset C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$, то при каждом $n = \mu, \mu + 1, \dots$ верно равенство $\varepsilon_n^T(Z) = \varepsilon_{n-\mu}^T[T(Z)]$, где число $\varepsilon_n^T(Z) \equiv \sup_{\varphi \in Z} E_n^T(\varphi)$ характеризует возможность приближения всех элементов множества Z элементами из пространства $H_n \subset C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$, а

$$\varepsilon_l(L) \equiv \sup_{f \in L} E_l(f) \quad (L \subset C, l \geq 0).$$

Далее, пусть $d_n(Q, X)$ обозначает, как обычно, n -й поперечник по Колмогорову множества Q в пространстве X .

Теорема 1.5.3. При каждом натуральном N ($N > \mu$) справедливо соотношение

$$d_N(Q, C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}) = d_{N-\mu}(T(Q), C).$$

Доказательство. Пусть $Y = C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$, Y_n и C_n – произвольные n -мерные подпространства пространств Y и C соответственно, т.е.

$$Y = U(C) \oplus H_{\mu-1}, \quad Y_n = U(C_{n-\mu}) \oplus H_{\mu-1},$$

где $Uf \equiv (l \cdot f)(t) = f(t) \cdot \prod_{j=1}^p (t - t_j)^{m_j}$ ($f \in C$). С учётом доказательства

теоремы 1.5.2 легко получить, что

$$E_{Y_n}(y) \equiv \inf_{y_n \in Y_n} \|y - y_n\|_Y = E_{C_{n-\mu}}(Ty) \quad (y \in Y).$$

Возьмем теперь произвольное множество $Q \subset Y$:

$$Q = U(L) \oplus H_{\mu-1}, \quad L \subset C.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} d_N(Q, Y) &= \inf_{Y_N} \sup_{y \in Q} E_{Y_N}(y) = \inf_{Y_N} \sup_{y \in Q} E_{C_{N-\mu}}(Ty) = \inf_{C_{N-\mu}} \sup_{\lambda \in L} E_{C_{N-\mu}}(\lambda) \equiv \\ &= d_{N-\mu}(L, C) = d_{N-\mu}(T(Q), C). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали тот факт, что $TUf = f$ ($f \in C$) и $\ker T = H_{\mu-1}$.

Доказательство завершено.

Следствие. *Имеет место слабая эквивалентность*

$$d_N \left(C_{\tau}^{\{\overline{m}\}} H_{\omega}^r, C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \right) \asymp N^{-r} \omega(1/N) \quad (N > \mu + r, r = 0, 1, 2, \dots),$$

где $C_{\tau}^{\{\overline{m}\}} H_{\omega}^r \equiv \{g \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \mid Tg \in H_{\omega}^r\}$, $H_{\omega}^r \equiv \{f \in C^{(r)}[-1, 1] \mid \omega(f^{(r)}; \Delta) \leq \omega(\Delta)\}$,

$\omega = \omega(\Delta)$ – некоторый заданный модуль непрерывности, а $\omega(f; \Delta)$ – модуль непрерывности функции f в точке Δ ($0 < \Delta \leq 2$).

5.2. В этом пункте будем обсуждать вопрос об аппроксимации функций из пространства $C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ элементами из $H_{n+\mu-1}$ ($n \in \mathbb{N}$) при помощи линейных операторов.

Пусть $\Gamma_n : C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow H_{n+\mu-1}$ – произвольный линейный оператор, ставящий в соответствие всякой функции $y \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ некоторый алгебраический полином

$$\Gamma_n y = \Gamma_{n+\mu-1}(y; t) = \sum_{i=0}^{n+\mu-1} b_i t^i = l(t) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k t^k + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \gamma_{ji} R_{ji}(t), \quad (1.5.6)$$

$$\beta_k = \beta_k(y), \gamma_{ji} = \gamma_{ji}(y) \quad (k = \overline{0, n-1}, i = \overline{0, m_j-1}, j = \overline{1, p}).$$

Тогда на основании представлений (1.4.8) и (1.5.6) ясно, что приближение функции $y \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ с помощью операторов Γ_n эквивалентно аппроксимации функции Ty посредством линейных полиномиальных операторов $P_n : C \rightarrow H_{n-1}$ и приближению коэффициентов $y^{\{i\}}(t_j)$ ($i = \overline{0, m_j-1}, j = \overline{1, p}$) при помощи значений линейных функционалов $\gamma_{ji}(y)$

$(i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p})$. Следовательно, аппроксимирующие операторы Γ_n задаются соотношением вида

$$\Gamma_n y = (UP_n \Gamma y)(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \gamma_{ji} R_{ji}(t), \quad (1.5.7)$$

где $\gamma_{ji} = \gamma_{ji}(y) = (\Gamma_n y)^{(i)}(t_j)$ ($i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}$), а U обозначает, как и выше, оператор умножения на $l(t) \in H_\mu$.

Для нас, очевидно, представляет интерес рассмотрение меры приближения, задаваемой выбором линейного оператора $\Gamma_n : C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow H_{n+\mu-1}$ и измеряемой величиной $\|y - \Gamma_n y\|_{C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}}$. Поэтому на основании соотношений (1.4.8), (1.5.7) и (1.4.6) без ограничения общности естественно считать, что $(\Gamma_n y)^{(i)}(t_j) = y^{(i)}(t_j)$ ($i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}, y \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$). Впрочем, для проекционных операторов Γ_n ($\Gamma_n^2 = \Gamma_n$) это свойство справедливо всегда.

Лемма 1.5.1. Следующие условия эквивалентны:

- (i) $\Gamma_n^2 = \Gamma_n$;
- (ii) $P_n^2 = P_n$.

Доказательство. (i) \Rightarrow (ii). Пусть, напротив, существует $\lambda(t) \in H_{n-1}$ такой, что $P_n \lambda \neq \lambda$. Далее, пусть $\rho(t) = (U \lambda)(t) \in H_{n+\mu-1}$. Тогда, в силу (1.5.7) и соотношений $\Gamma U v = v$, $(U v)^{(i)}(t_j) = 0$ ($v \in C, i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}$), имеем

$$\Gamma_n \rho = (UP_n \Gamma \rho)(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \rho^{(i)}(t_j) R_{ji}(t) = (UP_n \lambda)(t) \neq U \lambda = \rho,$$

т.е. $\Gamma_n^2 \neq \Gamma_n$. Импликация (ii) \Rightarrow (i) очевидна. Лемма доказана.

Лемма 1.5.2. Если Γ_n – проектор, то

$$\|\Gamma_n\|_{C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} \equiv \|\Gamma_n\| = \|P_n\| \equiv \|P_n\|_{C \rightarrow C}. \quad (1.5.8)$$

Доказательство. Пусть $y \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ – произвольный элемент. Используя соотношения (1.4.6), (1.5.7), леммы 1.4.5 и 1.5.1, последовательно находим

$$\begin{aligned} \|\Gamma_n y\|_{C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} &= \|\mathbb{T}\Gamma_n y\|_C + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \left| (\Gamma_n y)^{(i)}(t_j) \right| = \|P_n \mathbb{T}y\|_C + \sum_j \sum_i \left| y^{(i)}(t_j) \right| \leq \\ &\leq \|P_n\| \cdot \|\mathbb{T}y\|_C + \|P_n\| \cdot \sum_j \sum_i \left| y^{(i)}(t_j) \right| = \|P_n\| \cdot \|y\|_{C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|\Gamma_n\| \leq \|P_n\|. \quad (1.5.9)$$

Пусть, далее, $f \in C$ – произвольная функция. Тогда $f = \mathbb{T}g$, где $g = Uf \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$. С учетом равенств (1.4.6) и (1.5.7) имеем

$$\|P_n f\|_C = \|P_n \mathbb{T}g\|_C = \|\Gamma_n g\|_{C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} \leq \|\Gamma_n\| \cdot \|g\|_{C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} = \|\Gamma_n\| \cdot \|f\|_C,$$

т.е.

$$\|\Gamma_n\| \geq \|P_n\|. \quad (1.5.10)$$

Из условий (1.5.9) и (1.5.10) следует равенство (1.5.8). Лемма доказана.

Следующее утверждение устанавливает одно из аппроксимативных свойств полиномиального оператора Γ_n в пространстве $C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$.

Теорема 1.5.4. Если $\Gamma_n^2 = \Gamma_n$, то для любой функции $y \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ справедлива оценка

$$\|y - \Gamma_n y\|_{C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} \leq e_9 \|P_n\| E_{n-1}(\mathbb{T}y) \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (1.5.11)$$

Требуемая оценка (1.5.11) очевидным образом следует из теоремы 1.5.2 и леммы 1.5.2.

5.3. Рассмотрим задачу (в определенном смысле) обобщенной интерполяции. Ради простоты и краткости будем считать $p = 1$, $t_1 = 0$. Пусть $\varphi \in C\{m; 0\}$ и $\{v_j\}_1^n$ – произвольный набор попарно различных точек из $[-1, 1]$. Требуется построить полином $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}_{n+m-1}(t) \in \mathbb{H}_{n+m-1}$ такой, что

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}^{(i)}(0) &= \varphi^{\{i\}}(0) \quad (i = \overline{0, m-1}); \\ (T\mathcal{L})(v_j) &= (T\varphi)(v_j) \quad (j = \overline{1, n}), \end{aligned} \right\} \quad (1.5.12)$$

где $T : C\{m;0\} \rightarrow C$ – «характеристический» оператор класса $C\{m;0\}$.

Пусть искомым полином имеет стандартный вид:

$$\mathcal{L}(t) = \sum_{k=0}^{n+m-1} c_k t^k = \sum_{k=0}^{m-1} c_k t^k + t^m \cdot \sum_{i=0}^{n-1} c_{m+i} t^i. \quad (1.5.13)$$

Тогда в силу (1.5.12), с учетом (1.5.13) и (1.1.2), для определения коэффициентов c_k ($k = \overline{0, n+m-1}$) имеем систему

$$\left. \begin{aligned} c_i \cdot i! &= \varphi^{\{i\}}(0) \quad (i = \overline{0, m-1}); \\ \sum_{i=0}^{n-1} c_{m+i} v_j^i &= (T\varphi)(v_j) \quad (j = \overline{1, n}). \end{aligned} \right\} \quad (1.5.14)$$

Её матрица M является прямой суммой двух квадратных матриц порядков m и n соответственно. Следовательно, на основании известных фактов линейной алгебры получаем, что

$$\det M = \left(\prod_{k=0}^{m-1} k! \right) \cdot \left(\prod_{j>i} (v_j - v_i) \right) \neq 0.$$

Из только что сказанного следует

Теорема 1.5.5. Для любой функции $\varphi \in C\{m;0\}$ «обобщенный» интерполяционный полином $\mathcal{L} \in H_{n+m-1}$, обладающий свойством (1.5.12), существует и определяется единственным образом.

Явный вид полинома $\mathcal{L}(t)$ можно записать с привлечением фундаментальных полиномов Лагранжа. А именно, используя (1.5.13), (1.5.14), (1.1.2) и то обстоятельство, что $T\mathcal{L} \in H_{n-1}$, без труда находим

$$\mathcal{L}(t) = t^m \cdot \sum_{i=1}^n (T\varphi)(v_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{t - v_j}{v_i - v_j} + \sum_{k=0}^{m-1} \varphi^{\{k\}}(0) t^k / k!. \quad (1.5.15)$$

Замечание 1.5.1. При $m = 0$ имеем $C\{0;0\} \equiv C$, $T\varphi \equiv T^0\varphi \equiv \varphi$. Следовательно, задача (1.5.12) преобразуется в задачу интерполяции относительно интерполируемой $\varphi \in C$, а (1.5.15) превращается в обычный

интерполяционный полином Лагранжа (название задачи (1.5.12) вполне правомерное!).

Замечание 1.5.2. По изложенному ясно, что можно рассматривать более общую задачу обобщенной (в нашем смысле) интерполяции по произвольной системе $\{\varphi_i(t)\}$ Чебышева на $[-1,1]$.

Замечание 1.5.3. Предыдущими рассуждениями нетрудно решить задачу обобщенной интерполяции в общем (т.е. при произвольном фиксированном натуральном p) случае. Именно, для всякой функции $\varphi \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ “обобщенный” интерполяционный полином $\mathcal{L} \in H_{n+\mu-1}$, удовлетворяющий условиям

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}^{(i)}(t_j) &= \varphi^{\{i\}}(t_j) \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}); \\ (\mathcal{T}\mathcal{L})(v_j) &= (\mathcal{T}\varphi)(v_j) \quad (j = \overline{1, n}), \end{aligned} \right\} \quad (1.5.16)$$

существует и определяется однозначно, причем

$$\mathcal{L}(t) = \prod_{j=1}^p (t - t_j)^{m_j} \cdot \sum_{i=1}^n (\mathcal{T}\varphi)(v_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{t - v_j}{v_i - v_j} + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \varphi^{\{i\}}(t_j) R_{ji}(t). \quad (1.5.17)$$

5.4. В этом пункте обобщенная интерполяция будет интересовать нас как один из способов построения полинома, приближающего функцию из класса $C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$.

Обозначим через $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{n+\mu-1} : C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow H_{n+\mu-1}$ оператор, ставящий в соответствие всякой функции $\varphi \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ ее “обобщенный” интерполяционный полином $(\mathcal{L}\varphi)(t) = \mathcal{L}_{n+\mu-1}(\varphi; t) \in H_{n+\mu-1}$ по любой из систем узлов

$$v_j = v_j^{(n)} = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi \quad (j = \overline{1, n}); \quad (1.5.18)$$

$$v_j = \cos \frac{j\pi}{n+1} \quad (j = \overline{1, n}). \quad (1.5.19)$$

Тогда в силу (1.5.17) будем иметь

$$\mathcal{L}\varphi = \mathcal{L}_{n+\mu-1}(\varphi; t) = (UP \Gamma \varphi)(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \varphi^{(i)}(t_j) R_{ji}(t), \quad (1.5.20)$$

где $P = P_{n-1} : C \rightarrow H_{n-1}$ – оператор Лагранжа по соответствующей из систем узлов (1.5.18), (1.5.19). Очевидно, что оператор \mathcal{L} линеен.

Из соотношений (1.5.20), (1.5.7), лемм 1.5.1, 1.5.2 и соответствующих результатов из [29, с.107] очевидным образом вытекает следующая

Лемма 1.5.3. \mathcal{L} – оператор проекционный : $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}$; причем

$$\|\mathcal{L}\|_{C\{\bar{m};\bar{\tau}\} \rightarrow C\{\bar{m};\bar{\tau}\}} \leq \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{4n}{\pi}$$

в случае узлов (1.5.18) и

$$\|\mathcal{L}\|_{C\{\bar{m};\bar{\tau}\} \rightarrow C\{\bar{m};\bar{\tau}\}} \leq \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{4(n+1)}{\pi}$$

при выполнении (1.5.19).

Замечание 1.5.4. С учетом известной теоремы Лозинского – Харшиладзе (см., напр., [31, с. 180]) ясно, что

$$\|\mathcal{L}\|_{C\{\bar{m};\bar{\tau}\} \rightarrow C\{\bar{m};\bar{\tau}\}} \asymp \ln n \quad (n = 2, 3, \dots),$$

где символ \asymp означает слабую эквивалентность.

Следующее утверждение позволяет судить о скорости сходимости “обобщенных” интерполяционных полиномов к интерполируемой функции.

Теорема 1.5.6. Для всякой функции $\varphi \in C\{\bar{m};\bar{\tau}\}$ верна оценка

$$\|\varphi - \mathcal{L}\varphi\|_{C\{\bar{m};\bar{\tau}\}} \leq e_{10} E_{n-1}(\Gamma \varphi) \ln n \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (1.5.21)$$

Требуемая оценка (1.5.21) непосредственно следует из (1.5.20), (1.5.7), теоремы 1.5.4 и оценки $\|P\|_C$.

Следствие. Если $\varphi \in C\{\bar{m};\bar{\tau}\}$ такова, что функция $\Gamma \varphi$ на $[-1, 1]$ удовлетворяет условию Дини-Липшица, то последовательность “обобщенных” интерполяционных полиномов сходится к функции φ в метрике пространства $C\{\bar{m};\bar{\tau}\}$.

5.5. Используя рассуждения пунктов 5.2-5.4, можно построить и другие новые полиномиальные операторы. В дальнейшем на базе этих операторов и их аппроксимативных свойств будут предложены и обоснованы новые прямые методы решения интегральных уравнений третьего рода.

Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{n+\mu-1} : C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow H_{n+\mu-1}$ – линейный оператор, относящий ко всякой функции $\varphi \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ алгебраический полином $\mathcal{P}\varphi = \mathcal{P}_{n+\mu-1}(\varphi; t) \in H_{n+\mu-1}$, удовлетворяющий требованиям

$$\left. \begin{aligned} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} (T \mathcal{P}\varphi)(t) dt &= \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} (T \varphi)(t) dt \quad (j = \overline{1, n}); \\ (\mathcal{P}\varphi)^{(i)}(t_j) &= \varphi^{(i)}(t_j) \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}), \end{aligned} \right\} \quad (1.5.22)$$

где $\{\tau_j\}_0^n$ – система узлов Чебышева второго рода, обогащенная концами промежутка $[-1, 1]$:

$$\tau_j = \tau_j^{(n)} = \cos \frac{j\pi}{n} \quad (j = \overline{0, n}). \quad (1.5.23)$$

На основании рассуждений, приведенных в пп. 5.3, 5.4, несложно показать, что

$$\mathcal{P}\varphi = \mathcal{P}_{n+\mu-1}(\varphi; t) = \prod_{j=1}^p (t - t_j)^{m_j} \cdot (P T \varphi)(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \varphi^{(i)}(t_j) R_{ji}(t), \quad (1.5.24)$$

где $P = P_{n-1} : C \rightarrow H_{n-1}$ – оператор метода подобластей (см., напр., [43]) по системе узлов (1.5.23).

Далее, введем в рассмотрение линейный оператор $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_{n+\mu-1} : C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow H_{n+\mu-1}$, ставящий в соответствие любой функции $\varphi \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ полином $\mathfrak{Z}\varphi \in H_{n+\mu-1}$, обладающий свойствами

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 \rho(t) (T \mathfrak{Z}\varphi - T \varphi)(t) T_j(t) dt &= 0 \quad (j = \overline{0, n-1}); \\ (\mathfrak{Z}\varphi - \varphi)^{(i)}(t_j) &= 0 \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}), \end{aligned} \right\} \quad (1.5.25)$$

где $\{T_j(t)\}$ – полная ортонормированная на $[-1,1]$ по весу $\rho(t) = (1-t^2)^{-1/2}$ система полиномов Чебышева первого рода. Так же, как и выше, нетрудно видеть, что полином $\mathfrak{Z}\varphi$ имеет вид (1.5.24), где $P: C \rightarrow H_{n-1}$ является оператором Фурье (см., напр., [31]) по системе $\{T_j\}$.

Теорема 1.5.7. Пусть Π – любой из операторов Φ и \mathfrak{Z} . Тогда справедливы следующие факты:

$$(i) \Pi^2 = \Pi;$$

$$(ii) \|\Pi\|_{C\{\overline{m};\overline{\tau}\} \rightarrow C\{\overline{m};\overline{\tau}\}} \asymp \ln n \quad (n = 2, 3, \dots);$$

$$(iii) \|\varphi - \Pi\varphi\|_{C\{\overline{m};\overline{\tau}\}} = O[E_{n-1}(T\varphi) \cdot \ln n] \quad (\varphi \in C\{\overline{m};\overline{\tau}\}).$$

Доказательство непосредственно следует из (1.5.24), лемм 1.5.1, 1.5.2, теоремы 1.5.4 и соответствующих свойств оператора P .

Обозначим через $F = F_{2n+m-1}: C\{m;0\} \rightarrow H_{2n+m-1}$ линейный оператор, сопоставляющий всякой функции $\varphi \in C\{m;0\}$ полином $F\varphi \in H_{2n+m-1}$, определяемый условиями

$$\left. \begin{aligned} (T F\varphi - T\varphi)(v_j) &= 0 \quad (j = \overline{1, n}); \\ (d(T F\varphi)/dt)(v_j) &= 0 \quad (j = \overline{1, n}); \\ (F\varphi - \varphi)^{\{i\}}(0) &= 0 \quad (i = \overline{0, m-1}), \end{aligned} \right\}$$

где $\{v_j\}_1^n$ – система узлов (1.5.18).

Несложно усмотреть, что

$$F\varphi = F_{2n+m-1}(\varphi; t) = t^m (\Phi T\varphi)(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \varphi^{\{i\}}(0) t^i / i!, \quad (1.5.26)$$

где $\Phi = \Phi_{2n-1}: C \rightarrow H_{2n-1}$ – оператор Эрмита – Фейера [91] по системе узлов $\{v_j\}_1^n$.

Имеет место следующая

Теорема 1.5.8. Пусть $\varphi \in C\{m;0\}$, причем $T\varphi \in Lip \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$). Тогда справедлива оценка

$$\|\varphi - \mathbb{F}\varphi\|_{C\{m;0\}} \leq e_{11} n^{-\alpha/2}.$$

Доказательство очевидным образом вытекает из соотношений (1.1.2), (1.5.26), (1.1.1) и оценки (см. [45])

$$\|f - \Phi f\|_C \leq e_{11} n^{-\alpha/2} (f \in Lip \alpha, \alpha \in (0,1]).$$

Замечание 1.5.5. Вполне естественно, что оператор типа \mathbb{F} можно определить в пространстве $C\{\overline{m};\overline{\tau}\}$. Здесь и в дальнейшем (в зависимости от ситуации) частный случай $C\{m;0\}$ пространства $C\{\overline{m};\overline{\tau}\}$ привлекаем лишь для упрощения изложения.

В заключение этого пункта рассмотрим еще один полиномиальный оператор. А именно, через $C = C_{2n+m} : C\{m;0\} \rightarrow H_{2n+m}$ обозначим линейное отображение, при котором образ $C\varphi \in H_{2n+m}$ каждого элемента $\varphi \in C\{m;0\}$ характеризуется свойствами

$$\left. \begin{aligned} (T C \varphi)(v_j) &= (T \varphi)(v_j) \quad (j = \overline{1, n+1}); \\ \int_{v_j}^{v_{j+1}} (T C \varphi)(t) dt &= \int_{v_j}^{v_{j+1}} (T \varphi)(t) dt \quad (j = \overline{1, n}); \\ (C \varphi)^{(i)}(0) &= \varphi^{(i)}(0) \quad (i = \overline{0, m-1}), \end{aligned} \right\}$$

где $v_j = v_j^{(n)} \in [-1,1]$ – узлы Чебышева первого рода вида (1.5.18). В этом случае справедлива следующая

Теорема 1.5.9. Для всякой функции $\varphi \in C\{m;0\}$ верна оценка

$$\|\varphi - C\varphi\|_{C\{m;0\}} \leq e_{12} n^2 E_{n-1}(T\varphi).$$

Доказательство. Пусть $W = W_{2n} : C \rightarrow H_{2n}$ – линейный оператор, ставящий в соответствие любой функции $f \in C$ алгебраический полином $Wf \in H_{2n}$, однозначно определенный условиями

$$(Wf - f)(v_j) = 0 \quad (j = \overline{1, n+1}),$$

$$\int_{v_j}^{v_{j+1}} (Wf - f)(t) dt = 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Если функция $\chi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, а $U\chi \in H_{2n+1}$ – ее интерполяционный полином Эрмита (см., напр., [44]) по системе узлов $\{v_j\}$, т.е.

$$(U\chi)(t) = \sum_{i=1}^{n+1} [\chi(v_i)B_i(t) + \chi'(v_i)D_i(t)], \quad (1.5.27)$$

где $B_i(t) = B_i^{(n)}(t)$ и $D_i(t) = D_i^{(n)}(t)$ – основные функции эрмитовой интерполяции, то [45]

$$(Wf)(t) = (U\chi)'(t). \quad (1.5.28)$$

Очевидно, что w – проектор: $w^2 = w$.

Далее, используя (1.5.28) и неравенство Маркова [31], имеем

$$\|Wf\|_C \leq (2n+1)^2 \|U\chi\|_C. \quad (1.5.29)$$

В случае узлов Чебышева первого рода известно [44], что

$$\sum_{i=1}^{n+1} |B_i(t)| = 1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} |D_i(t)| \leq \frac{1}{n+1} \left[8 + \frac{4}{\pi} \ln(n+1) \right] < 1 \quad (1.5.30)$$

$$(n \geq 10, t \in [-1, 1]).$$

Из соотношений (1.5.29), (1.5.27) и (1.5.30) непосредственно выводится оценка

$$\|W\|_C \leq e_{13} n^2 \quad (n \geq 10). \quad (1.5.31)$$

Теперь рассуждения п. 5.4 позволяют завершить доказательство.

5.6. В настоящем пункте остановимся на вопросах о приближении элементов основного пространства $C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ с использованием сплайнов.

Зададим на $[-1, 1]$ произвольную сетку узлов Δ_n : $-1 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ ($n \geq 2$), удовлетворяющую естественному условию

$$v_n = \|\Delta_n\| \equiv \max_{0 \leq i \leq n-1} \sigma_i \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad \sigma_i = s_{i+1} - s_i \quad (i = \overline{0, n-1}),$$

и на этой сетке рассмотрим систему фундаментальных сплайнов первого порядка (см., напр., [35])

$$\begin{aligned} \psi_0(t) = \psi_0^{(n)}(t) &= \begin{cases} (s_1 - t) / \sigma_0 & (s_0 \leq t \leq s_1); \\ 0 & (t \geq s_1), \end{cases} \\ \psi_i(t) = \psi_i^{(n)}(t) &= \begin{cases} 0 & (t \leq s_{i-1}); \\ (t - s_{i-1}) / \sigma_{i-1} & (s_{i-1} \leq t \leq s_i); \\ (s_{i+1} - t) / \sigma_i & (s_i \leq t \leq s_{i+1}); \\ 0 & (t \geq s_{i+1}); \end{cases} \quad (i = \overline{1, n-1}), \\ \psi_n(t) = \psi_n^{(n)}(t) &= \begin{cases} 0 & (t \leq s_{n-1}); \\ (t - s_{n-1}) / \sigma_{n-1} & (s_{n-1} \leq t \leq s_n). \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{n+\mu-1} : C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow \Pi_n^{\mu+1} \equiv \text{span} \{U \psi_i\}_0^n \oplus H_{\mu-1}$ обозначает линейный оператор, ставящий в соответствие любой функции $\varphi \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ “обобщенный сплайн” $\mathcal{Y}\varphi$ $(\mu + 1)$ -го порядка, определяемый условиями

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{T} \mathcal{Y}\varphi)(s_i) &= (\mathcal{T} \varphi)(s_i) \quad (i = \overline{0, n}), \\ (\mathcal{Y}\varphi)^{\{i\}}(t_j) &= \varphi^{\{i\}}(t_j) \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}). \end{aligned} \right\}$$

Рассуждая так же, как и в пп. 5.3, 5.4, несложно получить правило воздействия оператора \mathcal{Y} . А именно, элемент $\mathcal{Y}\varphi$ имеет вид (1.5.24), где $P = P_{n+1} : C \rightarrow S_n^1 = \text{span} \{\psi_i\}_0^n$ означает оператор, который всякой непрерывной функции $f \in C$ ставит в соответствие ее интерполяционный полигон (сплайн первого порядка)

$$Pf = P_{n+1}(f; t) = \sum_{i=0}^n f(s_i) \psi_i(t).$$

Имеет место следующий факт.

Теорема 1.5.10. \mathcal{Y} – проектор, причем

$$\|\varphi - \mathcal{Y}\varphi\|_{C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} \leq w(\mathcal{T} \varphi; v_n), \quad \varphi \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}.$$

Доказательство данного утверждения легко следует из соотношений $P^2 = P$, (1.4.8), (1.5.24), (1.4.6) и оценки [4]

$$\|f - Pf\|_C \leq w(f; v_n) \quad (f \in C). \quad (1.5.32)$$

Далее, пусть $\Gamma = \Gamma_{n+\mu+1} : C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow \Pi_n^{\mu+1}$ — линейный оператор, заданный по закону

$$\Gamma \varphi = \Gamma_{n+\mu-1}(\varphi; t) \equiv (UP \ T \varphi)(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \varphi^{(i)}(t_j) R_{ji}(t), \quad (1.5.33)$$

где оператор $P = P_{n+1} : C \rightarrow S_n^1$ любой непрерывной функции $f \in C$ сопоставляет ее “усредненный” интерполяционный сплайн

$$Pf = P_{n+1}(f; t) = \sum_{i=0}^n F_i(f) \psi_i(t),$$

где

$$F_i(f) = \sigma_{i-1}^{-1} \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(t) dt \quad (j = \overline{1, n}),$$

$F_0(f) = F_n(f)$ в периодическом случае, а в общем случае $F_0(f) = F_1(f)$.

Справедлива следующая

Теорема 1.5.11. *Оператор Γ обладает свойствами:*

- (i) $\|\Gamma\|_{C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} = \|\Gamma\|_{C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} = 1;$
- (ii) $\|\varphi - \Gamma \varphi\|_{C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} \leq 2w(T\varphi; v_n) \quad (\varphi \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}).$

Доказательство следует из формул (1.4.8), (1.5.33), (1.4.6) и соответствующих соотношений [1, 2]

$$\begin{aligned} \|P\|_C &= \|P\|_{C \rightarrow C} = 1, \\ \|f - Pf\|_C &\leq 2w(f; v_n) \quad (f \in C). \end{aligned} \quad (1.5.34)$$

Пусть сетка Δ_n дополнительно удовлетворяет условию

$$v_n / \min_{0 \leq i \leq n-1} \sigma_i \leq b_0 \quad (n \geq 2), \quad b_0 = \text{const} > 0.$$

Рассмотрим сплайн второго порядка $z_n(t) = \sum_{i=-1}^n c_i \mathcal{B}_{2,i}(t) \quad (c_i \in \mathbb{R}),$

удовлетворяющий одному из следующих граничных условий:

- (\aleph_1) $z_n(-1) = z_n(1), \quad z_n'(-1) = z_n'(1)$ (периодические условия);
- (\aleph_2) $z_n''(t-0) = z_n''(t+0), \quad t = s_1, s_{n-1}.$

Функции $\mathcal{B}_{2,i}(t)$ суть \mathcal{B} - сплайны (см., напр., [56, с.19,20]) второго порядка на сетке Δ_n с носителем (s_{i-1}, s_{i+2}) ($s_{-2} < s_{-1} < s_0, s_n < s_{n+1} < s_{n+2}$). Обозначим через S_n^2 совокупность всех параболических сплайнов $z_n(t)$ на сетке Δ_n , обладающих одним из свойств $(\mathcal{N}_1), (\mathcal{N}_2)$.

Построим линейный оператор $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{n+\mu+2} : C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow \Pi_n^{2+\mu} \equiv U(S_n^2) \oplus H_{\mu-1}$ по правилу вида (1.5.33), где $P = P_{n+2} : C \rightarrow S_n^2$ - оператор [1], который всякой непрерывной функции $f \in C$ ставит в соответствие сплайн $Pf = P_{n+2}(f; t) \in S_n^2$ такой, что выполняются соотношения:

$$\int_{s_j}^{s_{j+1}} (Pf)(t) dt = \int_{s_j}^{s_{j+1}} f(t) dt \quad (j = \overline{0, n-1}).$$

Имеет место следующая

Теорема 1.5.12. (i) $\mathcal{N}^2 = \mathcal{N}$;

(ii) Для любой функции $\varphi \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ верна оценка

$$\|\varphi - \mathcal{N}\varphi\|_{C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} \leq e_{14} w(T\varphi; v_n), \quad e_{14} = e_{14}(b_0).$$

Доказательство идентично доказательству теоремы 1.5.10, если учесть то, что $P^2 = P$ и [1]

$$\|f - Pf\|_C \leq e_{14} w(f; v_n) \quad (f \in C). \quad (1.5.35)$$

5.7. Обозначим через

$$\begin{aligned} X_n &= H_{n+2\mu-1}^{\delta, F.P.} = H_{n-1} \oplus \text{span} \left\{ \delta^{\{i\}}(t - t_j) \mid i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p} \right\} \oplus \\ &\oplus \text{span} \left\{ F.P.(t - t_j)^{-i-1} \mid i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p} \right\} \equiv \\ &\equiv \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i t^i + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \left[w_{ji} \delta^{\{i\}}(t - t_j) + \alpha_{ji} F.P.(t - t_j)^{-i-1} \right] \mid n \in \mathbb{N}, \gamma_i, w_{ji}, \alpha_{ji} \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$(n + 2\mu)$ - мерное подпространство пространства $P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$. Его элементы будем называть “обобщенными полиномами”.

Полнота системы “обобщенных полиномов” в $P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ выражается в следующем утверждении.

Теорема 1.5.13 (аналог теоремы Вейерштрасса). Для любого элемента $x \in P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ и для всякого $\varepsilon > 0$ существует “обобщенный полином” $Q(t)$ такой, что

$$\|x - Q\|_{P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} < \varepsilon.$$

Доказательство очевидным образом следует из классической теоремы Вейерштрасса с учетом метрики пространства $P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$.

Согласно формуле (1.4.11) введем величину

$$E_{n+2\mu-1}^{\delta, F, P.}(x) \equiv \inf_{x_n \in X_n} \|x - x_n\|_{P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} (x \in P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}), \quad (1.5.36)$$

называемую наилучшим приближением обобщенной функции $x \in P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ элементами из $H_{n+2\mu-1}^{\delta, F, P.}$. Наилучшее приближение (1.5.36) в метрике пространства $P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ просто выражается через наилучшее равномерное приближение, а именно, верна следующая

Теорема 1.5.14. Для любого $x \in P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ справедливо равенство

$$E_{n+2\mu-1}^{\delta, F, P.}(x) = E_{n-1}(T U x).$$

Доказательство. Пусть $f \in P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ – произвольный элемент вида (1.4.10). Поскольку $\ker T = H_{\mu-1}$ и $T U g = g$ ($g \in C$), имеем $T U f = g$. Тогда, используя схему доказательства теоремы 1.5.2, последовательно находим

$$E_{n+2\mu-1}^{\delta, F, P.}(f) \equiv \inf_{x_n \in X_n} \|f - x_n\|_{P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} = \|f - h_n\|_{P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} = \|g - g_{n-1}\|_C = E_{n-1}(T U f),$$

где

$$h_n(t) = g_{n-1}(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} [w_{ji} \delta^{\{i\}}(t - t_j) + \alpha_{ji} (t - t_j)^{-i-1}] \in X_n,$$

а $g_{n-1}(t) \in H_{n-1}$ – полином наилучшего равномерного приближения функции $g \in C$. Утверждение доказано.

Через $D\{\overline{m};\overline{\tau}\}$ и $V\{\overline{m};\overline{\tau}\}$ обозначим подпространства пространства $P\{\overline{m};\overline{\tau}\}$, состоящие из обобщенных функций вида (1.4.10) при $\alpha_{ji} = 0$ и $w_{ji} = 0$ соответственно ($i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}$). Условимся также в следующих обозначениях:

$$Y_n = H_{n+\mu-1}^\delta = H_{n-1} \oplus \text{span} \left\{ \delta^{\{i\}}(t - t_j) \mid i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p} \right\},$$

$$Z_n = H_{n+\mu-1}^{F.P.} = H_{n-1} \oplus \text{span} \left\{ F.P.(t - t_j)^{-i-1} \mid i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p} \right\}.$$

Следствие. *Имеют место соотношения*

$$E_{n+\mu-1}^\delta(x) \equiv \inf_{y_n \in Y_n} \|x - y_n\|_{D\{\overline{m};\overline{\tau}\}} = E_{n-1}(TUx) \quad (x \in D\{\overline{m};\overline{\tau}\}),$$

$$E_{n+\mu-1}^{F.P.}(x) \equiv \inf_{z_n \in Z_n} \|x - z_n\|_{V\{\overline{m};\overline{\tau}\}} = E_{n-1}(TUx) \quad (x \in V\{\overline{m};\overline{\tau}\}).$$

Теорема 1.5.15. *При любом $N \in \mathbb{N}$ ($N > 2\mu$) верно соотношение*

$$d_N(L, P\{\overline{m};\overline{\tau}\}) = d_{N-2\mu}(TU(L), C).$$

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1.5.3, существенно используя при этом теорему 1.5.14.

Следствие 1. *Справедлива слабая эквивалентность*

$$d_N\left(P_\tau^{\{\overline{m}\}}H_w^r, P\{\overline{m};\overline{\tau}\}\right) \asymp N^{-r}w(1/N) \quad (N > 2\mu + r, r + 1 \in \mathbb{N}),$$

где $P_\tau^{\{\overline{m}\}}H_w^r \equiv \{f \in P\{\overline{m};\overline{\tau}\} \mid TUf \in H_w^r\}$.

Данное утверждение непосредственно вытекает из теоремы 1.5.15 с учетом оценки (см., напр., [31])

$$d_n(H_w^r, C) \asymp n^{-r}w(1/n) \quad (n > r).$$

Следствие 2. *При всяком натуральном N ($N > \mu$)*

$$d_N(L, D\{\overline{m};\overline{\tau}\}) = d_{N-\mu}(TU(L), C),$$

и, в частности,

$$d_N\left(D_\tau^{\{\overline{m}\}}H_w^r, D\{\overline{m};\overline{\tau}\}\right) \asymp N^{-r}w(1/N) \quad (N > \mu + r, r = 0, 1, 2, \dots).$$

Замечание 1.5.6. Утверждения следствия 2 справедливы и в случае пространства $V\{\overline{m};\overline{\tau}\}$.

ГЛАВА II

ТЕОРИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ТРЕТЬЕГО РОДА В ПРОСТРАНСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§1. Введение

В настоящей главе пособия рассматривается следующее линейное интегральное уравнение:

$$Ax \equiv v(t)x(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t) \quad (a \leq t \leq b) \quad (2.1.1)$$

уравнение Фредгольма третьего рода (УТР) с коэффициентом $v(t)$, имеющим нули степенного порядка.

Известно (см., напр., [51]), что оператор A третьего рода с непрерывным ядром $K(t,s)$ не является нормально разрешимым, если рассматривать его в пространстве $C=C[a,b]$. Однако, при некоторых дополнительных предположениях относительно ядра K интегрального оператора A последний оказывается нормально разрешимым, если рассматривать его как оператор, действующий из C в более узкое пространство. Идея такой «нормализации» оператора развивалась в работах [33, 46, 58, 59, 60] в применении к уравнению типа свертки первого рода, к «особым» случаям уравнений Винера-Хопфа, сингулярных интегральных уравнений. Ниже сходный метод используется для уравнения (2.1.1), причем с привлечением обобщенных функций. Именно, оператор A рассматривается действующим из пространства обобщенных функций, являющегося конечномерным расширением пространства C , в пространство непрерывных на $[a, b]$ функций, обладающих некоторыми свойствами «гладкости» точечного характера в нулях $v(t)$. Достаточно подробно изученные в первой главе свойства основных пространств позволяют построить полную теорию разрешимости УТР (2.1.1). А именно, устанавливается нетеровость оператора A , подсчитывается его индекс,

выводятся необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородного уравнения $Ax=y$ в виде требований ортогональности правой части $y(t)$ к решениям союзного однородного уравнения, указывается простой метод отыскания точного решения уравнения (2.1.1) в различных пространствах обобщенных функций. На этой основе формулируются достаточные условия непрерывной обратимости интегрального оператора A третьего рода.

Замечание 2.1.1. Одна из наших основных задач – исследование УТР с коэффициентом, обладающим нулями степенного порядка. В связи с этим, следуя [42], напомним определение нуля степенного порядка: точка $t_0 \in (a, b)$ называется нулем порядка $n \in \mathbb{N}$ функции $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, если существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow t_0} [f(t)/(t - t_0)^n]$, отличный от нуля. Следовательно, это определение можно приспособить к случаю нецелых порядков нулей в концевых точках, а именно: если существует конечный ненулевой предел $\lim_{t \rightarrow a+} [f(t)/(t - a)^q]$ (соответственно $\lim_{t \rightarrow b-} [f(t)/(b - t)^q]$), то точку $t = a$ (соответственно $t = b$) назовем нулем порядка $q \in \mathbb{R}^+$ функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Таким образом, внутри $[a, b]$ нули могут быть только целого порядка, а на концах – нули любого порядка. Сопоставляя данные определения с (1.1.2), (1.4.8) и (1.6.3), легко убедиться в том, что $f \in C[a, b]$ имеет внутри $[a, b]$ конечное множество нулей t_j соответствующих порядков $m_j \in \mathbb{N} (j = \overline{1, p})$ (соответственно, нули соответствующих порядков p_1 и $p_2 \in \mathbb{R}^+$ только на концах этого промежутка) тогда и только тогда, когда

$$f(t) = F(t) \prod_{j=1}^p (t - t_j)^{m_j}, F \in C[a, b], F(t) \neq 0, t \in [a, b]$$

(соответственно, $f(t) = (t - a)^{p_1} (b - t)^{p_2} g(t), g \in C, g(t) \neq 0, t \in [a, b]$).

Следовательно, УТР с коэффициентом, имеющим на $[a, b]$ конечное число нулей степенного порядка, представляется в виде

$$Ax \equiv x(t)(t - a)^{p_1} (b - t)^{p_2} \cdot \prod_{j=1}^p (t - t_j)^{m_j} + \int_a^b K(t, s)x(s)ds = y(t)(a \leq t \leq b).$$

(2.1.2)

Ради удобства в понимании основных рассуждений и с целью упразднения весьма громоздких выкладок при изложении достаточно исследовать УТР видов

$$Ax \equiv x(t) \prod_{j=1}^p (t - t_j)^{m_j} + \int_{-1}^1 K(t, s)x(s)ds = y(t) (-1 \leq t \leq 1), \quad (2.1.3)$$

$$Bf \equiv t^{p_1} (1 - t)^{p_2} f(t) + \int_0^1 K(t, s)f(s)ds = \varphi(t) (0 \leq t \leq 1), \quad (2.1.4)$$

где $t_j \in (-1, 1)$, $m_j \in \mathbb{N}$ ($j = \overline{1, p}$), $p_i \in \mathbb{R}^+$ ($i = \overline{1, 2}$); K, y, φ — известные непрерывные функции, удовлетворяющие определенным условиям «гладкости» точечного характера в нулях коэффициента, а x и f — искомые функции. Кстати сказать, что в приложениях (см., напр., [8, 9, 10, 39, 63]) УТР чаще всего встречаются именно в видах (2.1.3) или (2.1.4). Все результаты для (2.1.3) и (2.1.4) на общий случай (2.1.2) переносятся без труда и без каких-либо принципиальных изменений.

§2. Исследование разрешимости уравнений

третьего рода с коэффициентом, имеющим нули

степенного порядка внутри промежутка интегрирования

В этом параграфе рассматривается УТР (2.1.3). Решение отыскивается в классах непрерывных и обобщенных функций. Даются необходимые и достаточные условия разрешимости исследуемого уравнения. При этом существенно используются нётеровость оператора умножения и полная непрерывность регулярного интегрального оператора.

2.1. Предварительно рассмотрим уравнение с оператором умножения

на функцию $l(t) = \prod_{j=1}^p (t - t_j)^{m_j}$:

$$Ux \equiv l(t)x(t) = y(t) (t \in [-1, 1], y \in C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}) . \quad (2.2.1)$$

В целях упразднения громоздких выкладок в изложении будем пользоваться другой (также естественной) нормой $\|\varphi\|_{C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}} \equiv \sum_{j=1}^p \|\varphi\|_{C\{m_j, t_j\}}$, по которой $C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ полно и нормально вложено в C . Покажем, что оператор $U \equiv l(t) \cdot E$ действует из пространства $P\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ в $C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ ограниченно. Пусть

$$x(t) = z(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} [\omega_{ji} \delta^{(i)}(t-t_j) + \alpha_{ji} (t-t_j)^{-i-1}] \in P\{\overline{m}, \overline{\tau}\}.$$

Тогда, учитывая свойство

$$(l(t) \cdot \delta^{(i)}(t-t_j), \varphi(t)) = (-1)^i (l \cdot \varphi)^{(i)}(t_j) = 0$$

$$(i = \overline{0, m_j-1}, j = \overline{1, p}, \varphi \in C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}),$$

имеем

$$Ux = (Uz)(t) + \sum_j \sum_i \alpha_{ji} L_{ji}(t),$$

где

$$L_{ji}(t) = l(t) \cdot (t-t_j)^{-i-1} \in H_{\mu-i-1}, \mu = \sum_{j=1}^p m_j (i = \overline{0, m_j-1}, j = \overline{1, p}).$$

Следовательно, получим требуемое неравенство

$$\|Ux\|_{C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}} \leq e_{18} \|x\|_{P\{\overline{m}, \overline{\tau}\}},$$

где

$$e_{18} = \max \left\{ p \cdot 2^\mu, \max_{\substack{i=\overline{0, m_j-1} \\ j=\overline{1, p}}} \|L_{ji}\|_{C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}} \right\}.$$

Теперь найдем решения уравнения (2.2.1) и индекс оператора U в пространствах C , $P\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$, $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ и $V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$. В C уравнение (2.2.1) имеет единственное решение

$$x(t) = y(t) / l(t), \quad (2.2.2)$$

тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$(\delta^{(i)}(t-t_j), y(t)) = 0 \quad (i = \overline{0, m_j-1}, j = \overline{1, p}). \quad (2.2.3)$$

Действительно, при выполнении этих условий

$$x(t) = y(t) / l(t) = (Ty)(t) \in C.$$

Тогда с учетом леммы 1.4.7 получим, что $\dim \text{co ker } U = \mu$. Следовательно, в этом случае индекс $\varkappa(U) \equiv \dim \text{ker } U - \dim \text{co ker } U = -\mu$.

Общее решение однородного уравнения $Ux = 0$ в пространстве $P\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ имеет вид

$$x(t) = \sum_j \sum_i \omega_{ji} \delta^{(i)}(t - t_j), \quad (2.2.4)$$

где ω_{ji} — произвольные постоянные. Отсюда следует, что $\dim \text{ker } U = \mu$. В то же время в $P\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ неоднородное уравнение (2.2.1) разрешимо всегда и имеет решение

$$x(t) = \sum_j \sum_i \omega_{ji} \delta^{(i)}(t - t_j) + y(t)/l(t), \quad (2.2.5)$$

и $\varkappa(U) \equiv \alpha(U) - \beta(U) = \mu$.

В пространстве $D\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ общее решение однородного уравнения имеет вид (2.2.4), следовательно $\alpha(U) = \mu$. С другой стороны, неоднородное уравнение (2.2.1) в $D\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ разрешимо тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.2.3). При их выполнении решение уравнения (2.2.1) дается формулой (2.2.5). Это означает, что $\beta(U) = \mu$. Следовательно, в пространстве $D\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ $\varkappa(U) = 0$.

Наконец, в пространстве $V\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ уравнение (2.2.1) разрешимо всегда и имеет решение (2.2.2), причем $\varkappa(U) = 0$.

Из сказанного выше следует

Теорема 2.2.1. *Оператор $U \in \mathcal{Z}(P\{\bar{m}, \bar{\tau}\}, C\{\bar{m}, \bar{\tau}\})$ нётеров, причем*

$$(*) \quad \varkappa(U) = -\mu = -\sum_{j=1}^p m_j \text{ в пространстве } C = C[-1, 1];$$

$$(**) \quad \varkappa(U) = 0 \text{ в } D\{\bar{m}, \bar{\tau}\} \text{ и } V\{\bar{m}; \bar{\tau}\};$$

$$(***) \quad \varkappa(U) = \mu \text{ в пространстве } P\{\bar{m}, \bar{\tau}\}.$$

2.2. В этом пункте мы исследуем интегральный оператор

$$Kx \equiv \int_{-1}^1 K(t, s)x(s)ds \quad (-1 \leq t \leq 1),$$

ядро которого удовлетворяет условиям

$$K \in C_{\bar{\tau}}^{\{\bar{m}\}}([-1, 1]^2); K_t^{\{i\}}(t, s), K_s^{\{i\}}(t, t_j) \in C\{\bar{m}, \bar{\tau}\} \quad (2.2.6)$$

$$(i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}).$$

Имеет место следующая

Теорема 2.2.2. При выполнении условий (2.2.6) оператор K вполне непрерывен из $P\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ в $C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$.

Доказательство. Пусть

$$x(t) = z(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} [\omega_{ji} \delta^{\{i\}}(t - t_j) + \alpha_{ji} (t - t_j)^{-i-1}] \in P\{\bar{m}, \bar{\tau}\}.$$

Тогда

$$Kx = Kz + \sum_j \sum_i (-1)^i \omega_{ji} K_s^{\{i\}}(t, t_j) + \sum_j \sum_i \alpha_{ji} \int_{-1}^1 \frac{K(t, s) ds}{(s - t_j)^{i+1}}.$$

Принадлежность пространству $C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ первых двух слагаемых в правой части этого равенства очевидна. Интеграл в третьем слагаемом запишем в виде

$$\int_{-1}^1 \frac{K(t, s) ds}{(s - t_j)^{i+1}} = \int_{-1}^1 (T_s^{i+1} K)_j(t, s) ds + \sum_{k=0}^i (k!)^{-1} K_s^{\{k\}}(t, t_j) \int_{-1}^1 \frac{ds}{(s - t_j)^{i+1-k}}, \quad (2.2.7)$$

$$(i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}),$$

где

$$(T_s^{i+1} K)_j(t, s) \equiv \frac{K(t, s) - \sum_{k=0}^i K_s^{\{k\}}(t, t_j)(s - t_j)^k / k!}{(s - t_j)^{i+1}}.$$

В силу (2.2.6), (1.4.8) и (1.4.7) ядро K можно представить в виде

$$K(t, s) = l(t)l(s)H(t, s) + l(t) \cdot \sum_j \sum_i \tilde{\psi}_{ji}(t) R_{ji}(s) + \sum_j \sum_i \varphi_{ji}(s) R_{ji}(t), \quad (2.2.8)$$

где $H = T_t T_s K \in C([-1, 1]^2)$, $\tilde{\psi}_{ji} = T \psi_{ji} \in C$, $\psi_{ji}(t) = K_s^{\{i\}}(t, t_j)$, $\varphi_{ji}(s) \equiv K_t^{\{i\}}(t_j, s) \in C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$

$(i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p})$. Следовательно, с учетом (1.1.2) будем иметь

$$\begin{aligned} (T_s^{i+1} K)_j(t, s) &= l(t)(s - t_j)^{m_j - i - 1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p (s - t_k)^{m_k} \cdot H(t, s) + \\ &+ l(t) \cdot \sum_j \sum_i \tilde{\psi}_{ji}(t) (T_s^{i+1} R_{ji})_j(s) + \sum_j \sum_i (T_s^{i+1} \varphi_{ji})_j(s) \cdot R_{ji}(t), \end{aligned}$$

откуда на основании (1.4.8) следует, что

$$G_{ji}(t) \equiv \int_{-1}^1 (T_s^{i+1} K)_j(t, s) ds \in C\{\overline{m}, \overline{\tau}\} (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}).$$

Итак, в условиях (2.2.6) $Kx \in C\{\overline{m}, \overline{\tau}\} (x \in P\{\overline{m}, \overline{\tau}\})$.

Далее имеем

$$\begin{aligned} \|Kx\|_{C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}} &\leq \|Kz\|_{C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}} + \sum_j \sum_i |\omega_{ji}| \cdot \left\| \psi_{ji} \right\|_{C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}} + \\ &+ \sum_j \sum_i |\alpha_{ji}| \cdot \left\{ \left\| G_{ji} \right\|_{C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}} + \left\| \sum_{k=0}^i (k!)^{-1} \psi_{jk}(t) \cdot \int_{-1}^1 \frac{ds}{(s - t_j)^{i+1-k}} \right\|_{C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Введем следующее обозначение:

$$\begin{aligned} e_{19} &\equiv \max \left\{ \sum_{j=1}^p \left[\sup_{t \in \overline{-1, 1}} \int_{-1}^1 |(T_t^{m_j} K)(t, s)| ds + \sum_{i=0}^{m_j-1} \int_{-1}^1 |\varphi_{ji}(s)| ds \right], \max_{\substack{i=0, m_j-1 \\ j=1, p}} \left\| \psi_{ji} \right\|_{C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}}, \right. \\ &\left. \max_{i, j} \left[\left\| G_{ji} \right\|_{C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}} + \sum_{k=0}^i \left| \int_{-1}^1 \frac{ds}{(s - t_j)^{i+1-k}} \right| \cdot \left\| \psi_{ji} \right\|_{C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}} \right] \right\}, \end{aligned}$$

где T^{m_j} — «характеристический» оператор класса $C\{m_j; t_j\}$:

$$\begin{aligned} T^{m_j} \varphi &\equiv \frac{\varphi(t) - \sum_{i=0}^{m_j-1} \varphi^{(i)}(t_j) (t - t_j)^i / i!}{(t - t_j)^{m_j}} \in C \\ &(\varphi \in C\{m_j, t_j\}, j = \overline{1, p}). \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Тогда в силу определений норм $\|\bullet\|_{C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}}$, (1.1.1) и (1.4.11) из (2.2.9) следует,

что

$$\|Kx\|_{C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}} \leq e_{19} \|x\|_{P\{\overline{m}, \overline{\tau}\}}, \quad (2.2.11)$$

т.е. оператор K действует из $P\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ в $C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ ограниченно, причем

$$\|K\|_{P\{\overline{m}, \overline{\tau}\} \rightarrow C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}} \leq e_{19}.$$

Пусть, далее, $t_q \in \{t_1, t_2, \dots, t_p\}$ – произвольно фиксированная точка, фигурирующая в уравнении (2.1.3). Так как функции $(T_t^{m_q} K)(t, s)$, $(T^{m_q} \psi_{ji})(t)$ и $(T^{m_q} G_{ji})(t)$ ($i = \overline{0, m_j - 1}$, $j = \overline{1, p}$) в силу (2.2.10) равностепенно непрерывны на компактах $[-1, 1]^2$ и $[-1, 1]$ соответственно, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что одновременно выполняются соотношения

$$\left. \begin{aligned} & \left| (T_t^{m_q} K)(\tau_1, s_1) - (T_t^{m_q} K)(\tau_2, s_2) \right| < \varepsilon, \\ & \left| (T^{m_q} \psi_{ji})(\tau_1) - (T^{m_q} \psi_{ji})(\tau_2) \right| < \varepsilon, \\ & \left| (T^{m_q} G_{ji})(\tau_1) - (T^{m_q} G_{ji})(\tau_2) \right| < \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (2.2.12)$$

$$(i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}),$$

как только $|\tau_1 - \tau_2| < \delta, |s_1 - s_2| < \delta$ ($\tau_i, s_i \in [-1, 1], i = \overline{1, 2}$).

Пусть теперь $M = \{x(t)\} \subset P\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ – некоторое ограниченное множество:

$$\|x\|_{P\{\overline{m}, \overline{\tau}\}} \leq r \quad (\forall x \in M).$$

Тогда из неравенства (2.2.11) следует, что множество $K(M) \subset C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ также ограничено, а именно, если $y(t) \in K(M)$, то

$$\|y\|_{C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}} \leq e_{19} r.$$

Покажем, что для множества $K(M)$ выполняется и условие (ii) теоремы 1.2.2. Действительно, пусть $y(t) \in K(M)$, т.е. $y(t) = (Kx)(t)$ ($x \in M$). С учетом (2.2.12) имеем

$$\begin{aligned} & \left| (T^{m_q} y)(\tau_1) - (T^{m_q} y)(\tau_2) \right| = \left| \int_{-1}^1 [(T_t^{m_q} K)(\tau_1, s) - (T_t^{m_q} K)(\tau_2, s)] z(s) ds + \right. \\ & + \sum_j \sum_i (-1)^i \omega_{ji} [(T^{m_q} \psi_{ji})(\tau_1) - (T^{m_q} \psi_{ji})(\tau_2)] + \sum_j \sum_i \alpha_{ji} \{[(T^{m_q} G_{ji})(\tau_1) - \\ & - (T^{m_q} G_{ji})(\tau_2)] + \sum_{k=0}^i (k!)^{-1} \left(\int_{-1}^1 \frac{ds}{(s - t_j)^{i+1-k}} \right) \cdot [(T^{m_q} \psi_{jk})(\tau_1) - \\ & - (T^{m_q} \psi_{jk})(\tau_2)] \} \Big| \leq 2 \cdot \varepsilon \cdot \|z\|_C + \varepsilon \cdot \sum_j \sum_i |\omega_{ji}| + \\ & + \varepsilon(1 + \gamma) \cdot \sum_j \sum_i |\alpha_{ji}| \leq \varepsilon \cdot \xi \cdot \|x\|_{P\{\overline{m}, \overline{\tau}\}} \leq \varepsilon \cdot \xi \cdot r, \end{aligned}$$

$$\xi = \max \{2, 1 + \gamma\}, \quad \gamma = \max_{i,j} \sum_{k=0}^i \left| \int_{-1}^1 \frac{ds}{(s - t_j)^{i+1-k}} \right|,$$

как только $|\tau_1 - \tau_2| < \delta$ ($\tau_1, \tau_2 \in [-1, 1]$).

Таким образом, для множества $K(M) \subset C\{\bar{m}, \bar{\tau}\} \in C\{m_q; t_q\}$ выполнены все условия теоремы 1.2.2. Следовательно, $K(M)$ относительно компактно в пространстве $C\{m_q; t_q\}$. В силу произвольности индекса $m_q \in \bar{m} = \{m_1, m_2, \dots, m_p\}$, оно одновременно относительно компактно в каждом из пространств $C\{m_j; t_j\}$ ($j = \overline{1, p}$), откуда, в свою очередь, вытекает относительная компактность множества $K(M)$ в пространстве $C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ с нормой $\|\cdot\|_{C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}} \equiv \sum_{j=1}^p \|\cdot\|_{C\{m_j; t_j\}}$. Значит, оператор $K \in Z(P\{\bar{m}, \bar{\tau}\}, C\{\bar{m}, \bar{\tau}\})$, переводящий любое ограниченное множество в относительно компактное, вполне непрерывен.

Теорема полностью доказана.

Замечание 2.2.1. В теореме 1.2.2 взяв вместо пространства $C\{m, 0\}$ и оператора T соответственно $C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ и T , получим, очевидно, обобщенный вариант критерия компактности. С его помощью, следуя только что изложенному, легко установить полную непрерывность оператора $K : P\{\bar{m}, \bar{\tau}\} \rightarrow C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ относительно норм (1.4.11) и (1.4.6).

2.3. Рассмотрим теперь оператор $A : C \rightarrow C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$, определенный равенством (2.1.3), при условиях (2.2.6). Линейные расширения оператора A на пространства $D\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$, $V\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ и $P\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ обозначим соответственно через \bar{A} , \hat{A} и \tilde{A} . Справедлива следующая

Теорема 2.2.3. В условиях (2.2.6) операторы $A : C \rightarrow C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$, $\bar{A} : D\{\bar{m}, \bar{\tau}\} \rightarrow C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$, $\hat{A} : V\{\bar{m}, \bar{\tau}\} \rightarrow C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ и $\tilde{A} : P\{\bar{m}, \bar{\tau}\} \rightarrow C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ нетеревы с индексами:

$$\aleph(A) = -\mu, \quad \aleph(\bar{A}) = \aleph(\hat{A}) = 0, \quad \aleph(\tilde{A}) = \mu = \sum_{j=1}^p m_j.$$

В самом деле, в силу результатов п. 2.1 и теоремы 2.2.2 утверждение этой теоремы следует из того известного факта (см., напр., [51], §10,

теорема 1), что возмущение нетерова оператора вполне непрерывным сохраняет нетеровость и не меняет его индекса.

Замечание 2.2.2. Выше для исследования нетеровости УТР (2.1.3) мы рассматривали интегральный оператор A третьего рода как результат возмущения оператора U интегральным оператором K . Можно указать и другой путь исследования оператора A , о котором вкратце говорится ниже.

Рассмотрим вновь оператор T , определенный на пространстве $C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ по формуле (1.4.7). Легко усмотреть, что $T : C\{\bar{m}, \bar{\tau}\} \rightarrow C$ нетеров. Действительно, неоднородное уравнение $T\varphi = g$ разрешимо для всех $g \in C$, и его решение имеет вид

$$\varphi(t) = (I \cdot g)(t) + \sum_j \sum_i c_{ji} R_{ji}(t),$$

где c_{ji} — произвольные постоянные. Следовательно, область значений оператора T замкнута, $\alpha(T) \equiv \dim \ker T = \mu$, $\beta(T) \equiv \dim \text{co ker } T = 0$, $\varkappa(T) \equiv \alpha(T) - \beta(T) = \mu$. Далее, оператор T является левым регуляризатором оператора A . В самом деле, применив оператор T к уравнению $Ax = y$ слева, получим

$$x(t) + \int_{-1}^1 (T, K)(t, s)x(s)ds = (Ty)(t). \quad (2.2.13)$$

Так как $T, K \in C([-1, 1]^2)$, $Ty \in C$, то уравнение (2.2.13) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода в пространстве C .

Замечание 2.2.3. Применяя теперь к операторам A , T и TA теорему 3.9 из [51] и учитывая нетеровость операторов T и TA , снова заключаем, что A — оператор Нетера с индексом $\varkappa(A) = \varkappa(TA) - \varkappa(T) = -\mu$. Далее, в силу того, что операторы \bar{A} , \hat{A} и \tilde{A} действуют в одно и то же пространство $C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$, можно использовать теорему о конечномерном расширении оператора Нетера (см., напр., [51], теорема 5.9), из которой и следует утверждение теоремы 2.2.3 относительно операторов \bar{A} , \hat{A} и \tilde{A} .

2.4. Наряду с оператором A , определенным равенством (2.1.3), рассмотрим оператор A' , задаваемый следующей формулой:

$$A' \psi \equiv l(t)\psi(t) + \int_{-1}^1 K(s,t)\psi(s)ds \quad (\psi \in P\{\bar{m}, \bar{\tau}\}).$$

Считаем, что ядро k удовлетворяет требованиям (2.2.6). По доказанному выше $A' : P\{\bar{m}, \bar{\tau}\} \rightarrow C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ — оператор Нетера с индексом $\varkappa(A') = \mu$. Кроме того, для операторов A и A' верна

Лемма 2.2.1. Операторы $A : C \rightarrow C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ и $A' : P\{\bar{m}, \bar{\tau}\} \rightarrow C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ удовлетворяют соотношению

$$\int_{-1}^1 \psi(t)(Ax)(t)dt = \int_{-1}^1 x(t)(A'\psi)(t)dt \quad (2.2.14)$$

$$(\forall x \in C, \forall \psi \in P\{\bar{m}, \bar{\tau}\}),$$

т.е. они являются союзными.

Для доказательства достаточно представить $\psi(t)$ по формуле (1.4.10) и с учетом леммы 1.4.1 сравнить левую и правую части равенства (2.2.14).

Так как A и A' — нетеровы операторы и $\varkappa(A) = -\varkappa(A')$, то на основании леммы 1.4.2 заключаем, что справедлива следующая

Теорема 2.2.4. Уравнение $Ax = y$ разрешимо в пространстве C тогда и только тогда, когда

$$\int_{-1}^1 y(t) \cdot \psi_k(t)dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \alpha(A')), \quad (2.2.15)$$

где $\{\psi_k\}$ — базис пространства решений уравнения $A'\psi = 0$ ($\psi \in P\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$).

Далее, через \bar{A}' , \hat{A}' и \tilde{A}' обозначим линейные сужения оператора A' на пространства $D\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$, $V\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ и C соответственно. Как было замечено выше (см. теорему 2.2.3 и лемму 2.2.1), в условиях (2.2.6) операторы $\bar{A}' : D\{\bar{m}, \bar{\tau}\} \rightarrow C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$, $\hat{A}' : V\{\bar{m}, \bar{\tau}\} \rightarrow C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ и $\tilde{A}' : C \rightarrow C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ нетеровы с индексами: $\varkappa(\bar{A}') = \varkappa(\hat{A}') = 0$, $\varkappa(\tilde{A}') = -\mu$, причем имеют место соотношения

$$(\psi, \bar{A}x) = (\bar{A}'\psi, x) \quad (\psi, x \in D\{\bar{m}, \bar{\tau}\}),$$

$$(\psi, \hat{A}x) = (\hat{A}'\psi, x) \quad (\psi, x \in V\{\bar{m}, \bar{\tau}\}),$$

$$(\psi, \tilde{A}x) = (\tilde{A}'\psi, x) \quad (\psi \in C, x \in P\{\bar{m}, \bar{\tau}\}),$$

т.е. операторы \bar{A}' , \hat{A}' и \tilde{A}' являются союзными с операторами \bar{A} , \hat{A} и \tilde{A} соответственно. Тогда с помощью рассуждений, аналогичных использованным при доказательстве теоремы 2.2.4, доказывается

Теорема 2.2.5. Для разрешимости уравнений $\bar{A}x = y$, $\hat{A}x = y$ и $\tilde{A}x = y$ в пространствах соответственно $D\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$, $V\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ и $P\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия вида (2.2.15), где $\{\psi_k\}$ – базис пространства решений уравнений $\bar{A}'\psi = 0$, $\hat{A}'\psi = 0$ и $\tilde{A}'\psi = 0$ соответственно.

Определим на пространстве $C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ оператор T' равенством

$$T'\chi \equiv \chi(t)/l(t) + \sum_j \sum_i (-1)^{i+1} \delta^{(i)}(t - t_j) \times \int_{-1}^1 R_{ji}(t)[l(t)]^{-1} \cdot \chi(t) dt \quad (\chi \in C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}).$$

Очевидно, что $T': C\{\bar{m}, \bar{\tau}\} \rightarrow P\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ и его левым обратным является оператор $l(t) \cdot E$, где E – единичный оператор в пространстве $C\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$.

Имеет место следующая легко доказываемая

Лемма 2.2.2. Справедливы следующие утверждения:

1) Операторы $T: C\{\bar{m}, \bar{\tau}\} \rightarrow C$ и $T': C\{\bar{m}, \bar{\tau}\} \rightarrow P\{\bar{m}, \bar{\tau}\}$ являются союзными в смысле (2.2.14);

2) T' является оператором Нетера, причем $\kappa(T') = -\mu$.

Действительно, первое из утверждений проверяется непосредственно по определению союзных операторов, второе же доказывается так же, как и в случае $p = 1, m_1 = 1$ (см. [51], с. 63).

Замечание 2.2.4. Доказательство теоремы 2.2.4 можно осуществить и путем привлечения операторов T и T' . А именно, с учетом леммы 2.2.2 утверждение теоремы 2.2.4 легко доказать, пользуясь известной схемой (см. [51], доказательство теоремы 2.16). Мы на этом останавливаться не будем по причине громоздкости получаемых при этом выражений.

§3. Непрерывная обратимость интегрального оператора третьего рода

В дальнейшем при обосновании приближенных методов для УТР (2.1.2) существенную роль играет непрерывная обратимость оператора A . В связи с этим в данном параграфе установлены достаточные условия существования обратного к A ограниченного оператора A^{-1} и указан метод отыскания точного решения уравнения (2.1.2) в различных пространствах обобщенных функций. При этом всюду использованы определения и обозначения предыдущего §2 и §4 главы I.

3.1. Пусть дано УТР

$$Ax \equiv l(t)x(t) + \int_{-1}^1 K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad (2.3.1)$$

где $l(t) = \prod_{j=1}^p (t - t_j)^{m_j}$, $t \in [-1, 1]$, $t_j \in (-1, 1)$, $m_j \in \mathbb{N}$ ($j = \overline{1, p}$); K — известная

непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$K \in C_{\tau}^{\{\overline{m}\}}([-1, 1]^2), \psi_{ji}(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t, t_j) \in C\{\overline{m}, \overline{\tau}\} \quad (2.3.2)$$

$$(i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p});$$

известная правая часть $y(t)$ принадлежит классу $C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$, а $x(t)$ — искомая функция.

Решение уравнения (2.3.1) будем искать в пространстве $D\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ обобщенных функций. Преобразуем УТР (2.3.1), положив

$$x(t) = z(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \omega_{ji} \delta^{\{i\}}(t - t_j) \in D\{\overline{m}, \overline{\tau}\}.$$

Имеем

$$l(t)z(t) + \int_{-1}^1 K(t,s)z(s)ds = y(t) - \sum_j \sum_i c_{ji} \psi_{ji}(t), \quad (2.3.3)$$

где $z \in C = C[-1, 1]$, $c_{ji} = (-1)^i \omega_{ji}$ ($i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}$). Наша задача состоит в нахождении функции $z(t)$ и произвольных постоянных c_{ji} .

Нам понадобится следующая

Лемма 2.3.1. Если $K \in C_t^{(\overline{m})}([-1, 1]^2)$, $y \in C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$, то УТР (2.3.1)

эквивалентно интегральному уравнению Фредгольма второго рода в пространстве C :

$$x(t) + \int_{-1}^1 (T_t K)(t, s)x(s)ds = (Ty)(t), \quad (2.3.4)$$

где оператор $T : C\{\overline{m}, \overline{\tau}\} \rightarrow C$ определен равенством (1.4.7), и соотношениям

$$\int_{-1}^1 K_t^{(i)}(t_j, s)x(s)ds = y^{(i)}(t_j) \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}). \quad (2.3.5)$$

Доказательство. В силу (1.4.8) очевидно, что для любой функции $\varphi \in C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ имеет место правило

$$\varphi = 0 \Leftrightarrow T\varphi = 0, \quad \varphi^{(i)}(t_j) = 0 \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}). \quad (2.3.6)$$

Теперь в (2.3.6) взяв в качестве $\varphi \in C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ функцию $\psi(t) = (Ax)(t) - y(t) \in C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$, убеждаемся в справедливости утверждения леммы.

Из леммы 2.3.1 следует, что уравнение (2.3.3) эквивалентно уравнению Фредгольма второго рода

$$z(t) + \int_{-1}^1 (T_t K)(t, s)z(s)ds = (Ty)(t) - \sum_j \sum_i c_{ji} (T\psi_{ji})(t) \quad (2.3.7)$$

с непрерывными ядром и правой частью, и соотношениям

$$y^{(k)}(t_e) - \int_{-1}^1 K_t^{(k)}(t_e, s)z(s)ds - \sum_j \sum_i c_{ji} \psi_{ji}^{(k)}(t_e) = 0 \quad (2.3.8)$$

$$(k = \overline{0, m_e - 1}, e = \overline{1, p}).$$

Пусть $\lambda = -1$ не является собственным значением ядра $(T_t K)(t, s)$ и R — его разрешающий оператор. Тогда

$$z(t) = (RTy)(t) - \sum_j \sum_i c_{ji} (RT\psi_{ji})(t)$$

есть единственное решение уравнения (2.3.7), которое будет решением и исходного уравнения (2.3.3), если, в силу (2.3.8), постоянные c_{ji} удовлетворяют алгебраической системе

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{ji} (\mathbf{P} \psi_{ji})^{(k)}(t_e) = (\mathbf{P} y)^{(k)}(t_e) \quad (k = \overline{0, m_e - 1}, e = \overline{1, p}), \quad (2.3.9)$$

где

$$\mathbf{P} \equiv E - KR \Gamma, \quad (Kx)(t) \equiv \int_{-1}^1 K(t, s)x(s)ds,$$

а E – единичный оператор в пространстве $C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 2.3.1. Пусть выполнены условия:

(i) ядро K интегрального оператора в уравнении (2.3.1) удовлетворяет требованиям (2.3.2), правая часть $y \in C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$;

(ii) число $\lambda = -1$ не является собственным значением ядра $(\Gamma, K)(t, s)$;

(iii) определитель системы (2.3.9) отличен от нуля.

Тогда уравнение (2.3.1) допускает единственное обобщенное решение $x^* \in D\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$, и оно дается формулой

$$x^*(t) = (R \Gamma y)(t) - \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{ji}^* (R \Gamma \psi_{ji})(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} (-1)^i c_{ji}^* \delta^{(i)}(t - t_j), \quad (2.3.10)$$

где $\{c_{ji}^*\} (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p})$ – единственное решение алгебраической системы (2.3.9).

Следствие. В условиях теоремы 2.3.1 интегральный оператор $A : D\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$, определенный равенством (2.3.1), непрерывно обратим.

Действительно, в силу полноты нормированных пространств $D\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ и $C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$, утверждение теоремы 2.3.1 составляет содержание «большой» теоремы Банаха об обратном операторе.

В дальнейшем при оптимизации проекционных методов решения УТР вида (2.3.1) полезную роль будет играть следующий пример, иллюстрирующий содержание теоремы 2.3.1.

Пример 2.3.1. Рассмотрим уравнение вида (2.3.1) при специальном ядре

$$K(t, s) = K^*(t, s) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} R_{ji}(t) R_{ji}(s).$$

В обозначениях теоремы 2.3.1 последовательно находим

$$T_r K = 0 \Rightarrow R = E : C \rightarrow C \Rightarrow \mathbf{P}y = y - KTy \ (y \in C \{\overline{m}, \overline{\tau}\});$$

$$\psi_{ji}(t) = K_s^{*i}(t, t_j) = \sum_{e=1}^p \sum_{k=0}^{m_e-1} R_{ek}^{i}(t_j) R_{ek}(t) \in H_{\mu-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T \psi_{ji} = 0 \Rightarrow \mathbf{P} \psi_{ji} = \psi_{ji} \ (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}).$$

Следовательно, система (2.3.9) приобретает вид

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{ji} \psi_{ji}^{(k)}(t_e) = (y - KTy)^{\{k\}}(t_e) \ (k = \overline{0, m_e - 1}, e = \overline{1, p}). \quad (2.3.11)$$

Поскольку

$$\psi_{ji}^{(k)}(t_e) = R_{ek}^{(i)}(t_j) = \begin{cases} 0 & (e \neq j); \\ \delta_{ik} & (e = j), \end{cases}$$

где δ_{ik} - символ Кронекера, то (2.3.11) перепишется следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{m_e-1} c_{ei} \delta_{ik} = (y - KTy)^{\{k\}}(t_e) \ (k = \overline{0, m_e - 1}, e = \overline{1, p}),$$

откуда

$$c_{ek}^* = (y - KTy)^{\{k\}}(t_e) \ (k = \overline{0, m_e - 1}, e = \overline{1, p}).$$

Тогда в силу (2.3.10) имеем

$$x^*(t) = (Ty)(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} (-1)^i (y - KTy)^{\{i\}}(t_j) \delta^{\{i\}}(t - t_j). \quad (2.3.12)$$

Непосредственная подстановка элемента x^* в (2.3.1) показывает истинность приведенных рассуждений.

Таким образом, УТР вида (2.3.1) при $K = K^*$ обладает единственным обобщенным решением (2.3.12) для любой правой части $y \in C \{\overline{m}, \overline{\tau}\}$.

3.2. Вновь рассмотрим УТР вида (2.3.1), где ядро K интегрального оператора K удовлетворяет условиям (2.2.6), правая часть $y(t)$ из класса $C \{\overline{m}, \overline{\tau}\}$, а $x(t)$ - искомая функция. Обобщенное решение нашего уравнения будем искать в пространстве $V \{\overline{m}, \overline{\tau}\}$, т.е. в виде

$$x(t) = z(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \alpha_{ji} F.P.(t - t_j)^{-i-1}, \quad (2.3.13)$$

где $z \in C$ — неизвестная функция, α_{ji} ($i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}$) — неизвестные постоянные.

Подставляя (2.3.13) в (2.3.1), получим следующее УТР относительно $z(t)$:

$$(Az)(t) = y(t) - \sum_j \sum_i \alpha_{ji} \cdot Q_{ji}(t),$$

где

$$Q_{ji}(t) = (t - t_j)^{-i-1} \prod_{k=1}^p (t - t_k)^{m_k} + \int_{-1}^1 \frac{K(t, s) ds}{(s - t_j)^{i+1}} \in C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$$

$$(i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}).$$

Далее, с привлечением леммы 2.3.1 проводим такие же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 2.3.1. В итоге получаем утверждение:

Теорема 2.3.2. Пусть выполнены следующие условия:

(i) ядро k в УТР (2.3.1) удовлетворяет условиям (2.2.6) и $y \in C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$;

(ii) число $\lambda = -1$ не является собственным значением ядра T_k ;

(iii) определитель алгебраической системы

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \alpha_{ji} (\mathbf{P} Q_{ji})^{(k)}(t_e) = (\mathbf{P} y)^{(k)}(t_e) \quad (k = \overline{0, m_e - 1}, e = \overline{1, p}) \quad (2.3.14)$$

относительно неизвестных $\{\alpha_{ji}\}$ отличен от нуля.

Тогда уравнение (2.3.1) при любой правой части $y \in C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ имеет единственное решение x^* в пространстве $V\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$, которое определяется равенством

$$x^*(t) = (RTy)(t) - \sum_j \sum_i \alpha_{ji}^* (RTQ_{ji})(t) + \sum_j \sum_i \alpha_{ji}^* (t - t_j)^{-i-1}, \quad (2.3.15)$$

где $\{\alpha_{ji}^*\}$ — единственное решение системы (2.3.14).

Следствие. При выполнении условий теоремы 2.3.2 оператор третьего рода $A : V\{\overline{m}, \overline{\tau}\} \rightarrow C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ непрерывно обратим.

Приведем теперь простой пример, иллюстрирующий изложенную выше схему.

Пример 2.3.2. Пусть дано уравнение

$$t^2 x(t) + \int_{-1}^1 (t^2 s^2 + t)x(s)ds = \frac{3}{5}t + 1. \quad (2.3.16)$$

Его решение будем искать в пространстве $v\{2;0\}$, т.е. в виде

$$x(t) = z(t) + \alpha_0 V.P. \frac{1}{t} + \alpha_1 F.P. \frac{1}{t^2}.$$

Последовательно находим

$$T_t K = (T_t^2 K)(t, s) = s^2, (Ty)(t) = (T^2 y)(t) = 0,$$

$$Q_1(t) = t + 2t^2 + t \cdot F.P. \int_{-1}^1 \frac{ds}{s^2} = 2t^2 - 2t + 1,$$

$$Q_0(t) = t + t^2 \cdot \int_{-1}^1 s ds + t \cdot V.P. \int_{-1}^1 \frac{ds}{s} = t,$$

$$(TQ_1)(t) = 2, (TQ_0)(t) = 0.$$

Тогда уравнение типа (2.3.7) принимает следующую форму:

$$z(t) + \int_{-1}^1 s^2 z(s)ds = -2\alpha_1,$$

откуда, очевидно, следует $R = \frac{3}{5} \cdot E$, где E — единичный оператор в C .

Следовательно, имеем

$$(RTy)(t) = 0, (RTQ_0)(t) = 0, (RTQ_1)(t) = \frac{6}{5},$$

$$(Py)(t) = \frac{3}{5}t + 1, (PQ_0)(t) = t, (PQ_1)(t) = \frac{6}{5}t^2 - \frac{22}{5}t + 1.$$

Система (2.3.14) относительно α_0 и α_1 приобретает вид

$$\begin{cases} \alpha_0 - \alpha_1 \cdot 22/5 = 3/5; \\ \alpha_1 = 1, \end{cases}$$

откуда $\alpha_0^* = 5$ и $\alpha_1^* = 1$. В силу (2.3.15) единственным решением УТР (2.3.16) в пространстве $v\{2;0\}$ является

$$x^*(t) = -\frac{6}{5} + 5V.P. \frac{1}{t} + F.P. \frac{1}{t^2}.$$

Замечание 2.3.1. Результаты, полученные в этой главе, имея самостоятельный интерес, существенно применяются в дальнейших исследованиях по приближенному решению УТР в различных пространствах обобщенных функций.

ГЛАВА III

КЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА В КЛАССАХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Из изложенной в главе II теории следует, что УТР точно решаются лишь в редких частных случаях. Поэтому для уравнений такого типа необходимо разработать приближенные методы их решения. В данной главе в этих целях для уравнений видов (2.1.2) приводятся вычислительные схемы на основе известных прямых проекционных методов и предлагается их теоретическое обоснование в смысле, указанном во введении. При этом существенно используются: теория аппроксимации в пространствах основных и обобщенных функций и вариант общей теории приближенных методов функционального анализа, предложенный Б.Г. Габдулхаевым [29].

§1. Постановка задачи и вспомогательные результаты

Прежде чем перейти к исследованию приближенных методов решения УТР, приведем ряд определений и вспомогательных результатов по задаче приближенного решения линейных операторных уравнений.

1.1. Пусть X и Y – произвольные линейные нормированные пространства, а $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ – произвольные последовательности их конечномерных подпространств: $X_n \subset X$, $Y_n \subset Y$ ($n \in N$).

Рассмотрим два операторных уравнения: точное –

$$Ax = y \quad (x \in X, y \in Y) \quad (3.1.1)$$

и соответствующее ему приближенное –

$$A_n x_n = y_n \quad (x_n \in X_n, y_n \in Y_n), \quad (3.1.2)$$

где $A : X \rightarrow Y$ и $A_n : X_n \rightarrow Y_n$ – линейные операторы. Здесь пространства X и X_n , Y и Y_n , операторы A и A_n связаны между собой определенными условиями близости. Последнее позволяет за приближенное решение

точного уравнения (3.1.1) принять точное решение приближенного уравнения (3.1.2).

Имеет место следующая [29]

Лемма 3.1.1. Пусть выполнены условия:

- 1) оператор $A : X \rightarrow Y$ непрерывно обратим;
- 2) $\varepsilon^{(n)} \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$);
- 3) $\dim X_n = \dim Y_n < \infty$ ($n = 1, 2, \dots$).

Тогда при всех n , удовлетворяющих неравенству

$$q_n \equiv \|A^{-1}\| \cdot \|A - A_n\| < 1, \quad A - A_n : X_n \rightarrow Y,$$

приближенное уравнение (3.1.2) имеет единственное решение $x_n^* \in X_n$ при любой правой части $y_n \in Y_n$, причем

$$\|x_n^*\| \leq \|A_n^{-1}\| \cdot \|y_n\|, \quad \|A_n^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot (1 - q_n)^{-1}. \quad (3.1.3)$$

Если, кроме того, выполнено условие

$$4) \nu^{(n)} \equiv \|y - y_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

то приближенные решения $x_n^* \in X_n$ сходятся к точному решению $x^* \in X$ по норме пространства X . При этом погрешность приближенного решения может быть оценена любым из неравенств

$$\begin{aligned} \|A\|^{-1} \alpha_n \leq \|x^* - x_n^*\| \leq \alpha_n \|A^{-1}\|, \quad \alpha_n \equiv \|(y - y_n) + (A_n - A)x_n^*\|, \\ \|x^* - x_n^*\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - q_n} [\|y - y_n\| + q_n \|y\|] = O(\varepsilon^{(n)} + \nu^{(n)}). \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Предположим теперь, что существует линейный оператор P_n , отображающий Y на Y_n : $P_n(Y) = Y_n$. Тогда справедлива следующая [29]

Лемма 3.1.2. Пусть уравнение (3.1.1) имеет решение $x^* \in X$ при данной правой части $y \in Y$ и оператор A_n имеет непрерывный обратный. Тогда погрешность приближенного решения $x_n^* \in X_n$ для правой части $y_n = P_n y$ представляется в виде

$$\|x^* - x_n^*\| = \|(E - A_n^{-1} P_n A)(x^* - x_n) + A_n^{-1}(A_n x_n - P_n A x_n)\|, \quad (3.1.5)$$

где E – единичный оператор в пространстве X , а $x_n \in X_n$ – произвольный элемент, который может быть выбран исходя из минимальности правой части равенства (3.1.5).

1.2. На практике приближенные уравнения (3.1.2), в силу неточности задания его элементов, решаются, вообще говоря, только приближенно. Например, уравнение (3.1.2) заменяется уравнением вида

$$D_n x_n = u_n (x_n \in X_n, u_n \in Y_n), \quad (3.1.6)$$

где $D_n : X_n \rightarrow Y_n$ – линейный оператор, причем A_n и D_n , а также y_n и u_n близки в определенном смысле. Следовательно, возникает необходимость исследования на устойчивость прямых методов решения уравнения (3.1.1).

Имеет место [29]

Лемма 3.1.3. Пусть операторы $A_n (n \geq n_0)$ непрерывно обратимы и обратные операторы ограничены по норме в совокупности (например, в условиях леммы 3.1.1), а уравнения (3.1.2) и (3.1.6) близки в том смысле, что

$$\|A_n - D_n\| \rightarrow 0, \quad \|y_n - u_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \quad (3.1.7)$$

Тогда прямой метод (3.1.2) для решения уравнения (3.1.1) устойчив относительно малых возмущений элементов приближающих уравнений.

Далее, рассмотрим уравнение (3.1.1), где линейный оператор A действует из нормированного пространства X в нормированное пространство Y , причем существует (ограниченный или неограниченный) обратный оператор A^{-1} . Величина $\eta = \eta(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ называется числом обусловленности оператора A и уравнения (3.1.1) (см., например, [29], с. 24); уравнение (3.1.1) называется хорошо обусловленным, если η – невелико, и плохо обусловленным – в противном случае.

Справедлива следующая [29]

Лемма 3.1.4. Пусть существует число обусловленности $\eta = \eta(A)$ для точного уравнения (3.1.1). Тогда в условиях леммы 3.1.1 хотя бы при

достаточно больших n существуют также числа обусловленности $\eta_n = \eta(A_n)$ для приближенного уравнения (3.1.2), причем

$$\eta_n \leq c \cdot \eta \quad (1 \leq c \leq 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0, n \geq n_0(\varepsilon)), \quad (3.1.8)$$

$$\lim_n \eta_n = \eta. \quad (3.1.9)$$

1.3. В этом пункте приведем постановку задачи оптимизации [29] прямых проекционных методов решения операторных уравнений.

Пусть X и Y – данные банаховы пространства, а X_n и Y_n – их произвольные конечномерные подпространства одинаковой размерности: $\dim X_n = \dim Y_n = N = N(n) < \infty (n \in \mathbb{N})$, причем $N \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$. Пусть $\mathbf{P}_n = \{P_n\}$ – некоторое множество операторов P_n , отображающих Y на Y_n . Рассмотрим два класса однозначно разрешимых линейных операторных уравнений вида

$$Ax = y \quad (x \in X, y \in Y), \quad (3.1.10)$$

и

$$P_n Ax_n = P_n y \quad (x_n \in X_n, P_n \in \mathbf{P}_n, n \in \mathbb{N}) \quad (3.1.11)$$

соответственно. Далее, пусть $x^* \in X$ и $x_n^* \in X_n$ – решения уравнений (3.1.10) и (3.1.11) соответственно, а $F = \{f\}$ обозначает класс исходных данных уравнений (3.1.10), порождающий класс $X^* = \{x^*\}$ искомых элементов.

Следуя [29, с. 40], величину

$$V_N(F) \equiv \inf_{X_n, Y_n} \inf_{P_n \in \mathbf{P}_n} V(F; P_n; X_n, Y_n) \quad (3.1.12)$$

где

$$V(F; P_n; X_n, Y_n) = \sup_{f \in F} V(f; P_n; X_n, Y_n) = \sup_{x^* \in X^*} \|x^* - x_n^*\|_X,$$

назовем оптимальной оценкой погрешности всевозможных проекционных методов ($P_n \in \mathbf{P}_n$) решения уравнения (3.1.10) на классе F .

Ниже будем использовать

Определение 3.1.1 ([6, 29]). Пусть существуют подпространства $X_n^0 \subset X, Y_n^0 \subset Y, \dim X_n^0 = \dim Y_n^0 = N(n) < \infty$, и операторы $P_n^0 : Y \rightarrow Y_n^0 (P_n^0 \in \mathbf{P}_n)$ такие, что выполняется условие

$$V_N(F) \succsim V(F; P_n^0; X_n^0, Y_n^0) (N \rightarrow \infty), \quad (3.1.13)$$

где символ \succsim , как обычно, означает слабую эквивалентность при $N \rightarrow \infty$. Тогда прямой проекционный метод (3.1.10), (3.1.11) при $P_n = P_n^0, X_n = X_n^0, Y_n = Y_n^0$ (кратко «метод P_n^0 ») называется оптимальным по порядку на классе F среди всевозможных проекционных методов $P_n (P_n \in \mathbf{P}_n)$ решения уравнений (3.1.10).

§2. Приближенное решение уравнений третьего рода в пространстве $D \{ \overline{m}; \overline{\tau} \}$

2.1. Метод коллокации. Пусть дано УТР (2.1.3). Для простоты выкладок будем считать $p=1, t_1 = 0$, т.е. рассмотрим уравнение вида

$$Ax \equiv t^m x(t) + \int_{-1}^1 K(t, s)x(s)ds = y(t) \quad (t \in [-1, 1]), \quad (3.2.1)$$

где m – произвольно фиксированное натуральное число; K и y – известные непрерывные функции, удовлетворяющие следующим требованиям:

$$\left. \begin{aligned} K \in C_0^{\{m\}}([-1, 1]^2), K_s^{\{i\}}(t, 0) \in C\{m; 0\} (i = \overline{1, m-1}) \\ \theta(t, s) = (T_i K)(t, s) \in C_s^{\{m\}}([-1, 1]^2); y \in C\{m; 0\}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.2)$$

а $x \in D\{m; 0\}$ – искомая обобщенная функция.

Приближенное решение уравнения (3.2.1) будем искать в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k + \sum_{k=0}^{m-1} c_{k+n} \delta^{\{k\}}(t) \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq m). \quad (3.2.3)$$

Неизвестные параметры $c_k = c_k^{(n)}$ ($k = \overline{0, n+m-1}$) будем определять по методу коллокации из системы линейных алгебраических уравнений (кратко: СЛАУ)

$$(Ax_n)(v_j) = y(v_j) \quad (j = \overline{1, n+m}),$$

или же

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k \left[v_j^{k+m} + \int_{-1}^1 K(v_j, s) s^k ds \right] + \sum_{k=0}^{m-1} c_{k+n} (-1)^k \cdot K_s^{\{k\}}(v_j, 0) = y(v_j) \quad (j = \overline{1, n+m}), \quad (3.2.4)$$

где $v_j = v_j^{(n)} \in [-1, 1]$ – узлы коллокации – узлы Чебышева:

$$v_j = \cos \frac{2j-1}{2(n+m)} \cdot \pi \quad (j = \overline{1, n+m}). \quad (3.2.5)$$

Пусть $P = P_{n+m-1} : C\{m; 0\} \rightarrow H_{n+m-1}$ – оператор Лагранжа по системе узлов (3.2.5). Тогда, с учетом (1.2.6), имеет место оценка

$$\|P\|_{C\{m; 0\}} = \|P\| \leq e_{21} n^{2m} \ln n. \quad (3.2.6)$$

Для вычислительной схемы (3.2.1) – (3.2.5) справедлива следующая

Теорема 3.2.1. Пусть выполнены следующие условия:

(i) уравнение (3.2.1) однозначно разрешимо в пространстве $D\{m; 0\}$ при любой правой части $y(t) \in C\{m; 0\}$;

(ii) функции $h(t, s) \equiv (T_s \theta)(t, s) = (T_s T_t K)(t, s)$ (по аргументу t), $g_i(t) = \theta_s^{\{i\}}(t, 0)$ ($i = \overline{0, m-1}$) и $(Ty)(t)$ непрерывно дифференцируемы $2m$ раз на отрезке $[-1, 1]$, причем производные $h_t^{(2m)}$ (по t равномерно относительно s), $g_i^{(2m)}$ и $(Ty)^{(2m)}$ принадлежат к классу Дини-Липшица.

Тогда при достаточно больших n система алгебраических уравнений (3.2.4) имеет единственное решение $\{c_k^*\}_0^{n+m-1}$. Кроме того, приближенные

решения $x_n^*(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k^* t^k + \sum_{k=0}^{m-1} c_{k+n}^* \delta^{\{k\}}(t)$ сходятся к точному решению

$x^*(t) \in D\{m;0\}$ по норме пространства $D\{m;0\}$. При этом погрешность приближенного решения может быть оценена неравенством

$$\|x^* - x_n^*\| = O \left\{ \left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{i=0}^{m-1} E_{n-1}(g_i) + E_{n-1}(Ty) \right] n^{2m} \ln n \right\}. \quad (3.2.7)$$

Доказательство. Интегральное уравнение (3.2.1) будем рассматривать как линейное операторное уравнение вида

$$Ax \equiv Ux + Kx = y (x \in X, y \in Y), \quad (3.2.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} X &= D\{m;0\}, Y = C\{m;0\}, (Ux)(t) \equiv t^m x(t), \\ (Kx)(t) &\equiv \int_{-1}^1 K(t,s)x(s)ds \quad (-1 \leq t \leq 1). \end{aligned} \right\} \quad (3.2.9)$$

Обозначим через $X_n = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k + \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{k+n} \delta^{\{k\}}(t) \right\}$, где $\alpha_k (k = 0, n+m-1)$ —

произвольные вещественные числа, $(n+m)$ -мерное подпространство пространства $X = D\{m;0\}$. За $(n+m)$ -мерное подпространство пространства $Y = C\{m;0\}$ примем $Y_n = H_{n+m-1}$. Ясно, что система уравнений (3.2.4) эквивалентна (см., например, [27]) линейному функциональному уравнению

$$A_n x_n \equiv P A x_n = U x_n + P K x_n = y_n (x_n \in X_n, y_n \in Y_n), \quad (3.2.10)$$

где $y_n = P y$.

В силу (3.2.8) – (3.2.10) и теоремы 1.5.2 для любого $x_n \in X_n$ имеем

$$\begin{aligned} \|A x_n - A_n x_n\|_Y &= \|K x_n - P K x_n\|_Y = \|K x_n - R_{n+m-1} + P R_{n+m-1} - P K x_n\|_Y \leq \\ &\leq (1 + \|P\|_{Y \rightarrow Y}) \cdot E_{n+m-1}^T(K x_n) = (1 + \|P\|) \cdot E_{n-1}(T K x_n), \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

где $R_{n+m-1}(t)$ — полином наилучшего приближения функции $(K x_n)(t) \in Y$, а $E_{n+m-1}^T(\phi)$ обозначает наилучшее приближение функции $\phi(t) \in C\{m;0\}$ полиномами из класса H_{n+m-1} .

Теперь с целью аппроксимации элемента $TKx_n \in C[-1,1]$ образуем функцию

$$\begin{aligned} (\Psi x_n)(t) \equiv \int_{-1}^1 \psi(t,s)x_n(s)ds &= \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{n-1} c_k s^k \psi(t,s)ds + \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} c_{k+n} (-1)^k \psi_s^{\{k\}}(t,0). \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Здесь $\psi(t,s)$ мы взяли из леммы 1.3.1, и по ее виду (1.3.4) ясно, что $(\Psi x_n)(t) \in H_{n-1}$.

Используя равенства (3.2.12), (1.4.3) и свойства (i) и (ii) функции $\psi(t,s)$, последовательно находим

$$\begin{aligned} E_{n-1}(TKx_n) &\leq \|TKx_n - \Psi x_n\|_C = \max_{-1 \leq t \leq 1} \left| \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{n-1} c_k s^k \cdot \theta(t,s)ds + \right. \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} c_{k+n} (-1)^k \theta_s^{\{k\}}(t,0) - \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{n-1} c_k s^k \psi(t,s)ds - \left. \sum_{k=0}^{m-1} c_{k+n} (-1)^k \psi_s^{\{k\}}(t,0) \right| \leq \\ &\leq 2 \cdot \max_{-1 \leq s \leq 1} \left| \sum_{k=0}^{n-1} c_k s^k \right| \cdot \max_{t,s \in [-1,1]} |\theta(t,s) - \psi(t,s)| + \sum_{k=0}^{m-1} |c_{k+n}| \times \max_{-1 \leq t \leq 1} |\theta_s^{\{k\}}(t,0) - \psi_s^{\{k\}}(t,0)| \leq \\ &\leq 2 \cdot (m-1)! \left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{i=0}^{m-1} E_{n-1}(g_i) \right] \times \left(\max_s \left| \sum_{k=0}^{n-1} c_k s^k \right| + \sum_{k=0}^{m-1} |c_{k+n}| \right) = \\ &= e_{22} \left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{i=0}^{m-1} E_{n-1}(g_i) \right] \cdot \|x_n\|_X. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Следовательно, из (3.2.11) и (3.2.13) получаем следующее неравенство:

$$\mathcal{E}^{(n)} \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \leq e_{22}(1 + \|P\|) \cdot \left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{i=0}^{m-1} E_{n-1}(g_i) \right]. \quad (3.2.14)$$

При этом имеет место оценка

$$\nu^{(n)} \equiv \|y - Py\|_Y \leq (1 + \|P\|) \cdot E_{n+m-1}^T(y) = (1 + \|P\|) \cdot E_{n-1}(Ty). \quad (3.2.15)$$

Тогда, в условиях теоремы, из соотношений (3.2.14), (3.2.15), (3.2.6) и теоремы Джексона (см., например, [31], с. 86) видно, что выполняются все условия леммы 3.1.1, из которой и следует теорема 3.2.1 с оценкой (3.2.7).

Теорема доказана.

С помощью леммы 3.1.2 легко получается следующая

Теорема 3.2.2. Пусть уравнение (3.2.1) имеет решение вида

$$x^*(t) = z^*(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \omega_i^* \delta^{(i)}(t) \in X = D\{m; 0\}$$

при данной правой части $y \in Y = C\{m; 0\}$ и оператор A_n имеет непрерывный обратный. Тогда погрешность приближенного решения $x_n^* \in X_n$ для правой части $y_n = Py \in Y_n$ представляется в виде

$$\begin{aligned} \|x^* - x_n^*\|_X &\leq (1 + \|A_n^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \|P\|) E_{n-1}(z^*) = \\ &= O[\|P\| \cdot E_{n-1}(z^*)] = O\{E_{n-1}(z^*) \cdot n^{2m} \cdot \ln n\}. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Доказательство. Поскольку $A_n = PA$, то в силу леммы 3.1.2 имеем

$$\|x^* - x_n^*\|_X = \|(E - A_n^{-1}PA)(x^* - x_n)\|_X, \quad (3.2.17)$$

где E – единичный оператор в пространстве $X = D\{m; 0\}$, а $x_n \in X_n$ – пока произвольный элемент. Выберем его исходя из минимальности правой части равенства (3.2.17). А именно, пусть $x_n \in X_n$ такой, что

$$\|x^* - x_n\|_X = \inf_{u_n \in X_n} \|x^* - u_n\|_X \equiv E_{n+m-1}^\delta(x^*). \quad (3.2.18)$$

Тогда из соотношений (3.2.17), (3.2.18), следствия из теоремы 1.5.14 и (3.2.6) следует требуемая оценка (3.2.16).

Следствие. Пусть в условиях теоремы 3.2.1 непрерывная компонента $z^*(t)$ решения $x^*(t) \in D\{m; 0\}$ уравнения (3.2.1) непрерывно дифференцируема $2m$ раз на отрезке $[-1, 1]$, причем производная $z^{*(2m)}$ принадлежит классу Дини--Липшица. Тогда приближенные решения x_n^* сходятся к точному решению x^* по норме пространства $D\{m; 0\}$.

Переходим теперь к рассмотрению общего (т.е. произвольного фиксированного натурального p) случая уравнений вида (2.1.3). Поскольку здесь по сравнению со случаем $p = 1$ не возникает принципиальных трудностей, на подробных выкладках, ввиду их громоздкости, останавливаться не будем. Укажем лишь основные результаты.

Итак, пусть дано УТР (2.1.3), где $K(t, s)$ и $y(t)$ – известные непрерывные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} K \in C_{\tau}^{\{\bar{m}\}}([-1, 1]^2), K_s^{\{k\}}(t, t_j) \in C\{\bar{m}; \bar{\tau}\} (k = 1, \bar{m}_j - 1, j = 1, p), \\ \theta_i(t, s) = (T_t^{m_i} K)_i(t, s) \in C_s^{\{\bar{m}\}}([-1, 1]^2) (i = 1, p); y \in C\{\bar{m}; \bar{\tau}\}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.19)$$

а $x(t) \in D\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ – искомая обобщенная функция.

Приближенное решение уравнения (2.1.3) ищем в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k + \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^{m_j-1} c_{k+n+M(j-1)} \delta^{\{k\}}(t - t_j), \quad (3.2.20)$$

где

$$M(q) \equiv \sum_{i=1}^q m_i \quad (q = 0, 1, \dots, p), \quad M(0) \equiv 0, \quad M(p) = \mu.$$

Неизвестные коэффициенты $c_k = c_k^{(n)}$ ($k = 0, n + \mu - 1$) определяем по методу коллокации из СЛАУ

$$(Ax_n - y)(v_j) = 0 \quad (j = 1, n + \mu), \quad (3.2.21)$$

где $v_j = v_j^{(n)} \in [-1, 1]$ – узлы Чебышева первого рода.

Далее, пусть $P = P_{n+\mu-1} : C\{\bar{m}; \bar{\tau}\} \rightarrow H_{n+\mu-1}$ – интерполяционный оператор Лагранжа по системе узлов $\{v_j\}$. Тогда, с учетом нормы

$\|\cdot\|_{C\{\bar{m}; \bar{\tau}\}} \equiv \sum_{j=1}^p \|\cdot\|_{C\{m_j; t_j\}}$, из (3.2.6) легко следует оценка

$$\|P\| = \|P\|_{C\{\bar{m}; \bar{\tau}\}} \leq e_{23} \cdot n^{2\tilde{m}} \cdot \ln n, \quad (3.2.22)$$

где $\tilde{m} = \max\{m_1, m_2, \dots, m_p\}$.

Для вычислительной схемы (3.2.20) – (3.2.21) имеет место следующая

Теорема 3.2.3. Пусть выполнены условия:

(i) уравнение (2.1.3) однозначно разрешимо в пространстве $D\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ при любой правой части $y(t) \in C\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$;

(ii) функции $h_i(t, s) \equiv (T_s \theta_i)(t, s)$ (по аргументу t), $a_{jk}^i(t) = (\theta_i)_s^{\{k\}}(t, t_j)$ ($k = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}$) и $(T^{m_i} y)(t)$ непрерывно дифференцируемы $2m_i$ раз ($i = \overline{1, p}$) на $[-1, 1]$, причем производные $(h_i)_t^{(2m_i)}$ (по t), $(a_{jk}^i)^{(2m_i)}$ и $(T^{m_i} y)^{(2m_i)}$ ($i = \overline{1, p}$) принадлежат классу Дини-Липшица.

Тогда при всех $n \geq n_0$ приближенные решения $x_n^*(t)$, определяемые из (3.2.20) и (3.2.21), существуют, единственны и сходятся к точному решению $x^*(t) \in D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ по норме пространства $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\| = O \left\{ \sum_{i=1}^p \left[E_{n-1}^t(h_i) + \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^{m_j-1} E_{n-1}(a_{jk}^i) + E_{n-1}(T^{m_i} y) \right] n^{2m_i} \cdot \ln n \right\} \quad (3.2.23)$$

Доказательство проводится по полной аналогии с доказательством теоремы 3.2.1 с привлечением лемм 1.3.1 и 1.4.6.

Далее, используя лемму 3.1.2 и следствие из теоремы 1.5.14, легко получается следующая

Теорема 3.2.4. Пусть уравнение (2.1.3) имеет решение

$$x^*(t) = z^*(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \omega_{ji}^* \delta^{\{i\}}(t - t_j) \in X = D\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \quad (3.2.24)$$

для правой части $y \in Y = C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ и оператор $A_n = PA$ непрерывно обратим.

Тогда погрешность приближенного решения

$$x_n^* \in X_n = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k + \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{k+n+M(j-1)} \delta^{\{k\}}(t - t_j) \right\} \quad \text{для правой части}$$

$y_n = Py \in Y_n = H_{n+\mu-1}$ представима в виде

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O \{ \|P\| \cdot E_{n-1}(z^*) \} = O \{ E_{n-1}(z^*) \cdot n^{2\overline{m}} \cdot \ln n \}. \quad (3.2.25)$$

Доказательство идентично доказательству теоремы 3.2.2.

Следствие. Пусть при выполнении условий теоремы 3.2.3 непрерывная компонента z^* решения $x^* \in D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ УТР (2.1.3) непрерывно дифференцируема $2\overline{m}$ раз на $[-1, 1]$, причем $z^{*(2\overline{m})}$ из класса Дини-Липшица.

Тогда приближенные решения x_n^* сходятся к точному решению x^* по норме пространства $D\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$.

2.2. Метод моментов. Приближенное решение задачи (2.1.3), (3.2.19) будем искать в виде линейной комбинации (3.2.20), коэффициенты которой будем определять по методу моментов из СЛАУ:

$$\int_{-1}^1 (Ax_n)(t) \chi_k(t) dt = \int_{-1}^1 y(t) \chi_k(t) dt \quad (k = 0, n + \mu - 1), \quad (3.2.26)$$

где $\{\chi_k(t)\}$ - полная ортонормированная на отрезке $[-1, 1]$ по весу $r(t) \equiv 1$ система полиномов Лежандра.

Обозначим через $S = S_{n+\mu-1} : C\{\bar{m}; \bar{\tau}\} \rightarrow H_{n+\mu-1}$ линейный оператор, относящий ко всякой функции $\phi \in C\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ ее $(n + \mu)$ -й отрезок ряда Фурье по системе $\{\chi_k(t)\}$. Тогда имеет место следующий факт.

Лемма 3.2.1. *Справедлива оценка*

$$\|S\| = \|S\|_{C\{\bar{m}; \bar{\tau}\}} \leq e_{24} \cdot n^{2\tilde{m}+1/2}. \quad (3.2.27)$$

Действительно, доказательство сразу следует из определения нормы $\|\cdot\|_{C\{\bar{m}; \bar{\tau}\}}$, леммы 1.2.3 и оценки [31]

$$\|S\|_C = \|S\|_{C \rightarrow C} \leq e_{25} \sqrt{n}. \quad (3.2.28)$$

Для вычислительной схемы (2.1.3), (3.2.20), (3.2.26) верна следующая

Теорема 3.2.5. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) уравнение (2.1.3) имеет единственное решение $x^* \in D\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ для любой правой части $y \in C\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$;

(ii) функции $h_i(t, s)$ (по аргументу t), $a_{jk}^i(t)$ ($k = 0, m_j - 1, j = 1, p$) и $(T^{m_i} y)(t) \in C^{(2m_i)}$ ($i = \overline{1, p}$), причем производные $(h_i)_t^{(2m_i)}$ (по t равномерно относительно s), $(a_{jk}^i)^{(2m_i)}$ и $(T^{m_i} y)^{(2m_i)} \in \text{Lip } \alpha$ ($1/2 < \alpha \leq 1; i = \overline{1, p}$), где

$$h_i \equiv T_s \theta_i, \quad a_{jk}^i(t) = (\theta_i)_s^{\{k\}}(t, t_j) \quad (k = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}),$$

$$\theta_i \equiv (T_t^{m_i} K)_i \in C_s^{\{\bar{m}\}}([-1, 1]^2) \quad (i = \overline{1, p}).$$

Тогда, начиная с некоторого номера n_1 , система (3.2.26) также имеет единственное решение $\{c_k^*\}$ и приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (3.2.20) при $\{c_k = c_k^*\}$, сходятся к точному решению $x^*(t)$ по норме $D\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\| = O \left\{ \sum_{i=1}^p \left[E_{n-1}^t(h_i) + \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^{m_j-1} E_{n-1}(a_{jk}^i) + E_{n-1}(T^{m_i} y) \right] \cdot n^{2m_i + 1/2} \right\}. \quad (3.2.29)$$

Доказательство этой теоремы проводится так же, как и доказательство теоремы 3.2.1. При этом роль леммы 1.3.1 в теореме 3.2.1 играет лемма 1.4.6.

Из леммы 3.1.2, следствия из теоремы 1.5.14 и соотношения (3.2.27) легко выводится следующая

Теорема 3.2.6. Предположим, что УТР (2.1.3) имеет решение вида (3.2.24) для данной правой части $y \in Y = C\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ и приближенный оператор $A_n = SA$ непрерывно обратим. Тогда погрешность приближенного решения $x_n^* \in X_n = H_{n+\mu-1}^\delta$ при правой части $y_n = Sy \in Y_n = H_{n+\mu-1}$ может быть оценена неравенством

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O \left\{ E_{n-1}(z^*) \cdot n^{2\bar{m} + 1/2} \right\}. \quad (3.2.30)$$

Доказательство идентично доказательству теоремы 3.2.2.

Следствие. Допустим, что в условиях теоремы 3.2.5 непрерывная часть $z^*(t)$ решения $x^*(t) \in D\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ уравнения (2.1.3) непрерывно дифференцируема $2\bar{m}$ раз на $[-1, 1]$, причем производная $z^{*(2\bar{m})}$ удовлетворяет на отрезке $[-1, 1]$ условию Липшица порядка α ($1/2 < \alpha \leq 1$).

Тогда приближенные решения x_n^* сходятся к точному решению x^* в смысле метрики пространства $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$.

Имеет место следующий факт.

Замечание 3.2.1. Поскольку $C\{\overline{0}; \overline{\tau}\} \equiv C[-1,1] \equiv D\{\overline{0}; \overline{\tau}\}$, при $m_j = 0 (j = \overline{1, p})$ из УТР (2.1.3) получается интегральное уравнение Фредгольма второго рода в пространстве $C[-1,1]$, причем $(Ty)(t) = (T^{m_i}y)(t) = y(t)$ и $h_i(t, s) = K(t, s) (i = \overline{1, p})$. Поэтому оценки теорем 3.2.3 и 3.2.5 хорошо согласуются с соответствующими уравнению второго рода оценками [27].

2.3. Метод подобластей. Приближенное решение задачи (2.1.3), (3.2.19) отыскиваем в виде агрегата (3.2.20), коэффициенты которого определяем согласно методу подобластей из условий

$$\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} (Ax_n - y)(t) dt = 0 \quad (j = \overline{1, n + \mu}), \quad (3.2.31)$$

где $\{\tau_j\}_0^{n+\mu}$ - система узлов отрезка $[-1,1]$, определяемая формулой вида (1.5.23).

Пусть $P = P_{n+\mu-1} : C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow H_{n+\mu-1}$ - оператор метода подобластей по системе $\{\tau_j\}$.

Замечание 3.2.2. Относительно обоснования метода подобластей справедливы теоремы, совершенно аналогичные теоремам 3.2.3 и 3.2.4. При этом для получения соответствующих утверждений достаточно повторить ход рассуждений в доказательстве теорем 3.2.3 – 3.2.4 с учетом того, что в данном случае алгебраическая система (3.2.31) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv PAx_n = y_n \quad (x_n \in X_n, y_n \in Y_n), \quad (3.2.32)$$

где $y_n = Py$, $X_n = H_{n+\mu-1}^\delta$, $Y_n = H_{n+\mu-1}$.

2.4. Метод коллокации – подобластей. Приближенное решение задачи (3.2.1) – (3.2.2) будем отыскивать в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{2n+m} c_k t^k + \sum_{k=0}^{m-1} c_{k+2n+m+1} \delta^{[k]}(t) \quad (n \geq m+1). \quad (3.2.33)$$

Неизвестные параметры $c_k = c_k^{(n)}$ ($k = 0, 2n+2m$) будем определять по методу коллокации – подобластей из СЛАУ

$$\left. \begin{aligned} (Ax_n)(v_j) &= y(v_j) \quad (j = 1, n+m+1); \\ \int_{v_j}^{v_{j+1}} (Ax_n - y)(t) dt &= 0 \quad (j = 1, n+m), \end{aligned} \right\} \quad (3.2.34)$$

где $v_j = v_j^{(n)} \in [-1, 1]$ - узлы Чебышева первого рода:

$$v_j = \cos \frac{2j-1}{2(n+m+1)} \pi \quad (j = 1, n+m+1). \quad (3.2.35)$$

Далее, пусть $W = W_{2n+2m} : C\{m; 0\} \rightarrow H_{2n+2m}$ - линейный оператор, относящийся к любой функции $\phi \in C\{m; 0\}$ алгебраический полином $W\phi \in H_{2n+2m}$, однозначно определенный условиями

$$\begin{aligned} (W\phi)(v_j) &= \phi(v_j) \quad (j = 1, n+m+1), \\ \int_{v_j}^{v_{j+1}} [(W\phi)(t) - \phi(t)] dt &= 0 \quad (j = 1, n+m). \end{aligned}$$

Тогда из леммы 1.2.3 и соотношения (1.5.31) сразу следует оценка

$$\|W\| = \|W\|_{C\{m; 0\}} \leq e_{26} \cdot n^{2m+2} \quad (n \geq m+1). \quad (3.2.36)$$

Относительно вычислительной схемы (3.2.1), (3.2.33) – (3.2.35) справедлива следующая

Теорема 3.2.7. Пусть уравнение (3.2.1) однозначно разрешимо в пространстве $D\{m; 0\}$ при любой правой части $y(t) \in C\{m; 0\}$, а функции $h(t, s) = (T_s \theta)(t, s)$ (по аргументу t), $g_i(t) = \theta_s^{[i]}(t, 0)$ ($i = 0, m-1$) и $(Ty)(t)$ непрерывно дифференцируемы $2m+2$ раза на $[-1, 1]$. Тогда при всех n , начиная с некоторого номера n_2 , приближенные решения $x_n^*(t)$,

определяемые по формуле (3.2.33), существуют, единственны и сходятся к точному решению $x^*(t) = (A^{-1}y)(t)$ по норме пространства $D\{m;0\}$ с быстротой

$$\|x^* - x_n^*\| = O \left\{ \left[E_n^t(h) + \sum_{i=0}^{m-1} E_n(g_i) + E_n(Ty) \right] n^{2m+2} \right\}. \quad (3.2.37)$$

В самом деле, для получения требуемых утверждений достаточно повторить схему доказательства теоремы 3.2.1 с учетом того, что в данном случае СЛАУ (3.2.34) равносильна (см., например, [45]) линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv W A x_n = y_n \quad (x_n \in X_n, y_n \in Y_n), \quad (3.2.38)$$

где $y_n = W y$, $X_n = H_{2n+m} \oplus \text{span}\{\delta^{(k)}(t)\}_0^{m-1}$, $Y_n = H_{2n+2m}$.

Замечание 3.2.3. Из вышеизложенных рассуждений ясно, что с помощью леммы 3.1.2 можно получить утверждение, аналогичное теоремам 3.2.2 и 3.2.6, и в случае метода коллокации - подобластей.

Замечание 3.2.4. Отметим, что исследование приближенных решений уравнений вида (2.1.3) (p – произвольное фиксированное натуральное число) не вызывает принципиальных затруднений по сравнению со случаем $p = 1$ и в случае метода коллокации – подобластей. А именно, для этого метода справедливы теоремы, аналогичные теоремам 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6.

Замечание 3.2.5. В силу определения нормы (1.4.11) в $\overline{D\{m;\tau\}}$ очевидно, что сходимость приближенных решений x_n^* к точному решению x^* УТР (2.1.3) в метрике пространства $\overline{D\{m;\tau\}}$ влечет за собой обычную сходимость в пространстве обобщенных функций, т.е. слабую сходимость.

2.5. Дополнения. Отметим следующие важные для приложений факты.

Так как в условиях каждой из теорем 3.2.3, 3.2.5 и 3.2.7 соответствующие приближенные операторы A_n ($n \geq n_3$) непрерывно

обратимы и обратные операторы A_n^{-1} ограничены по норме в совокупности, то из леммы 3.1.3 сразу вытекает следующая

Теорема 3.2.8. При выполнении условий теорем 3.2.3, 3.2.5 и 3.2.7 соответственно методы коллокации, моментов и коллокации-подобластей для уравнения (2.1.3) устойчивы относительно малых возмущений элементов приближающих уравнений.

Далее, имеет место следующая

Теорема 3.2.9. В условиях теорем 3.2.3, 3.2.5 и 3.2.7 хотя бы при достаточно больших n существуют числа обусловленности $\eta_n = \eta(A_n)$ соответственно для приближенных уравнений (3.2.21), (3.2.26) и (3.2.38), причем

$$\eta_n \leq c \cdot \eta \quad (1 \leq c \leq 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0, n \geq n_4(\varepsilon)), \quad \lim_n \eta_n = \eta, \eta = \eta(A).$$

Действительно, поскольку в условиях теорем (3.2.3), (3.2.5) и (3.2.7) существует число обусловленности $\eta = \eta(A)$ для точного уравнения (2.1.3), то утверждения теоремы 3.2.9 непосредственно следуют из лемм 3.1.1 и 3.1.4.

§3. Решение в пространстве $V \{\bar{m}; \bar{\tau}\}$

Предыдущий параграф был посвящен приближенному решению интегральных уравнений вида (2.1.3) в пространстве $D \{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ обобщенных функций. Там существенным являлось условие $K(t, s) \neq 0$, ибо при $K(t, s) \equiv 0$ уравнение (2.1.3) не для любой правой части $y(t) \in C \{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ разрешимо в пространстве $D \{\bar{m}; \bar{\tau}\}$. Если же оператор A третьего рода рассматривать как оператор, действующий из $V \{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ в пространство $C \{\bar{m}; \bar{\tau}\}$, то уравнение (2.1.3) и в случае $K(t, s) \equiv 0$ принадлежит исследуемому нами классу однозначно разрешимых уравнений. Кроме

того, в теории переноса [39] класс $V \{ \overline{m; \tau} \}$ так же, как и класс $D \{ \overline{m; \tau} \}$, является естественным классом решений уравнений вида (2.1.3). Поэтому нам представляется целесообразным приближенное решение УТР вида (2.1.3) и в пространстве $V \{ \overline{m; \tau} \}$ обобщенных функций.

Так же, как и выше, подробности в исследовании будем приводить только для случая $p = 1$. На уравнения общего вида (2.1.3) все результаты переносятся без каких-либо принципиальных затруднений, о чем ниже будет сказано. При этом всюду будем придерживаться обозначений §2 данной главы.

3.1. Метод коллокации. Пусть дано УТР (3.2.1), в котором известные функции $K(t, s)$ и $y(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} & K \in C_0^{(m)}([-1, 1]^2), K_s^{(i)}(t, 0) \in C \{ \overline{m; 0} \} \quad (i = \overline{1, m-1}), \\ & \int_{-1}^1 (T_s^j K)(t, s) ds \in C \{ \overline{m; 0} \} \quad (j = \overline{1, m}), \\ & \theta(t, s) = (T_t K)(t, s) \in C_s^{(m)}([-1, 1]^2); y \in C \{ \overline{m; 0} \}, \end{aligned} \right\} \quad (3.3.1)$$

а $x(t) \in V \{ \overline{m; 0} \}$ - искомая обобщенная функция.

Приближенное решение уравнения (3.2.1) отыскиваем в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k + \sum_{k=0}^{m-1} c_{k+n} t^{-k-1} \quad (n \geq m), \quad (3.3.2)$$

где $c_k = c_k^{(n)}$ ($k = \overline{0, n+m-1}$) – подлежащие определению коэффициенты. Их находим согласно методу коллокации из СЛАУ

$$(A x_n)(v_j) = y(v_j) \quad (j = \overline{1, n+m}),$$

т.е.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left[v_j^{k+m} + \int_{-1}^1 K(v_j, s) s^k ds \right] + \sum_{k=0}^{m-1} c_{k+n} \left[v_j^{m-k-1} + \right. \\ & \left. + \int_{-1}^1 (T_s^{k+1} K)(v_j, s) ds + \sum_{i=0}^k \frac{K_s^{(i)}(v_j, 0)}{i!} \cdot \int_{-1}^1 \frac{ds}{s^{k+1-i}} \right] = y(v_j) \quad (j = \overline{1, n+m}), \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

где $v_j = v_j^{(n)} \in [-1, 1]$ – узлы коллокации, определенные равенством (3.2.5).

Для вычислительной схемы (3.2.1), (3.3.2), (3.3.3), (3.2.5) справедлива следующая

Теорема 3.3.1. Пусть выполнено условие (ii) теоремы 3.2.1. Если уравнение (3.2.1) однозначно разрешимо в пространстве $V\{m; 0\}$ при любой правой части $y(t) \in C\{m; 0\}$, то при достаточно больших n система (3.3.3) также имеет единственное решение $\{c_0^*, c_1^*, \dots, c_{n+m-1}^*\}$.

Приближенные решения $x_n^*(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k^* t^k + \sum_{k=0}^{m-1} c_{k+n}^* t^{-k-1}$ сходятся к точному решению $x^*(t) = (A^{-1}y)(t)$ в пространстве $V\{m; 0\}$ со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{V\{m; 0\}} = O \left\{ \left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{i=0}^{m-1} E_{n-1}(g_i) + E_{n-1}(Ty) \right] n^{2m} \ln n \right\}. \quad (3.3.4)$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение (3.2.1) как линейное операторное уравнение вида

$$Ax \equiv Ux + Kx = y \quad (x \in X, y \in Y), \quad (3.3.5)$$

где $X = V\{m; 0\}$, $Y = C\{m; 0\}$, а U и K – операторы, определенные в (3.2.9).

В качестве $(n + m)$ - мерного подпространства X возьмем множество X_n всех функций вида (3.3.2), а за $Y_n \subset Y$ примем множество всех алгебраических полиномов степени не выше $n + m - 1$, т.е.

$$X_n = H_{n-1} \oplus \text{span} \{t^{-k-1}\}_0^{m-1}, Y_n = H_{n+m-1}.$$

Через $P = P_{n+m-1}$ обозначим оператор, ставящий в соответствие каждой функции $\phi \in C\{m; 0\}$ ее алгебраический интерполяционный полином Лагранжа степени $n + m - 1$ по узлам (3.2.5). Тогда алгебраическую систему (3.3.3) можно записать в виде эквивалентного ей линейного операторного уравнения

$$A_n x_n \equiv P A x_n = P y \quad (x_n \in X_n, P y \in Y_n), \quad (3.3.6)$$

где A_n - линейный ограниченный оператор из X_n в Y_n .

Покажем близость операторов A и A_n на подпространстве X_n . В силу (3.3.5), (3.3.6) и теоремы 1.5.2, с учетом $PUx_n = Ux_n$ ($x_n \in X_n$), для произвольного элемента $x_n \in X_n$ имеем

$$\begin{aligned} \|Ax_n - A_n x_n\|_Y &= \|Kx_n - PKx_n\|_Y \leq (1 + \|P\|_{Y \rightarrow Y}) \cdot E_{n+m-1}^T(Kx_n) = \\ &= (1 + \|P\|) \cdot E_{n-1}(TKx_n). \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Далее, заметим, что на основании леммы 1.3.1 для $\theta(t, s) \equiv (T, K)(t, s)$ существует функция

$$\psi(t, s) = s^m \cdot Q_{n-1}^t(t, s) + \sum_{k=0}^{m-1} G_{n-1}^k(t) s^k, \quad (3.3.8)$$

где $Q_{n-1}^t(t, s)$ и $G_{n-1}^k(t)$ обозначают полиномы степени $n-1$ наилучшего равномерного приближения для $h(t, s) \equiv (T_s \theta)(t, s)$ (по t) и $g_k(t) = \theta_s^{(k)}(t, 0)$ ($k = \overline{0, m-1}$) соответственно, обладающая свойствами (i)–(iii), из леммы 1.3.1.

Теперь с целью аппроксимации элемента $TKx_n \in C[-1, 1]$ образуем функцию

$$\begin{aligned} (\Psi x_n)(t) &\equiv \int_{-1}^1 \psi(t, s) x_n(s) ds = \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{n-1} c_k s^k \cdot \psi(t, s) ds + \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} c_{k+n} \left[\int_{-1}^1 (T_s^{k+1} \psi)(t, s) ds + \sum_{i=0}^k \frac{\psi_s^{(i)}(t, 0)}{i!} \cdot \int_{-1}^1 \frac{ds}{s^{k+1-i}} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

По виду (3.3.8) функции $\psi(t, s)$ ясно, что $(\Psi x_n)(t) \in H_{n-1}$.

Используя соотношения (3.3.9), (1.4.3), с помощью оценок (i)–(iii) леммы 1.3.1 последовательно выводим

$$\begin{aligned} E_{n-1}(TKx_n) &\leq \|TKx_n - \Psi x_n\|_C = \max_{-1 \leq t \leq 1} \left| \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{n-1} c_k s^k \cdot \theta(t, s) ds + \sum_{k=0}^{m-1} c_{k+n} \times \right. \\ &\times \sum_{k=0}^{m-1} c_{k+n} \left[\int_{-1}^1 (T_s^{k+1} \theta)(t, s) ds + \sum_{i=0}^k \frac{\theta_s^{(i)}(t, 0)}{i!} \cdot \int_{-1}^1 \frac{ds}{s^{k+1-i}} \right] - \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{n-1} c_k s^k \psi(t, s) ds - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=0}^{m-1} c_{k+n} \left[\int_{-1}^1 (T_s^{k+1} \psi)(t, s) ds + \sum_{i=0}^k \frac{\psi_s^{(i)}(t, 0)}{i!} \cdot \int_{-1}^1 \frac{ds}{s^{k+1-i}} \right] \leq \\
& \leq 2 \cdot \max_{s \in [-1, 1]} \left| \sum_{k=0}^{n-1} c_k s^k \right| \cdot \max_{t, s \in [-1, 1]} |\theta(t, s) - \psi(t, s)| + \sum_{k=0}^{m-1} |c_{k+n}| \times \\
& \quad \times \left[2 \cdot \max_{t, s \in [-1, 1]} |(T_s^{k+1} \theta)(t, s) - (T_s^{k+1} \psi)(t, s)| + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=0}^k \left| \int_{-1}^1 \frac{ds}{s^{k+1-i}} \right| \cdot \max_{t \in [-1, 1]} |(\theta - \psi)_s^{(i)}(t, 0)| \right] \leq e_{27} \left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{i=0}^{m-1} E_{n-1}(g_i) \right] \times \\
& \quad \left[\max_s \left| \sum_{k=0}^{n-1} c_k s^k \right| + \sum_{k=0}^{m-1} |c_{k+n}| \right] = e_{27} \left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{i=0}^{m-1} E_{n-1}(g_i) \right] \cdot \|x_n\|_X.
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Следовательно, из (3.3.7), (3.3.10) и (3.2.6) получаем

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{(n)} & \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \leq e_{27} (1 + \|P\|) \cdot \left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{i=0}^{m-1} E_{n-1}(g_i) \right] = \\
& = O \left\{ \left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{i=0}^{m-1} E_{n-1}(g_i) \right] n^{2m} \ln n \right\}.
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

В условиях теоремы в силу теоремы Джексона (см., например, [31], с.86) очевидно, что $\varepsilon^{(n)} = o(1)$ ($n \rightarrow \infty$). Поэтому по лемме 3.1.1 при всех n таких, что $q_n = \|A^{-1}\| \cdot \varepsilon^{(n)} < 1$, операторы $A_n : X_n \rightarrow Y_n$, определенные в (3.3.6), непрерывно обратимы и обратные операторы ограничены по норме в совокупности:

$$\|A_n^{-1}\| = O(1) \quad (n \geq n_5, A_n^{-1} : Y_n \rightarrow X_n).$$

Для правых частей уравнений (3.3.5) и (3.3.6) имеем

$$v^{(n)} \equiv \|y - Py\|_Y \leq (1 + \|P\|) \cdot E_{n+m-1}^T(y) = O \left[E_{n-1}(Ty) n^{2m} \ln n \right]. \tag{3.3.12}$$

Теперь, благодаря неравенствам (3.3.11), (3.3.12) и вышеупомянутой теореме Джексона, из леммы 3.1.1 очевидным образом следует утверждение теоремы 3.3.1 с оценкой (3.3.4).

Доказательство теоремы завершено.

Имеет место следующая

Теорема 3.3.2. Пусть уравнение (3.2.1) имеет решение

$$x^*(t) = z^*(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i^* t^{-i-1} \in X = V\{m;0\} \quad (3.3.13)$$

при данной правой части $y(t) \in Y = C\{m;0\}$ и оператор A_n имеет непрерывный обратный. Тогда погрешность приближенного решения $x_n^* \in X_n$ для правой части $y_n = Py \in Y_n$ представляется в виде

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{E_{n-1}(z^*) \cdot n^{2m} \cdot \ln n\}. \quad (3.3.14)$$

В силу леммы 3.1.2, следствия из теоремы 1.5.14 и (3.2.6) теорема 3.3.2 доказывается почти дословным повторением доказательства теоремы 3.2.2.

Следствие. Пусть в условиях теоремы 3.3.1 непрерывная компонента $z^*(t)$ решения (3.3.13) непрерывно дифференцируема $2m$ -раз на $[-1,1]$, причем производная $z^{*(2m)}$ принадлежит классу Дини-Липшица. Тогда приближенные решения x_n^* сходятся к точному решению $x^* = A^{-1}y$ по норме пространства $V\{m;0\}$.

Отметим, что вышеизложенные результаты по методу коллокации для УТР с коэффициентом, имеющим один кратный нуль в промежутке интегрирования, без каких-либо существенных изменений в доказательствах переносятся также на общий случай (p - произвольно фиксированное натуральное число) уравнений вида (2.1.3). Вкратце остановимся на них.

Пусть дано интегральное уравнение (2.1.3), в котором функция $K(t,s)$ удовлетворяет условиям (2.2.6), причем

$$\theta_i \equiv T_t^{m_i} K \in C_s^{\overline{\{m\}}}([-1,1]^2) \quad (i = \overline{1, p}), y \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}, \quad (3.3.15)$$

а $x \in V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ - искомая обобщенная функция.

Приближенное решение УТР (2.1.3) будем искать в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k + \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^{m_j-1} c_{k+n+M(j-1)} \cdot (t-t_j)^{-k-1}, \quad (3.3.16)$$

где функция $M(q)$ ($q+1 \in \mathbb{N}$) определена в (3.2.20). Неизвестные параметры

$c_k = \overline{c_k^{(n)}} (k = 0, n + \mu - 1)$ будем определять по методу коллокации из СЛАУ

$$(Ax_n)(v_j) = y(v_j) \quad (j = 1, n + \mu), \quad (3.3.17)$$

где $\{v_j\}_1^{n+\mu} \subset [-1, 1]$ - система узлов Чебышева первого рода.

Через $P = P_{n+\mu-1} : \overline{C\{m; \tau\}} \rightarrow \overline{H_{n+\mu-1}}$ по-прежнему будем обозначать интерполяционный оператор Лагранжа по совокупности узлов $\{v_j\}$.

Для вычислительной схемы (2.1.3), (3.3.16) – (3.3.17) имеет место

Теорема 3.3.3. Пусть выполнено условие (ii) теоремы 3.2.3. Тогда, если уравнение (2.1.3) однозначно разрешимо в пространстве $\overline{V\{m; \tau\}}$ при любой правой части $y \in \overline{C\{m; \tau\}}$, система (3.3.17) также однозначно разрешима хотя бы при достаточно больших n . При этом приближенные решения $x_n^*(t)$, определяемые из (3.3.16) и (3.3.17), при $n \rightarrow \infty$ сходятся в $\overline{V\{m; \tau\}}$ к точному решению $x^*(t) \in \overline{V\{m; \tau\}}$ уравнения (2.1.3) со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{\overline{V\{m; \tau\}}} \leq e_{28} \left\{ \sum_{i=1}^p \left[E_{n-1}^i(h_i) + \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^{m_j-1} E_{n-1}(a_{jk}^i) + E_{n-1}(T^{m_i} y) \right] \times n^{2m_i} \ln n \right\}, \quad (3.3.18)$$

где функции $h_i(t, s)$, $a_{jk}^i(t)$ введены в теореме 3.2.3.

Эта теорема доказывается по той же схеме, что и теорема 3.3.1, но с использованием леммы 1.4.6.

Далее, с помощью леммы 3.1.2, следствия из теоремы 1.5.4 и (3.2.22) легко выводится следующая

Теорема 3.3.4. Пусть УТР (2.1.3) имеет решение

$$x^*(t) = z^*(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \alpha_{ji}^* (t-t_j)^{-i-1} \in X = \overline{V\{m; \tau\}} \quad (3.3.19)$$

при правой части $y(t) \in Y = C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ и соответствующий приближенный оператор $A_n = PA$ непрерывно обратим. Тогда погрешность приближенного решения

$$x_n^* \in X_n = H_{n-1} \oplus \text{span} \left\{ F.P.(t - t_j)^{-i-1} \Big| i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p} \right\} \quad \text{для правой}$$

части $y_n = Py \in Y_n = H_{n+\mu-1}$ представима в виде

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leq e_{29} \left[E_{n-1}(z^*) n^{2\tilde{m}} \ln n \right], \quad (3.3.20)$$

где $\tilde{m} = \max\{m_1, m_2, \dots, m_p\}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.2.2.

Следствие. Пусть в условиях теоремы 3.3.3 непрерывное слагаемое $z^*(t)$ решения (3.3.19) непрерывно дифференцируемо $2\tilde{m}$ -раз на $[-1,1]$, причем $z^{*(2\tilde{m})}$ из класса Дини-Липшица. Тогда приближенные решения x_n^* сходятся к точному решению $x^* = A^{-1}y$ в пространстве $V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$.

3.2. О методе моментов. Приближенное решение задачи (3.2.1), (3.3.1) отыскиваем в виде линейной комбинации (3.3.2), коэффициенты которой определяем согласно методу моментов из условий

$$\int_{-1}^1 (Ax_n - y)(t) \cdot \hat{\rho}(t) \cdot \hat{T}_j(t) dt = 0 \quad (j = \overline{0, n+m-1}), \quad (3.3.21)$$

где $\{\hat{T}_j(t)\}$ - полная ортонормированная на $[-1,1]$ по весу $\hat{\rho}(t) = (1-t^2)^{-1/2}$ система полиномов Чебышева первого рода. Ясно, что (3.3.21) есть система из $n+m$ линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $c_0, c_1, \dots, c_{n+m-1}$ комбинации (3.3.2).

В этом случае справедлива следующая

Теорема 3.3.5. Пусть выполнено условие (ii) теоремы 3.2.1. Если уравнение (3.2.1) имеет единственное решение $x^*(t) \in V\{m; 0\}$ при любой правой части $y(t) \in C\{m; 0\}$, то система (3.3.21) также имеет единственное решение $\{c_k^*\}_0^{n+m-1}$ хотя бы при достаточно больших n . Более

того, последовательность приближенных решений $x_n^*(t)$ (т.е. (3.3.2) при $c_k = c_k^*$) сходится к точному решению $x^*(t)$ уравнения (3.2.1) по норме пространства $V\{m;0\}$ со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{V\{m;0\}} \leq e_{30} \left\{ \left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{i=0}^{m-1} E_{n-1}(g_i) + E_{n-1}(Ty) \right] n^{2m} \ln n \right\}. \quad (3.3.22)$$

Действительно, для получения утверждений этой теоремы достаточно повторить ход рассуждений в доказательстве теоремы 3.3.1 с учетом того, что в рассматриваемом случае СЛАУ (3.3.21) эквивалентна следующему линейному операторному уравнению:

$$A_n x_n \equiv S A x_n = S y \quad (x_n \in X_n, S y \in Y_n), \quad (3.3.23)$$

где X_n — множество всех функций вида (3.3.2), $Y_n = H_{n+m-1}$, а $S = S_{n+m-1} : C\{m;0\} \rightarrow H_{n+m-1}$ — оператор Фурье по системе $\{\hat{T}_j\}$.

Замечание 3.3.1. Говоря о перенесении вышеизложенных результатов на общий случай уравнений вида (2.1.3), отметим следующее. Приближенное решение задачи (2.1.3), (2.2.6), (3.3.15) ищем в виде линейной комбинации (3.3.16), коэффициенты которой определяем по методу моментов из СЛАУ

$$\int_{-1}^1 (A x_n - y)(t) \cdot \hat{\rho}(t) \cdot \hat{T}_j(t) dt = 0 \quad (j = \overline{0, n + \mu - 1}). \quad (3.3.24)$$

В этом случае справедливы теоремы, аналогичные теоремам 3.3.3 и 3.3.4.

Замечание 3.3.2. Интересно отметить следующее. Так как $C\{0;0\} \equiv C[-1,1] \equiv V\{0;0\}$, при $m = 0$ из уравнения (3.2.1) получается интегральное уравнение Фредгольма второго рода в пространстве $C[-1,1]$; причем

$$T y \equiv (T^0 y)(t) = y(t), \quad h(t,s) \equiv (T_s^0 T_t^0 K)(t,s) = K(t,s).$$

Поэтому оценки теорем 3.3.1 и 3.3.5 хорошо согласуются с соответствующими уравнению второго рода оценками [27].

3.3. О методе подобластей. Конечномерное приближение к решению задачи (2.1.3), (2.2.6), (3.3.15) отыскиваем в виде образования (3.3.16), коэффициенты которого определяем из СЛАУ вида (3.2.31).

Замечание 3.3.3. Теоремы сходимости метода подобластей аналогичны теоремам 3.3.3 и 3.3.4 соответственно. При получении соответствующих утверждений достаточно рассуждать так же, как и в доказательствах теорем 3.3.3 – 3.3.4, с учетом того факта, что в исследуемом случае СЛАУ (3.2.31) равносильна линейному функциональному уравнению

$$A_n x_n \equiv P A x_n = P y \quad (x_n \in X_n, P y \in Y_n), \quad (3.3.25)$$

где $X_n = H_{n+\mu-1}^{F.P.}$, $Y_n = H_{n+\mu-1}$, а $P = P_{n+\mu-1} : C\{m; \tau\} \rightarrow H_{n+\mu-1}$ - оператор метода подобластей по системе $\{\tau_j\}_0^{n+\mu}$ узлов, определяемых формулой вида

$$\tau_j = \tau_j^{(n)} = \cos \frac{j\pi}{n+\mu} \quad (j = \overline{0, n+\mu}). \quad (3.3.26)$$

3.4. О методе коллокации – подобластей. Приближенное решение задачи (3.2.1), (3.3.1) будем искать в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{2n+m} c_k t^k + \sum_{k=0}^{m-1} c_{k+2n+m+1} t^{-k-1} \quad (n \geq m+1), \quad (3.3.27)$$

где $c_k = c_k^{(n)}$ ($k = \overline{0, 2n+2m}$) - подлежащие определению параметры. Их будем определять согласно методу коллокации – подобластей из СЛАУ вида (3.2.34), в которой узлы v_j ($j = \overline{1, n+m+1}$) определены в (3.2.35).

Для вычислительной схемы (3.2.1), (3.3.27), (3.2.34) – (3.2.35) верна следующая

Теорема 3.3.6. Пусть уравнение (3.2.1) однозначно разрешимо в пространстве $V\{m; 0\}$ при любой правой части $y \in C\{m; 0\}$, а функции $h \equiv T_s \theta$ (по t), $g_i(t) = \theta_s^{(i)}(t, 0)$ ($i = \overline{0, m-1}$) и Ty принадлежат $C^{(2m+2)}[-1, 1]$. Тогда при всех $n \in N$, начиная с некоторого номера n_0 , приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (3.3.27), существуют,

единственны и сходятся по норме пространства $V\{m;0\}$ к точному решению $x^* \in V\{m;0\}$ уравнения (3.2.1) со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\| \leq e_{31} \left\{ \left[E_n'(h) + \sum_{i=0}^{m-1} E_n(g_i) + E_n(Ty) \right] n^{2m+2} \right\}. \quad (3.3.28)$$

Для доказательства теоремы 3.3.6 достаточно повторить рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 3.3.1, с учетом того, что в этом случае система (3.2.34) равносильна линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv W A x_n = W y \quad (x_n \in X_n, W y \in Y_n), \quad (3.3.29)$$

где $X_n = H_{2n+m} \oplus \text{span}\{F.P.t^{-k-1}\}_0^{m-1}$, $Y_n = H_{2n+2m}$, а $W = W_{2n+2m} : C\{m;0\} \rightarrow H_{2n+2m}$ - оператор метода коллокации – подобластей, определенный в пункте 2.4 данной главы.

Замечание 3.3.4. Для рассматриваемого метода с помощью леммы 3.1.2 легко получить утверждение, аналогичное теореме 3.3.2.

Замечание 3.3.5. В общем случае уравнений вида (2.1.3) для метода коллокации – подобластей справедливы также теоремы, аналогичные теоремам 3.3.3 и 3.3.4.

Замечание 3.3.6. Следует отметить, что оценки погрешности рассмотренных выше методов являются эффективными в том смысле, что они хорошо учитывают структурные свойства исходных данных. Именно, увеличивая гладкость заданных функций, мы тем самым увеличим скорость сходимости приближенных решений к точному. Для ясности приведем, например, одно следствие из теоремы 3.2.1.

Следствие. Если в условиях теоремы 3.2.1 функции h (по t), g_i , $Ty \in C^{(r)}$ ($r \geq 2m$) и $h_t^{(r)}$, $g_i^{(r)}$, $(Ty)^{(r)} \in \text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$), то приближенные решения сходятся к точному решению со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r-2m+\alpha}}\right) \quad (r = 2m, 2m+1, \dots).$$

Аналогичные следствия вытекают из остальных теорем.

Замечание 3.3.7. В силу определения нормы (1.4.11) в пространстве $V\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ ясно, что сходимость приближенных решений к точному в метрике $V\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ влечет обычную сходимость в пространстве обобщенных функций, т.е. слабую сходимость.

3.5. Дополнения. Поскольку при выполнении условий теорем 3.3.1, 3.3.5 и 3.3.6 соответствующие аппроксимирующие операторы A_n ($A_n = PA$, $A_n = SA$, $A_n = WA$, $n \geq n_7$) непрерывно обратимы и обратные операторы ограничены по норме в совокупности, то из леммы 3.1.3 очевидным образом следует

Теорема 3.3.7. В условиях теорем 3.3.1, 3.3.5 и 3.3.6 соответственно методы коллокации, моментов, подобластей и коллокации – подобластей для УТР

$$Ax = y \quad (x \in V\{m; 0\}, y \in C\{m; 0\}) \quad (3.3.30)$$

устойчивы относительно малых возмущений элементов аппроксимирующих уравнений.

Далее, справедлива следующая

Теорема 3.3.8. При выполнении условий теорем 3.3.1, 3.3.5 и 3.3.6 хотя бы при достаточно больших n существуют числа обусловленности $\eta_n \equiv \eta(A_n)$ соответственно для аппроксимирующих уравнений (3.3.6), (3.3.23) и (3.3.29), причем

$$\eta_n \leq \hat{c} \cdot \eta \quad (1 \leq \hat{c} \leq 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0, n \geq n_8(\varepsilon)),$$

$$\lim_n \eta_n = \eta, \quad \eta = \eta(A).$$

Утверждения этой теоремы очевидным образом вытекают из лемм 3.1.1 и 3.1.4.

ГЛАВА IV

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА В ПРОСТРАНСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В предыдущей главе с целью приближенного решения УТР предложены и обоснованы прямые методы коллокации, моментов, подобластей и коллокации-подобластей. Полученные при этом результаты показывают, что все эти методы не учитывают полностью структурных свойств функций основных пространств, что оказывает отрицательное влияние на скорость сходимости приближенных решений. В связи со сказанным возникла актуальная задача разработки и обоснования специальных прямых методов решения УТР, максимально учитывающих характерные свойства элементов основных пространств. В настоящей главе в этих целях предлагаются и обосновываются новые эффективные прямые методы, приспособленные к решению УТР в пространствах обобщенных функций. Эффективность методов понимается в том смысле, что, во-первых, соответствующие оценки погрешности автоматически учитывают структурные свойства исходных данных УТР, во-вторых, эти методы оптимальны по порядку на определенных классах гладких функций среди всех проекционных методов решения исследуемых уравнений в классах обобщенных функций.

§1. «Полиномиальные» методы решения в пространствах $D\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ и $V\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$

1.1. Метод коллокации, основанный на применении полинома Бернштейна. Пусть дано УТР (2.1.3). Ради простоты выкладок и формулировок будем считать $p=1$, $t_1=0$, т.е. рассмотрим уравнение вида

$$Ax \equiv (Ux)(t) + (Kx)(t) = y(t) \quad (-1 \leq t \leq 1), \quad (4.1.1)$$

$$Ux \equiv t^m x(t), \quad Kx \equiv \int_{-1}^1 K(t,s)x(s)ds,$$

Где $m \in \mathbb{N}$, K и y – известные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\left. \begin{aligned} K &\in C_0^{\{m\}}([-1,1]^2), \quad K_s^{\{i\}}(t,0) \in C\{m;0\} \quad (i = \overline{1, m-1}); \\ y &\in C\{m;0\}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.2)$$

а $x \in D\{m;0\}$ – искомая обобщенная функция.

Приближенное решение УТР (4.1.1) ищем в виде образования

$$x_n = x_n(t) = z_n(t) + \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+n+1} \delta^{\{i\}}(t) \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (4.1.3)$$

$$z_n(t) = 2^{-n} \cdot \sum_{i=0}^n c_i \binom{n}{i} (t+1)^i (1-t)^{n-i}, \quad (4.1.4)$$

где $\binom{n}{i} = n!/(i!(n-i)!)$ ($i = \overline{0, n}$) – биномиальные коэффициенты. Неизвестные

параметры $c_i = c_i^{(n)}$ ($i = \overline{0, n+m}$) определяем согласно нашему методу из СЛАУ

$$\left. \begin{aligned} c_i &= (Ty - TKx_n)(v_i) \quad (i = \overline{0, n}); \\ (Ax_n - y)^{\{i\}}(0) &= 0 \quad (i = \overline{0, m-1}), \end{aligned} \right\} \quad (4.1.5)$$

где узлы коллокации $v_i = v_i^{(n)} \in [-1,1]$ вычисляются по формуле

$$v_i = -1 + 2i/n \quad (i = \overline{0, n}). \quad (4.1.6)$$

Для вычислительной схемы (4.1.1) – (4.1.6) справедлива следующая

Теорема 4.1.1. Если однородное УТР $Ax = 0$ имеет в $D\{m;0\}$ лишь нулевое решение, то при всех n , начиная с некоторого n_{13} , приближенные решения x_n^* , определяемые из (4.1.3) – (4.1.6), существуют, единственны и сходятся к точному решению $x^* = A^{-1}y$ по норме пространства $D\{m;0\}$ со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\| = O \left[\omega_t(h; \Delta_n) + \sum_{i=0}^{m-1} \omega(f_i; \Delta_n) + \omega(Ty; \Delta_n) \right], \quad (4.1.7)$$

где $\omega(f; \Delta)$ – модуль непрерывности функции $f(t)$ с шагом Δ ($0 < \Delta \leq 2$), а $\omega_i(h; \Delta)$ – частный модуль непрерывности функции $h(t, s)$ по переменной t ; $h(t, s) = (T, K)(t, s)$, $f_i(t) = T(K_s^{(i)}(t, 0))$ ($i = \overline{0, m-1}$), $\Delta_n = 1/\sqrt{n}$.

Доказательство. УТР (4.1.1) будем рассматривать как линейное операторное уравнение вида

$$Ax = Ux + Kx = y \quad (x \in X, y \in Y), \quad (4.1.8)$$

где $X = D\{m; 0\}$, $Y = C\{m; 0\}$.

Обозначим через $X_n \subset X$ ($n + m + 1$)-мерное подпространство элементов вида (4.1.3), а за $Y_n \subset Y$ примем класс H_{n+m} . Далее, введем линейный оператор $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{n+m} : C\{m; 0\} \rightarrow H_{n+m}$, ставящий в соответствие любой функции $g \in C\{m; 0\}$ алгебраический полином

$$\mathcal{B}g = \mathcal{B}_{n+m}(g; t) \equiv (UBTg)(t) + \sum_{i=0}^{m-1} g^{(i)}(0)t^i/i!, \quad (4.1.9)$$

где $B = B_n : C[-1, 1] \rightarrow H_n$ – оператор Бернштейна [44] по системе узлов (4.1.6).

Покажем предварительно, что система (4.1.3)-(4.1.5) эквивалентна следующему линейному функциональному уравнению:

$$A_n x_n \equiv Ux_n + \mathcal{B}Kx_n = \mathcal{B}y \quad (x_n \in X_n, \mathcal{B}y \in Y_n). \quad (4.1.10)$$

Действительно, пусть x_n^* – решение уравнения (4.1.10), т.е.

$$Ux_n^* + \mathcal{B}(Kx_n^* - y) = 0.$$

Отсюда в силу (4.1.3) и (4.1.9) следует

$$t^m [z_n^*(t) + (BT(Kx_n^* - y))(t)] + \sum_{i=0}^{m-1} (Kx_n^* - y)^{(i)}(0)t^i/i! \equiv 0. \quad (4.1.11)$$

Поскольку $Ux_n^* + \mathcal{B}(Kx_n^* - y) \in H_{n+m}$, из (4.1.11) получаем систему

$$\left. \begin{aligned} z_n^*(t) &= (BT(y - Kx_n^*))(t); \\ (Kx_n^* - y)^{(i)}(0) &= 0 \quad (i = \overline{0, m-1}). \end{aligned} \right\} \quad (4.1.12)$$

В левой и правой частях первого равенства системы (4.1.12) находятся полиномы Бернштейна некоторых функций соответственно со значениями

c_i^* и $(T(y - Kx_n^*))(v_i)$ ($i = \overline{0, n}$) в узлах (4.1.6). Следовательно, с учетом (4.1.8) и $(Ux_n^*)^{(i)}(0) = 0$ ($i = \overline{0, m-1}$) из (4.1.12) следует, что

$$\left. \begin{aligned} c_i^* &= (Ty - TKx_n^*)(v_i) \quad (i = \overline{0, n}); \\ (Ax_n^* - y)^{(i)}(0) &= 0 \quad (i = \overline{0, m-1}). \end{aligned} \right\} (4.1.13)$$

Итак, СЛАУ (4.1.5) имеет решение $c_i = c_i^*$ ($i = \overline{0, n+m}$), т.е. решение уравнения (4.1.10) является решением системы (4.1.3)-(4.1.5).

Обратное становится вполне очевидным, если уравнения в (4.1.13) умножить соответственно на выражения

$$2^{-n} \cdot \binom{n}{i} (t+1)^i (1-t)^{n-i} \quad (i = \overline{0, n})$$

и почленно сложить.

Таким образом, для получения утверждений теоремы 4.1.1 достаточно доказать существование и сходимость решений уравнений (4.1.10).

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 4.1.1. Для любой функции $g \in C\{m; 0\}$ справедлива оценка

$$\|g - \mathcal{B}g\|_{C\{m; 0\}} \leq e_{49} \cdot \omega(Tg; \Delta_n).$$

Истинность леммы 4.1.1 легко следует из соотношений (1.1.2), (4.1.9), (1.1.1) и оценки [91]

$$\|f - Bf\|_C \leq e_{49} \cdot \omega(f; \Delta_n) \quad (f \in C[-1; 1]). \quad (4.1.14)$$

Найдем теперь меру близости операторов A и A_n на X_n . Используя соотношения (4.1.8), (4.1.10), (1.1.1), (1.4.3) и (4.1.14), для произвольной функции $x_n \in X_n$ последовательно находим

$$\begin{aligned} \|Ax_n - A_n x_n\|_Y &= \|Kx_n - \mathcal{B}Kx_n\|_Y = \|TKx_n - BTKx_n\|_C = \\ &= \max_{-1 \leq t \leq 1} \left| \int_{-1}^1 h(t, s) z_n(s) ds + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i c_{i+n+1} f_i(t) - \int_{-1}^1 (B_i h)(t, s) z_n(s) ds - \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i c_{i+n+1} (Bf_i)(t) \right| \leq \\ &\leq 2 \cdot e_{49} \cdot \|z_n\|_C \cdot \omega_i(h; \Delta_n) + e_{49} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} |c_{i+n+1}| \omega(f_i; \Delta_n) \leq \\ &\leq e_{50} \|x_n\|_X \cdot \left[\omega_i(h; \Delta_n) + \sum_{i=0}^{m-1} \omega(f_i; \Delta_n) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\varepsilon^{(n)} \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \leq e_{50} \cdot \left[\omega_t(h; \Delta_n) + \sum_{i=0}^{m-1} \omega(f_i; \Delta_n) \right]. \quad (4.1.15)$$

Далее, по лемме 4.1.1 имеем

$$\nu^{(n)} \equiv \|y - \mathcal{B}y\|_Y \leq e_{49} \cdot \omega(Ty; \Delta_n). \quad (4.1.16)$$

Теперь из леммы 3.1.1, благодаря неравенствам (4.1.15) и (4.1.16), легко получить требуемые утверждения с оценкой (4.1.7).

Теорема доказана.

Следствие. Если существуют ограниченные производные $\partial h / \partial t$, df_i / dt ($i = \overline{0, m-1}$) и $d(Ty) / dt$ ($-1 \leq t, s \leq 1$), то в условиях теоремы 4.1.1 справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^*\| = O(1/\sqrt{n}).$$

Замечание 4.1.1. Поскольку $C\{0;0\} \equiv C[-1;1] \equiv D\{0;0\}$, при $m=0$ УТР (4.1.1) превращается в уравнение второго рода в $C[-1;1]$, а метод (4.1.5) – в известный вариант метода коллокации [38], причем $Ty = uy, h = K$. Следовательно, в этом частном случае оценка (4.1.7) совпадает с соответствующей уравнению второго рода оценкой [38].

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая УТР с коэффициентом, имеющим нули целого порядка внутри промежутка интегрирования. Поскольку здесь по сравнению с предыдущим частным случаем не возникает принципиальных затруднений, достаточно указать лишь основные результаты.

Итак, пусть дано УТР (2.1.3), в котором исходные данные K и y удовлетворяют следующим требованиям:

$$\left. \begin{aligned} K \in C_{\tau}^{\overline{m}}([-1,1]^2), \quad K_s^{(i)}(t, t_j) \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \\ (i = \overline{1, m_j - 1}, j = \overline{1, p}); \quad y \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.17)$$

$x \in D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ – искомый элемент.

Конечномерное приближение к точному решению УТР (2.1.3) будем искать в виде агрегата

$$x_n = x_n(t) = 2^{-n} \cdot \sum_{i=0}^n c_i \binom{n}{i} (t+1)^i (1-t)^{n-i} + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i+n+M(j-1)} \delta^{(i)}(t-t_j). \quad (4.1.18)$$

Неизвестные коэффициенты $c_i = c_i^{(n)}$ ($i = \overline{0, n+\mu}$) будем определять по предлагаемому методу из условий:

$$\left. \begin{aligned} (Ax_n - y)^{(i)}(t_j) &= 0 \quad (i = \overline{0, m_j-1}, j = \overline{1, p}); \\ c_i &= (Ty - TKx_n)(v_i) \quad (i = \overline{0, n}), \end{aligned} \right\} \quad (4.1.19)$$

где узлы v_i ($i = \overline{0, n}$) заданы согласно формуле (4.1.6).

Относительно схемы (2.1.3), (4.1.18), (4.1.19) имеет место

Теорема 4.1.2. Пусть однородное уравнение $Ax=0$ имеет в $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ лишь тривиальное решение. Тогда при достаточно больших n СЛАУ (4.1.19) имеет единственное решение $\{c_i^*\}_0^{n+\mu}$ и приближенные решения x_n^* , построенные по формуле (4.1.18) при $c_i = c_i^*$ ($i = \overline{0, n+\mu}$), сходятся к точному решению $x^* = A^{-1}y$ в смысле метрики пространства $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ с быстротой

$$\|x^* - x_n^*\| = O \left[\omega_t(h; \Delta_n) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \omega(f_{ji}; \Delta_n) + \omega(Ty; \Delta_n) \right], \quad (4.1.20)$$

где $h = TK$, $f_{ji}(t) = T(K_s^{(i)}(t, t_j))$ ($i = \overline{0, m_j-1}, j = \overline{1, p}$), $\Delta_n = 1/\sqrt{n}$.

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 4.1.1. При этом следует учесть тот факт, что СЛАУ (4.1.19) равносильна линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv Ux_n + BKx_n = By \quad (x_n \in X_n, By \in Y_n), \quad (4.1.21)$$

где $Ux \equiv x(t) \cdot \prod_{j=1}^p (t-t_j)^{m_j}$, $X_n = \text{span} \left\{ 2^{-n} \binom{n}{i} (t+1)^i (1-t)^{n-i} \right\}_{i=0}^n \oplus \text{span} \left\{ \delta^{(i)}(t-t_j) \mid i = \overline{0, m_j-1}, j = \overline{1, p} \right\}$, $Y_n = H_{n+\mu}$, \mathbf{a} $B = B_{n+\mu} : C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow H_{n+\mu}$ -

линейный оператор, заданный по закону

$$By \equiv (UBTy)(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} y^{(i)}(t_j) R_{ji}(t); \quad (4.1.22)$$

здесь по-прежнему $B : C \rightarrow H_n$ - оператор Бернштейна, $R_{ji}(t)$ - фундаментальные полиномы эрмитовой интерполяции.

Далее, вкратце остановимся на исследуемом методе решения УТР (2.1.3) в классе $v\{\overline{m};\overline{\tau}\}$. С целью упразднения громоздких выкладок при изложении ограничимся случаем $p=1$, $t_I=0$, т.е. будем рассматривать уравнение вида (4.1.1), в котором известные функции K и y подчинены условиям

$$\left. \begin{aligned} K &\in C_0^{\{m\}}([-1,1]^2), \psi_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t,0) \in C\{m;0\} \quad (i = \overline{1, m-1}), \\ \int_{-1}^1 (T_s^{i+1} K)(t,s) ds &\equiv g_i(t) \in C\{m;0\} \quad (i = \overline{0, m-1}); \\ y &\in C\{m;0\}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.23)$$

а $x \in V\{m;0\}$ – неизвестная обобщенная функция.

Приближенное решение уравнения (4.1.1) отыскивается в виде комбинации

$$x_n = x_n(t) = z_n(t) + \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+n+1} t^{-i-1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (4.1.24)$$

где полином z_n определен в (4.1.4), $c_i = c_i^{(n)}$ ($i = \overline{0, n+m}$) – подлежащие нахождению параметры. Их определяем по рассматриваемому методу из СЛАУ вида (4.1.5), в которой узлы v_i ($i = \overline{0, n}$) вычисляются по формуле (4.1.6).

Обоснование вычислительного алгоритма (4.1.1), (4.1.24), (4.1.5), (4.1.6) дается в следующей теореме.

Теорема 4.1.3. Если УТР $Ax=0$ обладает в $V\{m;0\}$ лишь нулевым решением, то при всех n , начиная с некоторого, приближенные решения x_n^* , определяемые из соотношений (4.1.24), (4.1.4), (4.1.5), (4.1.6), существуют, единственны и сходятся к точному решению $x^* = A^{-1}y$ в норме пространства $V\{m;0\}$ со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\| = O\left\{ \omega_t(h; \Delta_n) + \sum_{i=0}^{m-1} \omega(Tg_i; \Delta_n) + \sum_{i=0}^{m-1} \omega(T\psi_i; \Delta_n) + \omega(Ty; \Delta_n) \right\}, \quad (4.1.25)$$

где $h = T_K, \Delta_n = 1/\sqrt{n}$.

Доказательство. Уравнение (4.1.1) можно записать как операторное уравнение вида (4.1.8), где $X = V\{m;0\}$, $Y = C\{m;0\}$. В качестве $X_n \subset X$ возьмем

множество всевозможных элементов вида (4.1.24), а за $Y_n \subset Y$ примем H_{n+m} . Покажем, что система (4.1.24), (4.1.5) равносильна линейному операторному уравнению вида (4.1.10).

В самом деле, пусть x_n^* – решение уравнения (4.1.10). Тогда в силу (4.1.24), (4.1.9) и (4.1.10) имеем

$$t^m [z_n^*(t) + (BT(Kx_n^* - y))(t)] + \sum_{i=0}^{m-1} \{c_{n+m-i}^* + (Kx_n^* - y)^{(i)}(0)/i!\} t^i \equiv 0. \quad (4.1.26)$$

Ясно, что последнее равносильно следующей системе:

$$\left. \begin{aligned} z_n^*(t) &\equiv (BT(y - Kx_n^*))(t); \\ (Kx_n^* - y)^{(i)}(0) &= -c_{n+m-i}^* \cdot i! \quad (i = \overline{0, m-1}). \end{aligned} \right\} \quad (4.1.27)$$

Следовательно, рассуждая так же, как и в доказательстве теоремы 4.1.1, с учетом (4.1.8) и

$$(Ux_n^*)^{(i)}(0) = c_{n+m-i}^* \cdot i! \quad (i = \overline{0, m-1}),$$

из (4.1.27) получаем систему равенств вида (4.1.13).

Таким образом, СЛАУ вида (4.1.5) имеет решение $\{c_0^*, c_1^*, \dots, c_{n+m}^*\}$, т.е. решение уравнения (4.1.10) является решением системы (4.1.24), (4.1.5). Обратное очевидно.

Итак, для получения утверждений теоремы 4.1.3 достаточно установить существование, единственность и сходимости решений приближенных уравнений (4.1.10). Дальнейшее доказательство использует рассуждения, приведенные в теореме 4.1.1.

1.2. Метод коллокации, основанный на применении интерполяционного полинома Эрмита - Фейера. Приближенное решение задачи (4.1.1), (4.1.2) ищем в виде

$$x_n(t) = \sum_{i=0}^{2n-1} c_i t^i + \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+2n} \delta^{(i)}(t) \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (4.1.28)$$

где $c_i = c_i^{(n)}$ ($i = \overline{0, m+2n-1}$) – подлежащие определению коэффициенты. Их находим из СЛАУ:

$$\left. \begin{aligned} (TAx_n - Ty)(v_j) &= 0 \quad (j = \overline{1, n}); \\ (d(TUx_n)/dt)(v_j) &= 0 \quad (j = \overline{1, n}); \\ (Ax_n - y)^{(i)}(0) &= 0 \quad (i = \overline{0, m-1}), \end{aligned} \right\} (4.1.29)$$

где $\{v_j\}$ – система узлов Чебышева первого рода.

Относительно алгоритма (4.1.1), (4.1.2), (4.1.28), (4.1.29) справедлива

Теорема 4.1.4. Пусть УТР $Ax=0$ имеет в пространстве $D\{m,0\}$ лишь тривиальное решение, а функции $h = T, K$ (по t), $f_i(t) \equiv T(K_s^{(i)}(t,0))$ ($i = \overline{0, m-1}$) и $Ty \in \text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$). Тогда при достаточно больших n приближенные решения x_n^* , построенные по (4.1.28), (4.1.29), существуют, единственны и сходятся к точному решению x^* в смысле метрики пространства $D\{m,0\}$ со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\| = O(n^{-\alpha/2}).$$

В самом деле, для получения требуемых утверждений достаточно повторить схему доказательства теоремы 4.1.1 с учетом того, что в данном случае СЛАУ (4.1.29) равносильна линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv F A x_n = F y \quad (x_n \in X_n, F y \in Y_n), (4.1.30)$$

где X_n – множество всех образований x_n вида (4.1.28) таких, что $(d(TUx_n/dt))(v_j) = 0$ ($j = \overline{1, n}$); а подпространство Y_n состоит из всех полиномов $y_n \in H_{2n+m-1}$, обладающих свойством

$$(d(Ty_n)/dt)(v_j) = 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Здесь $F = F_{2n+m-1} : C\{m;0\} \rightarrow H_{2n+m-1}$ – линейный оператор, введенный и изученный в пункте 5.5 гл. I.

Только что полученный результат легко обобщается на случай УТР общего вида (2.1.3). А именно, конечномерную аппроксимацию решения задачи (2.1.3), (4.1.17) будем искать в виде

$$x_n = \sum_{i=0}^{2n-1} c_i t^i + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i+2n+M(j-1)} \delta^{(i)}(t-t_j), (4.1.31)$$

искомые параметры $c_i = c_i^{(n)}$ ($i = \overline{0, 2n + \mu - 1}$) будем находить из условий (т.е. СЛАУ):

$$\left. \begin{aligned} (TAx_n - Ty)(v_j) &= 0 \quad (j = \overline{1, n}); \\ (d(TUx_n)/dt)(v_j) &= 0 \quad (j = \overline{1, n}); \\ (Ax_n - y)^{[i]}(t_j) &= 0 \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}), \end{aligned} \right\} (4.1.32)$$

где v_j такие же, что и выше.

Теорема 4.1.5. Пусть $\ker A = \{0\}$ в $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$, а $h = T_i K$ (по t), $f_{ji}(t) \equiv T(K_s^{[i]}(t, t_j))$ ($i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}$) и $Ty \in \text{Lip } \alpha$ ($\alpha \in (0, 1]$). Тогда при достаточно больших n СЛАУ (4.1.32) имеет единственное решение $\{c_i^*\}_0^{2n+\mu-1}$ и последовательность (x_n^*) , образованная по формуле (4.1.31) при $\{c_i = c_i^*\}$, сходится к $x^* = A^{-1}y$ в норме $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ с быстротой

$$\|x^* - x_n^*\| \leq e_{51} \cdot n^{-\alpha/2}.$$

Доказательство идентично доказательству теоремы 4.1.4.

Замечание 4.1.2. Рассуждая аналогично изложенному в предыдущем пункте 1.1, строится вычислительная схема на основе данного варианта метода коллокации для решения УТР (2.1.3) в классе $v\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$. При этом получается такой же порядок $O(n^{-\alpha/2})$ для погрешности приближенных решений.

1.3. Метод подобластей, основанный на применении полиномов Канторовича. Приближенное решение задачи (4.1.1), (4.1.2) ищем в виде (4.1.3)-(4.1.4). Неизвестные параметры $c_i = c_i^{(n)}$ ($i = \overline{0, n + m}$) находим по настоящему методу из СЛАУ

$$\left. \begin{aligned} c_i &= (n+1) \int_{v_i}^{v_{i+1}} (Ty - TKx_n)(t) dt \quad (i = \overline{0, n}); \\ (Ax_n - y)^{[i]}(0) &= 0 \quad (i = \overline{0, m-1}), \end{aligned} \right\} (4.1.33)$$

где система узлов $\{v_i\}$ задается по формуле

$$v_i = v_i^{(n)} = -1 + 2i/(n+1) \quad (i = \overline{0, n+1}). \quad (4.1.34)$$

Пусть $K = K_{n+m} : C\{m;0\} \rightarrow H_{n+m}$ — линейное отображение, ставящее в соответствие каждой функции $y \in C\{m;0\}$ алгебраический полином

$$Ky = K_{n+m}(y;t) \equiv t^m (PTy)(t) + \sum_{i=0}^{m-1} y^{(i)}(0)t^i/i!, \quad (4.135)$$

где $P = P_n : C[-1,1] \rightarrow H_n$ означает оператор, который любой функции $f \in C$ сопоставляет полином Канторовича (см., напр., [57])

$$Pf = P_n(f;t) \equiv 2^{-n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (t+1)^i (1-t)^{n-i} (n+1) \int_{v_i}^{v_{i+1}} f(s) ds.$$

Тогда имеет место

Лемма 4.1.2. Верна оценка

$$\|y - Ky\|_{C\{m;0\}} \leq (1 + \sqrt{2})\omega(Ty; 1/\sqrt{n+1}) \quad (y \in C\{m;0\}). \quad (4.136)$$

Ее доказательство легко следует из соотношений (1.1.2), (4.1.35), (1.1.1) и оценки [110]

$$\|f - Pf\|_C \leq (1 + \sqrt{2})\omega(f; 1/\sqrt{n+1}) \quad (f \in C). \quad (4.137)$$

Для вычислительной схемы (4.1.1)-(4.1.4), (4.1.33), (4.1.34) справедлива следующая

Теорема 4.1.6. Если однородное уравнение $Ax = 0$ имеет в $D\{m,0\}$ лишь тривиальное решение, то при всех натуральных n , начиная с некоторого номера, СЛАУ (4.1.33) обладает единственным решением $\{c_0^*, c_1^*, \dots, c_{n+m}^*\}$. Более того, приближенные решения

$$x_n^*(t) = 2^{-n} \cdot \sum_{i=0}^n c_i^* \binom{n}{i} (t+1)^i (1-t)^{n-i} + \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+n+1}^* \delta^{(i)}(t)$$

сходятся к точному решению $x^* = A^{-1}y$ в том смысле, что

$$\|x^* - x_n^*\|_{D\{m;0\}} = O \left\{ \omega_i(h; 1/\sqrt{n+1}) + \sum_{i=0}^{m-1} \omega(f_i; 1/\sqrt{n+1}) + \omega(Ty; 1/\sqrt{n+1}) \right\}, \quad (4.138)$$

где $h = T, K$, $f_i(t) = T(K_s^{(i)}(t,0))$ ($i = \overline{0, m-1}$).

Доказательство использует рассуждения, изложенные при доказательстве теоремы 4.1.1. В данном случае существенно применяются

оценки (4.1.36), (4.1.37) и тот факт, что система (4.1.33) эквивалентна следующему функциональному уравнению:

$$A_n x_n \equiv Ux_n + K K x_n = Ky \quad (x_n \in X_n, Ky \in Y_n), \quad (4.1.39)$$

Где $X_n = \text{span} \left\{ 2^{-n} \binom{n}{i} (t+1)^i (1-t)^{n-i} \right\}_{i=0}^n \oplus \text{span} \left\{ \delta^{(i)}(t) \right\}_0^{m-1}$, $Y_n = H_{n+m}$.

Замечание 4.1.3. Что касается приближенного решения УТР (2.1.3) в пространстве $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ и $V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$, соответствующие вычислительные алгоритмы на базе исследуемого метода строятся и обосновываются аналогично изложенным в пункте 1.1 настоящей главы. При этом справедливы утверждения типа теорем 4.1.2 и 4.1.3.

Замечание 4.1.4. Отметим, что в случае «полиномиальных» методов пунктов 1.1 и 1.3 имеет место безусловная сходимость последовательности приближенных решений к решению однозначно разрешимого УТР. Однако, эти методы дают наивысший порядок $o(\Delta_n)$ для погрешности приближенных решений (см., напр., следствие из теоремы 4.1.1). Это означает, что скорость сходимости рассмотренных методов плохо реагирует на улучшение степени гладкости исходных данных. Указанного недостатка лишены прямые «полиномиальные» методы, предлагаемые на базе новых полиномиальных операторов, построенных и изученных в пунктах 5.4, 5.5 гл. I. Таким методам мы и посвящаем последующие пункты настоящего параграфа.

1.4. Обобщенный метод коллокации (ОМК). Пусть имеем УТР (2.1.3), в котором K и y – известные непрерывные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} K \in C_{\overline{\tau}}^{\{\overline{m}\}}([-1, 1]^2), \theta(t, s) = (T, K)(t, s) \in C_s^{\{\overline{m}\}}([-1, 1]^2), \\ K_s^{\{i\}}(t, t_j) \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \quad (i = \overline{1, m_j - 1}, j = \overline{1, p}); y \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.40)$$

а $x = x(t) \in D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ – искомая обобщенная функция.

Приближенное решение УТР (2.1.3) ищем в виде агрегата

$$x_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i+n+M(j-1)} \delta^{(i)}(t-t_j), \quad (4.141)$$

коэффициенты $c_i = c_i^{(n)} \left(i = \overline{0, n + \mu - 1}; \mu = M(p) = \sum_{i=1}^p m_i \right)$ которого определяем по

ОМК из СЛАУ

$$\left. \begin{aligned} (Ax_n - y)^{(i)}(t_j) &= 0 \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}); \\ (\text{T}Ax_n - \text{T}y)(v_j) &= 0 \quad (j = \overline{1, n}), \end{aligned} \right\} \quad (4.142)$$

где $\{v_j\}_1^n$ – любая из систем узлов (1.5.18) и (1.5.19), а $\overline{m} = (m_1, m_2, \dots, m_p)$ и $\overline{\tau} = (t_1, t_2, \dots, t_p)$ – конечные наборы соответствующих величин, фигурирующих в УТР (2.1.3).

Относительно алгоритма (2.1.3), (4.1.41), (4.1.42) верна следующая

Теорема 4.1.7. Пусть однородное УТР $Ax = 0$ имеет в $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ лишь нулевое решение, а функции $h(t, s) = (\text{T}_s \theta)(t, s) = (\text{T}_s \text{T}_i K)(t, s)$ (по аргументу t), $g_{ji}(t) = \theta_s^{(i)}(t, t_j)$ ($i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}$) и $(\text{T}y)(t)$ принадлежат классу Дини-Липшица. Тогда, хотя бы при достаточно больших n , приближенные решения $x_n^*(t)$, определяемые из (4.1.41), (4.1.42), существуют, единственны и сходятся к точному решению $x^*(t) = (A^{-1}y)(t)$ по норме пространства $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\| = O \left\{ \left[E_{n-1}'(h) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} E_{n-1}(g_{ji}) + E_{n-1}(\text{T}y) \right] \ln n \right\}. \quad (4.143)$$

Доказательство. УТР (2.1.3) рассмотрим как линейное операторное уравнение вида

$$Ax \equiv Ux + Kx = y \quad (x \in X, y \in Y), \quad (4.144)$$

где

$$\left. \begin{aligned} X &= D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}, Y = C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}, (Ux)(t) \equiv x(t) \cdot \prod_{j=1}^p (t - t_j)^{m_j}, \\ (Kx)(t) &\equiv \int_{-1}^1 K(t, s)x(s)ds \quad (-1 \leq t \leq 1). \end{aligned} \right\} \quad (4.145)$$

В качестве $(n + \mu)$ - мерного подпространства пространства X возьмем совокупность X_n всех образований вида (4.1.41), а за $Y_n \subset Y$ примем $H_{n+\mu-1}$. Покажем теперь, что система (4.1.41)-(4.1.42) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv \mathcal{L}Ax_n = Ux_n + \mathcal{L}Kx_n = \mathcal{L}y (x_n \in X_n, \mathcal{L}y \in Y_n), \quad (4.1.46)$$

где линейный оператор $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{n+\mu-1} : C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow H_{n+\mu-1}$ определен соотношением (1.5.20).

Действительно, пусть x_n^* – решение уравнения (4.1.46), т.е.

$$Ux_n^* + \mathcal{L}(Kx_n^* - y) = 0.$$

Отсюда на основании (4.1.41) и (1.5.20) следует, что

$$\{(T Ux_n^*)(t) + (PT(Kx_n^* - y))(t)\} \cdot \prod_{j=1}^p (t - t_j)^{m_j} + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} (Kx_n^* - y)^{\{i\}}(t_j) \cdot R_{j_i}(t) \equiv 0. \quad (4.1.47)$$

Тогда в силу (1.4.8) и (2.3.6) из (4.1.47) получаем следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} T Ux_n^* + PT Kx_n^* - PT y &= 0; \\ (Kx_n^* - y)^{\{i\}}(t_j) &= 0 \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}). \end{aligned} \right\} \quad (4.1.48)$$

Но имеют место очевидные соотношения:

$$PT Kx_n^* = PT(Ax_n^* - Ux_n^*) = PT Ax_n^* - T Ux_n^*$$

и

$$(Ux_n^*)^{\{i\}}(t_j) = 0 \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}).$$

Следовательно, система (4.1.48) приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} P(TAx_n^* - Ty) &= 0; \\ (Ax_n^* - y)^{\{i\}}(t_j) &= 0 \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}). \end{aligned} \right\}$$

т.е.

$$\left. \begin{aligned} (Ax_n^* - y)^{\{i\}}(t_j) &= 0 \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}); \\ (TAx_n^* - Ty)(v_j) &= 0 \quad (j = \overline{1, n}). \end{aligned} \right\} \quad (4.1.49)$$

Итак, СЛАУ (4.1.42) имеет решение $\{c_i^*\}_0^{n+\mu-1}$, т.е. решение уравнения (4.1.46) является решением системы (4.1.41)-(4.1.42).

Для получения обратного утверждения достаточно провести эти же рассуждения, но только строго в обратном порядке.

Далее, покажем близость операторов A и A_n на подпространстве X_n . В силу (4.1.44)-(4.1.46) и теоремы 1.5.6 для любого элемента $x_n \in X_n$ имеем

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y = \|Kx_n - \mathcal{L}Kx_n\|_Y \leq e_{10} E_{n-1}(TKx_n) \ln n. \quad (4.1.50)$$

Теперь с целью аппроксимации элемента $TKx_n \in C[-1,1]$ образуем функцию

$$\begin{aligned} (\Psi x_n)(t) \equiv \int_{-1}^1 \psi(t, s) x_n(s) ds &= \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot s^i \cdot \psi(t, s) ds + \\ &+ \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i+n+M(j-1)} \cdot (-1)^i \cdot \psi_s^{(i)}(t, t_j). \end{aligned} \quad (4.1.51)$$

Здесь функцию $\psi(t, s) \in C_s^{(m)}([-1,1]^2)$ мы взяли в силу леммы 1.4.6, и по ее виду (1.4.9) ясно, что $\Psi x_n \in H_{n-1}$.

Далее, используя равенства (4.1.51), (1.4.11) и свойства (i)–(ii) функции $\psi(t, s)$, последовательно находим

$$\begin{aligned} E_{n-1}(TKx_n) &\leq \|TKx_n - \Psi x_n\|_C = \\ &= \max_{-1 \leq t \leq 1} \left| \int_{-1}^1 (TK)(t, s) x_n(s) ds - \int_{-1}^1 \psi(t, s) x_n(s) ds \right| = \\ &= \max_t \left| \int_{-1}^1 c_i s^i \cdot \theta(t, s) ds + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i+n+M(j-1)} \cdot (-1)^i \theta_s^{(i)}(t, t_j) - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^{n-1} c_i s^i \cdot \psi(t, s) ds - \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i+n+M(j-1)} \cdot (-1)^i \psi_s^{(i)}(t, t_j) \right| \leq \\ &\leq 2 \cdot \max_{-1 \leq s \leq 1} \left| \sum_{i=0}^{n-1} c_i s^i \right| \cdot \max_{(t,s) \in [-1,1]^2} |(\theta - \psi)(t, s)| + \\ &\quad + \sum_j \sum_i |c_{i+n+M(j-1)}| \cdot \max_t |(\theta - \psi)_s^{(i)}(t, t_j)| \leq \\ &\leq e_{52} \mathcal{E}_{n-1}(\theta) \cdot \left\{ \max_s \left| \sum_{i=0}^{n-1} c_i s^i \right| + \sum_j \sum_i |c_{i+n+M(j-1)}| \right\} = \end{aligned}$$

$$= e_{52} \left\{ E_{n-1}^t(h) + \sum_j \sum_i E_{n-1}(g_{ji}) \right\} \cdot \|x_n\|_X. \quad (4.1.52)$$

Следовательно, из (4.1.50) и (4.1.52) следует неравенство

$$\varepsilon^{(n)} \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \leq e_{53} \left[E_{n-1}^t(h) + \sum_j \sum_i E_{n-1}(g_{ji}) \right] \ln n. \quad (4.1.53)$$

В условиях настоящей теоремы в силу теоремы Джексона (см., напр., [31]) очевидно, что $\varepsilon^{(n)} = o(1)$ ($n \rightarrow \infty$). Поэтому по лемме 3.1.1 при всех n таких, что $q_n \equiv \|A^{-1}\| \cdot \varepsilon^{(n)} < 1$, операторы $A_n : X_n \rightarrow Y_n$, определенные в (4.1.46), непрерывно обратимы и обратные операторы ограничены по норме в совокупности:

$$\|A_n^{-1}\| = O(1) \quad (n \geq n_{14}, A_n^{-1} : Y_n \rightarrow X_n).$$

Для правых частей уравнений (4.1.44) и (4.1.46) имеем

$$v^{(n)} \equiv \|y - \mathcal{L}y\|_Y \leq e_{10} E_{n-1}(Ty) \ln n. \quad (4.1.54)$$

Теперь благодаря неравенствам (4.1.53), (4.1.54) и вышеупомянутой теореме Джексона из леммы 3.1.1 следуют утверждения теоремы 4.1.7 с оценкой (4.1.43). Теорема 4.1.7 полностью доказана.

Следствие. Если функции $K(t, s)$ (по t), $y(t) \in C^{(r)}[-1, 1]$ и производные $K_t^{(r)}, y^{(r)} \in \text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$), то в условиях теоремы 4.1.7 справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right) \quad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

Имеет место следующий интересный факт.

Замечание 4.1.5. Поскольку $C\{\overline{0}; \overline{\tau}\} \equiv C[-1, 1] \equiv D\{\overline{0}; \overline{\tau}\}$, при $m_j = 0$ ($j = \overline{1, p}$) из УТР (2.1.3) получается интегральное уравнение Фредгольма второго рода в пространстве $C[-1, 1]$, а предложенный выше прямой метод (4.1.42) превращается в хорошо известный метод коллокации (предложенное название метода (4.1.42) вполне правомерное!), причем $(Ty)(t) = y(t)$, $h(t, s) = K(t, s)$. Поэтому оценка теоремы 4.1.7 хорошо согласуется с соответствующей уравнению второго рода оценкой [27].

Для приложений удобной может оказаться следующая

Теорема 4.1.8. Пусть УТР (2.1.3) имеет решение вида

$$x^*(t) = z^*(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \omega_{ji}^* \delta^{(i)}(t - t_j) \in X = D\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \quad (4.1.55)$$

при данной правой части $y \in Y = C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ и аппроксимирующий оператор A_n непрерывно обратим. Тогда погрешность приближенного решения $x_n^* \in X_n$ для правой части $y_n = \mathcal{L}y \in Y_n$ представима в виде

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O[E_{n-1}(z^*) \ln n].$$

Доказательство легко следует из леммы 3.1.2 с учетом следствия из теоремы 1.5.14 и замечания 1.5.4.

Следствие. Пусть в условиях теоремы 4.1.7 непрерывное слагаемое $z^*(t)$ решения (4.1.55) принадлежит классу Дини-Липшица. Тогда последовательность (x_n^*) приближенных решений сходится к точному решению x^* УТР (2.1.3) по метрике пространства $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$.

Дадим теперь обоснование ОМК при решении УТР (2.1.3) в классе $V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$.

Пусть дано уравнение (2.1.3), в котором ядро K интегрального оператора удовлетворяет требованиям (2.2.6), причем

$$\theta = \Gamma, K \in C_s^{\{\overline{m}\}}([-1, 1]^2), y \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}, \quad (4.1.56)$$

$x = x(t) \in V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ – искомый элемент.

Конечномерное приближение к точному решению $x^*(t) = (A^{-1}y)(t)$ будем искать в виде комбинации

$$x_n(t) = z_{n-1}(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i+n+M(j-1)} \cdot (t - t_j)^{-i-1}, \quad (4.1.57)$$

$$z_{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot t^i. \quad (4.1.58)$$

Неизвестные параметры $c_i = c_i^{(n)}$ ($i = \overline{0, n + \mu - 1}$) будем находить согласно ОМК из условий вида (4.1.42), в которых $v_j = v_j^{(n)} \in [-1, 1]$ – узлы Чебышева первого (или второго) рода.

Для вычислительной схемы (2.1.3), (4.1.57)-(4.1.58), (4.1.42) справедлива

Теорема 4.1.9. Пусть выполнены условия:

- (i) $\ker A = \{0\}$ ($A : V \{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow C \{\overline{m}; \overline{\tau}\}$);
(ii) $h = T_s \theta$ (по t), $g_{ji}(t) \equiv \theta_s^{(i)}(t, t_j)$ ($i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}$), $Ty \in D \text{Lip}$.

Тогда при достаточно больших n СЛАУ (4.1.42) имеет единственное решение $\{c_i^*\}_0^{n+\mu-1}$ и приближенные решения x_n^* , построенные по формуле (4.1.57)-(4.1.58) при $\{c_i = c_i^*\}$, сходятся к $x^* = A^{-1}y$ в смысле метрики пространства $v \{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ с быстротой

$$\|x^* - x_n^*\| \leq e_{54} \left\{ \left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} E_{n-1}(g_{ji}) + E_{n-1}(Ty) \right] \ln n \right\}. \quad (4.1.59)$$

Доказательство. Уравнение (2.1.3) будем рассматривать как функциональное уравнение вида (4.1.44), в котором $x \in X = V \{\overline{m}; \overline{\tau}\}$, $y \in Y = C \{\overline{m}; \overline{\tau}\}$. Конечномерные подпространства основных пространств X и Y выберем соответственно следующим образом:

$$X_n = H_{n+\mu-1}^{\text{F.P.}}, Y_n = H_{n+\mu-1}.$$

Тогда система (4.1.57), (4.1.58), (4.1.42) равносильна операторному уравнению вида (4.1.46). Покажем это.

Пусть

$$x_n^*(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i^* \cdot t^i + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i+n+M(j-1)}^* \cdot (t-t_j)^{i-1} \quad (4.1.60)$$

– решение уравнения (4.1.46), т.е.

$$Ux_n^* + \mathcal{L}(Kx_n^* - y) = 0.$$

Отсюда в силу (4.1.60) и (1.5.20) следует равенство

$$\begin{aligned} & (T Ux_n^* + P T(Kx_n^* - y))(t) \cdot \prod_{j=1}^p (t-t_j)^{m_j} + \\ & + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} [q_{ji} + (Kx_n^* - y)^{(i)}(t_j)] \cdot R_{ji}(t) \equiv 0, \quad (4.1.61) \end{aligned}$$

где

$$q_{ji} = Q_{\mu-1}^{(i)}(t_j) \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}),$$

$$\begin{aligned} Q_{\mu-1}(t) &= \sum_j \sum_i c_{i+n+M(j-1)}^* \cdot (t-t_j)^{m_j-i-1} \cdot \prod_{k \neq j}^p (t-t_k)^{m_k} = \\ &= \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} q_{ji} \cdot R_{ji}(t) \in H_{\mu-1}. \end{aligned}$$

На основании (1.4.8) и (2.3.6) ясно, что тождество (4.1.61) эквивалентно системе

$$\left. \begin{aligned} T U x_n^* + P T K x_n^* - P T y &= 0; \\ q_{ji} + (K x_n^* - y)^{i}(t_j) &= 0 \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}). \end{aligned} \right\} (4.1.62)$$

Следовательно, рассуждая идентично изложенному в доказательстве теоремы 4.1.7, учитывая при этом (4.1.44) и

$$(U x_n^*)^i(t_j) = q_{ji} \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}),$$

из (4.1.62) получаем систему равенств вида (4.1.49). Таким образом, решение уравнения (4.1.46) есть решение системы (4.1.57), (4.1.58), (4.1.42). Обратное теперь вполне понятно.

Далее, найдем меру близости операторов A и A_n на X_n . Для всякой функции $x_n \in X_n$ имеем неравенство вида (4.1.50). С целью оценки величины $E_{n-1}(TKx_n)$ построим функцию

$$\begin{aligned} (\Psi x_n)(t) &\equiv \int_{-1}^1 \psi(t, s) x_n(s) ds = \int_{-1}^1 \psi(t, s) z_{n-1}(s) ds + \\ &+ \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i+n+M(j-1)}^* \cdot \left\{ \int_{-1}^1 (T_s^{i+1} \psi)_j(t, s) ds + \sum_{k=0}^i (k!)^{-1} \psi_s^{\{k\}}(t, t_j) \cdot \int_{-1}^1 \frac{ds}{(s-t_j)^{i+1-k}} \right\}, \end{aligned} \quad (4.1.63)$$

где $\psi(t, s) \in C_S^{\{m\}}([-1, 1]^2)$ взята на основании леммы 1.4.6. В силу (4.1.63) и (1.4.9) ясно, что $\Psi x_n \in H_{n-1}$.

Теперь используя соотношения (4.1.63), (1.4.11) и свойства (i)–(iii) функции $\psi(t, s)$, последовательно выводим

$$\begin{aligned} E_{n-1}(TKx_n) &\leq \|TKx_n - \Psi x_n\|_C = \\ &= \max_t \left| \int_{-1}^1 (\theta - \psi)(t, s) \cdot z_{n-1}(s) ds + \sum_j \sum_i c_{i+n+M(j-1)}^* \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \int_{-1}^1 (T_s^{i+1}(\theta - \psi))_j(t, s) ds + \sum_{k=0}^i (k!)^{-1} (\theta - \psi)_s^{\{k\}}(t, t_j) \cdot \int_{-1}^1 \frac{ds}{(s - t_j)^{i+1-k}} \right\} \leq \\
& \leq 2 \|z_{n-1}\|_C \cdot \|\theta - \psi\|_C + \\
& + \sum_j \sum_i |c_{i+n+M(j-1)}| \cdot \left\{ 2 \|(T_s^{i+1}(\theta - \psi))_j\|_C + \sum_{k=0}^i \|(\theta - \psi)_s^{\{k\}}(t, t_j)\|_C \cdot \int_{-1}^1 \frac{ds}{(s - t_j)^{i+1-k}} \right\} \leq \\
& \leq 2 \|z_{n-1}\|_C \cdot e_5 \varepsilon'_{n-1}(\theta) + \zeta \cdot \sum_j \sum_i |c_{i+n+M(j-1)}| \cdot \{e_7 \varepsilon'_{n-1}(\theta) + e_6 \varepsilon'_{n-1}(\theta)\} \leq \\
& \leq e_{55} \varepsilon'_{n-1}(\theta) \cdot \|x_n\|_X, \quad (4.1.64)
\end{aligned}$$

где

$$e_{55} = \max \{2e_5, \zeta(e_6 + e_7)\}, \zeta = \max \{2, \gamma\},$$

$$\gamma = \max_{\substack{0 \leq i \leq m_j - 1, \\ 1 \leq j \leq p}} \sum_{k=0}^i \left| \int_{-1}^1 \frac{ds}{(s - t_j)^{i+1-k}} \right|.$$

Следовательно, из (4.1.50) и (4.1.64) следует оценка

$$\varepsilon^{(n)} \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} = O[\varepsilon'_{n-1}(\theta) \ln n] \quad (4.1.65)$$

Благодаря оценкам (4.1.65) и (4.1.54) из леммы 3.1.1 получаем утверждения настоящей теоремы с оценкой (4.1.59). Доказательство теоремы 4.1.9 завершено.

Следствие. Если K (по t), $y \in N_\alpha^r$, то в условиях теоремы 4.1.9 верна оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{V\{\bar{m}; \bar{\tau}\}} = O(n^{-r-\alpha} \cdot \ln n) \quad (0 < \alpha \leq 1, r + 1 \in \mathbb{N}).$$

Замечание 4.1.6. Факт, изложенный в замечании 4.1.5, остается в силе и в данном случае решения УТР в классе $V\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$.

Для приложений полезной может оказаться следующая

Теорема 4.1.10. Пусть уравнение (2.1.3) имеет решение вида

$$x^*(t) = z^*(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \alpha_{ji}^* (t - t_j)^{-i-1} \in X = V\{\bar{m}; \bar{\tau}\} \quad (4.1.66)$$

при правой части $y \in Y = C\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ и приближенный оператор $A_n = LA$ непрерывно обратим. Тогда имеет место оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{E_{n-1}(z^*) \ln n\} \quad (x^* = A^{-1}y, x_n^* = A_n^{-1}Ly).$$

Доказательство идентично доказательству теоремы 4.1.8.

Следствие. Если в условиях теоремы 4.1.9 $z^* = T U x^* \in D \text{Lip}$, то приближенные решения x_n^* сходятся к точному решению $x^* = A^{-1}y$ по норме пространства $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$.

1.5. Обобщенный метод моментов (ОММ). Приближенное решение задачи (2.1.3), (4.1.40) ищем в виде линейной комбинации (4.1.41), коэффициенты которой определяем по ОММ из СЛАУ:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 \rho(t) (T A x_n - T y)(t) T_j(t) dt = 0 \quad (j = \overline{0, n-1}); \\ (A x_n - y)^{(i)}(t_j) = 0 \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}), \end{aligned} \right\} (4.1.67)$$

где $\{T_j(t)\}$ – полная ортонормированная на $[-1, 1]$ по весу $\rho(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$ система полиномов Чебышева первого рода.

Обоснование вычислительной схемы (2.1.3), (4.1.41), (4.1.67) дается в следующем утверждении.

Теорема 4.1.11. Пусть однородное УТР $Ax = 0$ имеет в $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ лишь тривиальное решение, а функции $h = T_s \theta = T_s T_t K$ (по t), $g_{ji}(t) \equiv \theta_S^{(i)}(t, t_j)$ ($i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}$), $Ty \in D \text{Lip}$. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого номера n_{15} , приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные на основании условий (4.1.41), (4.1.67), существуют, единственны и сходятся по норме $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ к точному решению $x^*(t)$ уравнения (2.1.3) со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\| \leq e_{56} \left\{ \left[E_{n-1}'(h) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} E_{n-1}(g_{ji}) + E_{n-1}(Ty) \right] \ln n \right\}. \quad (4.1.68)$$

Для доказательства данной теоремы достаточно повторить рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 4.1.7, с учетом того, что в случае ОММ система (4.1.41), (4.1.67) эквивалентна следующему линейному функциональному уравнению:

$$A_n x_n \equiv \mathfrak{A} x_n = \mathfrak{A} y \quad (x_n \in X_n, \mathfrak{A} y \in Y_n), \quad (4.1.69)$$

где

$$X_n = H_{n+\mu-1}^\delta, Y_n = H_{n+\mu-1},$$

а $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{n+\mu-1} : C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow H_{n+\mu-1}$ – обобщенный оператор Фурье, построенный и изученный в пункте 5.5 главы I (см. теорему 1.5.7).

Следствие. Если функции K (по t), $y \in H_\alpha^r$ ($r+1 \in \mathbb{N}, 0 < \alpha \leq 1$), то при выполнении условий теоремы 4.1.11 имеет место оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Замечание 4.1.7. При $m_j = 0$ ($j = \overline{1, p}$) УТР (2.1.3) преобразуется в уравнение Фредгольма второго рода в классе $C[-1,1]$, а прямой метод (4.1.67) – в известный метод моментов (название метода (4.1.67) вполне оправдано!), причем $Ty = y, h = K$. Поэтому в этом частном случае оценка (4.1.68) совпадает с соответствующей уравнению второго рода оценкой [27].

Имеет место следующая

Теорема 4.1.12. Если УТР (2.1.3) имеет решение вида (4.1.55) при данном $y \in Y = C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ и аппроксимирующий оператор $A_n = \mathfrak{A}A$ непрерывно обратим, то погрешность приближенного решения $x_n^* \in X_n$ для правой части $y_n = \mathfrak{A}y \in Y_n$ представляется в виде

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{E_{n-1}(T U x^*) \ln n\}, \quad (4.1.70)$$

где $T U x^* = z^*$ – непрерывная компонента решения $x^* \in D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$.

Доказательство легко следует из леммы 3.1.2, следствия из теоремы 1.5.14 и теоремы 1.5.7.

Следствие. Если в условиях теоремы 4.1.11 $T U x^* \in D\text{Lip}$, то (x_n^*) сходится к $x^* = A^{-1}y$ в метрике $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$.

Теперь вкратце рассмотрим вопрос обоснования ОММ при решении уравнения (2.1.3) в пространстве $V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$.

Приближенное решение задачи (2.1.3), (2.2.6), (4.1.56) отыскиваем в виде (4.1.57)-(4.1.58). Неизвестные коэффициенты $c_i = c_i^{(n)} (i = \overline{0, n + \mu - 1})$ находим согласно ОММ из условий вида (4.1.67). Очевидно, что (4.1.67) есть квадратная СЛАУ относительно коэффициентов $c_0, c_1, \dots, c_{n+\mu-1}$ комбинации (4.1.57).

Замечание 4.1.8. В этом случае справедливы утверждения, полностью аналогичные теоремам 4.1.9 и 4.1.10, с такими же порядковыми скоростями сходимости приближенных решений. Они доказываются по той же схеме, что и теоремы 4.1.9 и 4.1.10 соответственно. При этом роль оператора \mathcal{L} в теоремах 4.1.9 и 4.1.10 играет полиномиальный оператор \mathcal{Z} .

1.6. Обобщенный метод подобластей (ОМП). Рассмотрим УТР (2.1.3), в котором исходные данные K и y удовлетворяют следующим условиям:

$$K \in C_{\tau}^{\{\overline{m}\}}([-1, 1]^2), K_S^{\{i\}}(t, t_j) \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \\ (i = \overline{1, m_j - 1}, j = \overline{1, p}); y \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}, \quad (4.1.71)$$

а $x \in D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ — неизвестная обобщенная функция.

Конечномерное приближение к решению уравнения (2.1.3) ищем в виде образования

$$x_n(t) = z_{n-1}(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i+n+M(j-1)} \cdot \delta^{\{i\}}(t - t_j), \quad (4.1.72)$$

$$z_{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot t^i. \quad (4.1.73)$$

Искомые параметры $c_i = c_i^{(n)} (i = \overline{0, n + \mu - 1})$ определяем по ОМП из условий (т.е. СЛАУ):

$$\left. \begin{aligned} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} (T A x_n - T y)(t) dt = 0 \quad (j = \overline{1, n}); \\ (A x_n - y)^{\{i\}}(t_j) = 0 \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}), \end{aligned} \right\} \quad (4.1.74)$$

где узлы $\tau_j = \tau_j^{(n)} \in [-1, 1]$ заданы по формуле (1.5.23).

Теорема 4.1.13. Пусть уравнение $Ax = 0$ имеет в классе $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ лишь нулевое решение, а функции $h = T_t K$ (по аргументу t), $f_{ji}(t) = T(K_s^{(i)}(t, t_j))$ ($i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}$) и T_y удовлетворяют условию Дини-Липшица. Тогда при достаточно больших n приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные алгоритмом (4.1.72)-(4.1.74), существуют, единственны и сходятся к точному решению $x^* = A^{-1}y$ по метрике пространства $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ с быстротой

$$\|x^* - x_n^*\| = O \left\{ \left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} E_{n-1}(f_{ji}) + E_{n-1}(T_y) \right] \ln n \right\}. \quad (4.1.75)$$

Доказательство. УТР (2.1.3) представим как линейное операторное уравнение вида (4.1.44).

В качестве $X_n \subset X$ примем множество всех элементов вида (4.1.72), а за $Y_n \subset Y$ возьмем $H_{n+\mu-1}$. Тогда систему (4.1.72)-(4.1.74) можно записать в виде эквивалентного ей операторного уравнения

$$A_n x_n \equiv \Phi A x_n = U x_n + \Phi K x_n = \Phi y \quad (x_n \in X_n, \Phi y \in Y_n), \quad (4.1.76)$$

где линейный оператор $\Phi = \Phi_{n+\mu-1} : C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow H_{n+\mu-1}$ введен и изучен в пункте 5.5 главы I (см. теорему 1.5.7). В этом нетрудно убедиться, проведя соответствующие рассуждения в доказательстве теоремы 4.1.7.

Покажем близость операторов A и A_n на подпространстве X_n . В силу (4.1.44), (4.1.76) и теоремы 1.5.7 для произвольного элемента $x_n \in X_n$ имеем

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y = O[E_{n-1}(TKx_n) \ln n]. \quad (4.1.77)$$

Теперь с целью приближения элемента $TKx_n \in C[-1, 1]$ образуем функцию

$$(\Psi_{n-1} x_n)(t) \equiv \int_{-1}^1 h_{n-1}^t(t, s) \cdot z_{n-1}(s) ds + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} (-1)^i c_{i+n+M(j-1)} \cdot f_{n-1}^{ji}(t), \quad (4.1.78)$$

где $h_{n-1}^t(t, s)$ и $f_{n-1}^{ji}(t)$ — полиномы степени $n-1$ наилучшего равномерного приближения для $h(t, s)$ (по t) и $f_{ji}(t)$ ($i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}$) соответственно.

Ясно, что $\Psi_{n-1} x_n \in H_{n-1}$.

Далее, используя равенства (4.1.78) и (1.4.11), последовательно
ВЫВОДИМ

$$\begin{aligned}
 E_{n-1}(TKx_n) &\leq \|TKx_n - \Psi_{n-1}x_n\|_C = \\
 &= \max_{-1 \leq t \leq 1} \left| \int_{-1}^1 (h - h'_{n-1})(t, s) \cdot z_{n-1}(s) ds + \sum_j \sum_i (-1)^i c_{i+n+M(j-1)} \cdot (f_{ji} - f'_{n-1})(t) \right| \leq \\
 &\leq 2 \|z_{n-1}\|_C \cdot E'_{n-1}(h) + \sum_j \sum_i |c_{i+n+M(j-1)}| \cdot E_{n-1}(f_{ji}) \leq \\
 &\leq 2 \left\{ E'_{n-1}(h) + \sum_j \sum_i E_{n-1}(f_{ji}) \right\} \|x_n\|_X. \quad (4.1.79)
 \end{aligned}$$

Следовательно, из (4.1.77) и (4.1.79) следует соотношение

$$\varepsilon^{(n)} \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} = O \left\{ \left[E'_{n-1}(h) + \sum_j \sum_i E_{n-1}(f_{ji}) \right] \ln n \right\}. \quad (4.1.80)$$

Расстояние между правыми частями уравнений (4.1.44) и (4.1.76) оценивается следующим образом:

$$\nu^{(n)} \equiv \|y - \Phi y\|_Y = O[E_{n-1}(Ty) \ln n]. \quad (4.1.81)$$

Таким образом, все условия леммы 3.1.1 выполнены, откуда с учетом неравенств (4.1.80) и (4.1.81) следуют утверждения доказываемой теоремы, в том числе и оценка (4.1.75). Доказательство теоремы 4.1.13 окончено.

Следствие. Если функции h (по t), f_{ji} , $Ty \in H'_\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$, $r = 0, 1, 2, \dots$), то в условиях теоремы 4.1.13 истинна оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{D(\overline{m, \overline{r}})} = O(n^{-r-\alpha} \cdot \ln n).$$

Замечание 4.1.9. При $m_j = 0 (j = \overline{1, p})$ УТР (2.1.3) превращается в уравнение второго рода в $C[-1, 1]$, а прямой проекционный метод (4.1.74) – в известный метод подобластей (название метода (4.1.74) вполне правомерное!), причем $Ty = y$, $h = K$. Следовательно, оценка теоремы 4.1.13 хорошо согласуется с соответствующей уравнению второго рода оценкой (см., напр., [34], гл. 2).

Замечание 4.1.10. В рассматриваемом случае ОМП имеет место также утверждение, совершенно аналогичное теореме 4.1.8. При этом роль

оператора \mathcal{L} в теореме 4.1.8 играет полиномиальный проекционный оператор Φ .

Перейдем теперь к обоснованию ОМП при приближенном решении УТР (2.1.3) в пространстве $V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$.

Пусть имеем уравнение (2.1.3), в котором ядро K удовлетворяет условиям (2.2.6), правая часть $y \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ и $x \in V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ – искомая обобщенная функция.

Приближенное решение УТР (2.1.3) будем отыскивать в виде линейной комбинации (4.1.57), коэффициенты которой будем определять согласно нашему методу из СЛАУ вида (4.1.74).

Для предлагаемой вычислительной схемы справедлива следующая

Теорема 4.1.14. Пусть выполнено условие (i) теоремы 4.1.9. Если функции $h(t, s) = (T_t K)(t, s)$ (по t), $f_{ji}(t) = T(K_s^{(i)}(t, t_j))$, $g_{ji}(t) = T\left(\int_{-1}^1 (T_s^{i+1} K)_j(t, s) ds\right)$ ($i = \overline{0, m_j - 1}$, $j = \overline{1, p}$) и Ty принадлежат к классу Дини-Липшица, то при достаточно больших n система (4.1.74) имеет единственное решение $\{c_i^*\}_0^{n+\mu-1}$. Более того, приближенные решения

$$x_n^*(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i^* \cdot t^i + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i+n+M(j-1)}^* \cdot (t - t_j)^{-i-1}$$

сходятся к точному решению $x^*(t) = (A^{-1}y)(t)$ в пространстве $V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\| = O\left\{\left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} (E_{n-1}(f_{ji}) + E_{n-1}(g_{ji})) + E_{n-1}(Ty)\right] \ln n\right\}. \quad (4.1.82)$$

Доказательство. УТР (2.1.3) запишем в операторном виде (4.1.44), где $X = V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$, $Y = C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$. Далее, пусть

$$X_n = H_{n+\mu-1}^{\text{F.P.}} \subset X, Y_n = H_{n+\mu-1} \subset Y.$$

Тогда, как несложно усмотреть (см. доказательство теоремы 4.1.9 с учетом (1.5.24) и теоремы 1.5.7), систему (4.1.57), (4.1.74) можно записать в виде равносильного ей линейного операторного уравнения (4.1.76).

Из уравнений (4.1.44) и (4.1.76) для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y \leq e_{57} \cdot E_{n-1}(TKx_n) \cdot \ln n. \quad (4.1.83)$$

Желая аппроксимировать функцию $TKx_n \in C[-1,1]$ посредством полиномов, построим следующий агрегат:

$$\begin{aligned} (\Phi_{n-1} x_n)(t) \equiv & \int_{-1}^1 h'_{n-1}(t, s) \cdot z_{n-1}(s) ds + \\ & + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i+n+M(j-1)} \left\{ g_{n-1}^{ji}(t) + \sum_{k=0}^i (k!)^{-1} \cdot \eta_{ik}^j \cdot f_{n-1}^{jk}(t) \right\}, \quad (4.1.84) \end{aligned}$$

где $h'_{n-1}(t, s)$, $g_{n-1}^{ji}(t)$ и $f_{n-1}^{jk}(t)$ обозначают, как и выше, полиномы степени $n-1$ наилучшего равномерного приближения для $h(t, s)$ (по t), $g_{ji}(t)$ и $f_{jk}(t)$

соответственно; а $\eta_{ik}^j \equiv \int_{-1}^1 \frac{ds}{(s-t_j)^{i+1-k}}$. По виду (4.1.84) ясно, что $\Phi_{n-1} x_n \in H_{n-1}$.

Принимая во внимание соотношения (4.1.84) и (1.4.11), последовательно находим:

$$\begin{aligned} E_{n-1}(TKx_n) & \leq \|TKx_n - \Phi_{n-1} x_n\|_C = \\ & = \max_t \left| \int_{-1}^1 (h - h'_{n-1})(t, s) \cdot z_{n-1}(s) ds + \right. \\ & \left. + \sum_j \sum_i c_{i+n+M(j-1)} \left\{ (g_{ji} - g_{n-1}^{ji})(t) + \sum_{k=0}^i (k!)^{-1} \cdot \eta_{ik}^j \cdot (f_{jk} - f_{n-1}^{jk})(t) \right\} \right| \leq \\ & \leq 2 \|z_{n-1}\|_C \cdot E'_{n-1}(h) + \sum_j \sum_i |c_{i+n+M(j-1)}| \cdot \left\{ E_{n-1}(g_{ji}) + \sum_k |\eta_{ik}^j| \cdot E_{n-1}(f_{jk}) \right\} \leq \\ & \leq \left\{ \text{пусть } \eta = \max_{k,i,j} \eta_{ik}^j \right\} \leq 2 \|x_n\|_X \cdot E'_{n-1}(h) + \\ & + \|x_n\|_X \cdot \left\{ \sum_j \sum_i E_{n-1}(g_{ji}) + \eta \sum_j \sum_i \left(\sum_k E_{n-1}(f_{jk}) \right) \right\} = \\ & = 2 \|x_n\|_X E'_{n-1}(h) + \|x_n\|_X \left\{ \sum_j \sum_i E_{n-1}(g_{ji}) + \eta \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=0}^{m_j-1} (m_j - i) \cdot E_{n-1}(f_{ji}) \right) \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left\{ \begin{array}{l} \text{введем обозначени } \gamma : e_{58} = \max \{2, \eta \cdot \tilde{m}\}, \tilde{m} = \max \{m_j\}_1^p \end{array} \right\} \leq \\ \leq e_{58} \|x_n\| \cdot \left[E_{n-1}^t(h) + \sum_j \sum_i (E_{n-1}(g_{ji}) + E_{n-1}(f_{ji})) \right]. \quad (4.1.85)$$

Из (4.1.83) и (4.1.85) следует оценка

$$\varepsilon^{(n)} \equiv \|A - A_n\| = O \left\{ \left[E_{n-1}^t(h) + \sum_j \sum_i (E_{n-1}(g_{ji}) + E_{n-1}(f_{ji})) \right] \ln n \right\} \quad (A - A_n : X_n \rightarrow Y). \quad (4.1.86)$$

Теперь с учетом (4.1.86) и (4.1.81) из леммы 3.1.1 следуют утверждения теоремы 4.1.14, в частности, оценка погрешности (4.1.82).

Следствие. Пусть функции h (по t), f_{ji}, g_{ji} , $Ty \in H_\alpha^r$ ($0 < \alpha \leq 1, r+1 \in \mathbb{N}$).

Тогда при выполнении условий теоремы 4.1.14 справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} = O(n^{-r-\alpha} \cdot \ln n).$$

Замечание 4.1.11. Содержание замечания 4.1.9 сохраняется и в рассматриваемом случае решения УТР (2.1.3) в пространстве $V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$.

Замечание 4.1.12. В данном случае ОМП решения УТР в $V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ справедлива теорема, полностью аналогичная теореме 4.1.10. При этом вместо оператора \mathcal{L} в теореме 4.1.10 следует брать оператор \mathcal{P} .

1.7. Обобщенный метод коллокации - подобластей (ОМК-П).

Приближенное решение задачи (2.1.3), (4.1.40) ищем в виде образования

$$x_n(t) = \sum_{i=0}^{2n} c_i t^i + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i+2n+1+M(j-1)} \delta^{(i)}(t-t_j), \quad (4.1.87)$$

коэффициенты $c_i = c_i^{(n)}$ ($i = \overline{0, 2n + \mu}$) которого определяем по предлагаемому методу из следующей СЛАУ:

$$\left. \begin{array}{l} (TAx_n - Ty)(v_j) = 0 \quad (j = \overline{1, n+1}); \\ \int_{v_j}^{v_{j+1}} (TAx_n - Ty)(t) dt = 0 \quad (j = \overline{1, n}); \\ (Ax_n - y)^{(i)}(t_j) = 0 \quad (i = \overline{0, m_j-1}, j = \overline{1, p}), \end{array} \right\} \quad (4.1.88)$$

где $v_j = v_j^{(n)} \in [-1, 1]$ — узлы Чебышева первого рода вида (1.5.18).

Относительно алгоритма (2.1.3), (4.1.87), (4.1.88) справедлива следующая

Теорема 4.1.15. Пусть уравнение (2.1.3) однозначно разрешимо в пространстве $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ при любой правой части $y \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$, а функции $h = T_s \theta = T_s T_t K$ (по t), $g_{ji}(t) = \theta_s^{(i)}(t, t_j) (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p})$ и

$Ty \in H_\alpha^r$ ($0 < \alpha \leq 1, r - 1 \in \mathbb{N}$). Тогда при всех $n \geq n_{16}$ (номер n_{16} определяется свойствами ядра $K(t, s)$ СЛАУ (4.1.88) обладает единственным решением $\{c_0^*, c_1^*, \dots, c_{2n+\mu}^*\}$. Приближенные решения $x_n^*(t)$ (т.е. (4.1.87) при $c_i = c_i^*$)

сходятся к точному решению $x^*(t) = (A^{-1}y)(t)$ в метрике $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\| = o(1/n^{r-2+\alpha}) \quad (4.1.89)$$

$$(0 < \alpha \leq 1, r = 2, 3, \dots).$$

Доказательство. Пусть $X_n = H_{\mu+2n}^\delta \subset X = D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}, Y_n = H_{\mu+2n} \subset Y = C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$.

Тогда, как нетрудно видеть (см. ход доказательства теоремы 4.1.7 и пункт 5.5 главы I), СЛАУ (4.1.88) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv C A x_n = C y (x_n \in X_n, C y \in Y_n), \quad (4.1.90)$$

где $C = C_{2n+\mu} : C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow H_{2n+\mu}$ — линейный полиномиальный оператор, определенный в пункте 5.5 первой главы. Из рассуждений в доказательстве теоремы 1.5.9 и леммы 1.5.1 следует, что $C^2 = C$. Поэтому $C U x_n = U x_n \in H_{2n+\mu}$ для любого $x_n \in X_n$ и, следовательно, СЛАУ (4.1.88) равносильна операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv U x_n + C K x_n = C y (x_n \in X_n, C y \in Y_n). \quad (4.1.90)$$

Теперь исследуем вопрос близости операторов A и A_n на X_n . На основании (4.1.44), (4.1.90) и теоремы 1.5.9 находим

$$\|A x_n - A_n x_n\|_Y = \|K x_n - C K x_n\|_Y \leq e_{59} \cdot n^2 \cdot E_{n-1}(TK x_n). \quad (4.1.91)$$

Дальше доказательство повторяет по существу соответствующую часть доказательства теоремы 4.1.7.

Теорема 4.1.16. Пусть уравнение (2.1.3) обладает решением вида (4.1.55) при данной правой части $y \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ и существует непрерывный

оператор $A_n^{-1} = (CA)^{-1}$. Тогда погрешность приближенного решения $x_n^* \in H_{2n+\mu}^\delta$, соответствующего правой части $y_n = Cy \in H_{2n+\mu}$, оценивается неравенством

$$\|x^* - x_n^*\|_{D\{\bar{m}; \bar{\tau}\}} = O[n^2 \cdot E_n(z^*)].$$

Доказательство легко следует из леммы 3.1.2 с учетом следствия из теоремы 1.5.14 и того факта, что

$$\|C\| = \|C\|_{C\{\bar{m}; \bar{\tau}\} \rightarrow C\{\bar{m}; \bar{\tau}\}} = \|W\|_{C \rightarrow C} \leq e_{13} n^2.$$

Последнее выводится из (1.5.7), лемм 1.5.1, 1.5.2 и оценки (1.5.31).

Следствие. Пусть в условиях теоремы 4.1.16 функция $z^* \in C^{(2)}[-1,1]$. Тогда последовательность (x_n^*) сходится к элементу $x^* = A^{-1}y$ по норме пространства $D\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$.

Замечание 4.1.13. При решении УТР (2.1.3) по ОМК-П в классе $v\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ получаются аналогичные только что изложенным результаты. Их можно сформулировать в виде утверждений, подобных теоремам 4.1.15 и 4.1.16 соответственно.

1.8. В заключение этого параграфа отметим следующие важные для практических приложений факты.

Так как при выполнении условий каждой из теорем 4.1.2, 4.1.3, 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7, 4.1.9, 4.1.11, 4.1.13-4.1.15 соответствующие аппроксимирующие операторы A_n , хотя бы при достаточно больших n , непрерывно обратимы и обратные операторы ограничены по норме в совокупности, то из лемм 3.1.3 и 3.1.4 очевидным образом вытекает следующая

Теорема 4.1.17. В условиях соответствующих теорем 4.1.2, 4.1.3, 4.1.5-4.1.7, 4.1.9, 4.1.11, 4.1.13-4.1.15 справедливы следующие утверждения:

(i) прямые методы (4.1.18)- (4.1.19); (4.1.24), (4.1.5); (4.1.31)- (4.1.32); (4.1.3), (4.1.33); ОМК; ОММ; ОМП и ОМК-П для УТР (2.1.3) устойчивы

относительно малых возмущений элементов СЛАУ (4.1.19), (4.1.5), (4.1.32), (4.1.33), (4.1.42), (4.1.67), (4.1.74) и (4.1.88) соответственно;

(ii) если УТР (2.1.3) хорошо обусловлено, то хорошо обусловленными являются также СЛАУ (4.1.19), (4.1.5), (4.1.32), (4.1.33), (4.1.42), (4.1.67), (4.1.74) и (4.1.88).

§2. «Сплайновые» методы решения в

классах $D\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ и $V\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$

2.1. Обобщенный полигональный метод (ОПМ). Снова рассмотрим УТР вида (2.1.3):

$$Ax \equiv (Ux)(t) + (Kx)(t) = y(t) \quad (-1 \leq t \leq 1), \quad (4.2.1)$$

$$Ux \equiv x(t) \cdot \prod_{j=1}^p (t - t_j)^{m_j}, \quad Kx \equiv \int_{-1}^1 K(t, s)x(s)ds,$$

где исходные данные K и y обладают свойствами

$$K \in C_{\bar{\tau}}^{\{\bar{m}\}}([-1, 1]^2); \quad K_s^{(i)}(t, t_j), \quad y \in C\{\bar{m}; \bar{\tau}\} \quad (i = \overline{1, m_j - 1}, j = \overline{1, p}), \quad (4.2.2)$$

а $x \in D\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ — искомый элемент.

Приближенное решение УТР (4.2.1) ищем в виде агрегата

$$x_n(t) = z_n(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i+n+1+M(j-1)} \delta^{(i)}(t - t_j), \quad (4.2.3)$$

$$z_n(t) = \sum_{i=0}^n c_i \psi_i(t), \quad (4.2.4)$$

где $\{\psi_i\} = \{\psi_i^{(n)}\}$ — система обычных фундаментальных сплайнов первого порядка по узлам $s_i = -1 + 2i/n$ ($i = \overline{0, n}$). Неизвестные коэффициенты $c_i = c_i^{(n)}$ ($i = \overline{0, n + \mu}, \mu = M(p)$) определяем согласно нашему методу из СЛАУ:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 \mathcal{W}_k(t)(TAx_n - Ty)(t)dt = 0 \quad (k = \overline{0, n}); \\ (Ax_n - y)^{(i)}(t_j) = 0 \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}); \end{aligned} \right\} \quad (4.2.5)$$

где w_k – любая из следующих “весовых” функций:

(ОМСК) $w_k(t) = \delta(t - s_k)$ – дельта-функция Дирака;

$$(ОМСП) w_k(t) \equiv \begin{cases} 1 & (t \in [s_{k-1}, s_k]); \\ 0 & (t \notin [s_{k-1}, s_k]), \end{cases} \quad (k = \overline{0, n}),$$

причем в последнем случае “веса” полагаем $s_{-1} \equiv s_0$, а также $c_0 = c_n$ или $c_0 = c_1$ (периодический и непериодический случаи соответственно).

Обоснование вычислительной схемы (4.2.1) – (4.2.5) дается в следующей теореме.

Теорема 4.2.1. Пусть однородное УТР $Ax = 0$ имеет в $D\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ лишь нулевое решение (напр., в условиях теоремы 2.3.1). Тогда при всех $n (n \geq n_{18})$ СЛАУ (4.2.5) имеет единственное решение $\{c_i^*\}$ и последовательность приближенных решений x_n^* , образованных по формуле (4.2.3) при $\{c_i = c_i^*\}$, сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ по метрике пространства $D\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\| = O\left\{\omega_i\left(h; \frac{1}{n}\right) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \omega\left(f_{ji}; \frac{1}{n}\right) + \omega\left(Ty; \frac{1}{n}\right)\right\}, \quad (4.2.6)$$

где $\omega(f; \Delta)$ – модуль непрерывности функции $f \in C$ в точке $\Delta (0 < \Delta \leq 2)$, а $\omega_i(h; \Delta)$ – частный модуль непрерывности функции $h(t, s)$ по аргументу t ; $h(t, s) = (T_i K)(t, s)$, $f_{ji}(t) = T(K_s^{(i)}(t, t_j))$ ($i = \overline{0, m_j - 1}$, $j = \overline{1, p}$).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай (ОМСК) “веса” w_k .

В условиях теоремы 4.2.1 УТР (4.2.1) представляется в виде линейного операторного уравнения

$$Ax \equiv Ux + Kx = y \quad (x \in X = D\{\overline{m}, \overline{\tau}\}, y \in Y = C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}), \quad (4.2.7)$$

где $A: X \rightarrow Y$, причем A непрерывно обратим.

Введем следующие конечномерные подпространства:

$$X \supset X_n = \text{span} \{ \psi_i \}_0^n \oplus \text{span} \{ \delta^{(i)}(t - t_j) \}_{i=0; j=1}^{m_j-1; p},$$

$$Y \supset Y_n = \Pi_n^{\mu+1} \equiv \text{span} \{ U \psi_i \}_0^n \oplus H_{\mu-1}.$$

Покажем теперь, что вычислительная схема (4.2.3) – (4.2.5) эквивалентна операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv \Upsilon A x_n = \Upsilon y \quad (x_n \in X_n, \Upsilon y \in Y_n), \quad (4.2.8)$$

где $\Upsilon = \Upsilon_{n+\mu+1} : Y \rightarrow Y_n$ – линейный оператор, предложенный и изученный в начале пункта 5.6 гл. I.

В самом деле, пусть x_n^* есть решение уравнения (4.2.8), т.е.

$$\Upsilon (A x_n^* - y) = 0. \quad (4.2.9)$$

Как видно по рассуждениям пункта 5.6 первой главы, правило Υ идентично структуре вида (1.5.24), и, следовательно, равенство (4.2.9) равносильно тождеству

$$(UP \Gamma (A x_n^* - y))(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} (A x_n^* - y)^{(i)}(t_j) R_{ji}(t) \equiv 0, \quad (4.2.10)$$

где проекционный оператор $P = P_{n+1} : C \rightarrow S_n^1 = \text{span} \{ \psi_i \}_0^n$ всякой функции $f \in C$ соотносит ее интерполяционный полигон $Pf \in S_n^1$. На основании (1.4.8) и (2.3.6) тождество (4.2.10), в свою очередь, эквивалентна следующей системе:

$$\left. \begin{aligned} P \Gamma (A x_n^* - y) &= 0; \\ (A x_n^* - y)^{(i)}(t_j) &= 0 \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}), \end{aligned} \right\}$$

или же

$$\left. \begin{aligned} (\Gamma A x_n^* - \Gamma y)(s_j) &= 0 \quad (j = \overline{0, n}); \\ (A x_n^* - y)^{(i)}(t_j) &= 0 \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}), \end{aligned} \right\}$$

т.е. СЛАУ (4.2.5) при “весе” (ОМСК) имеет решение $\{c_i^*\}_0^{n+\mu}$. Иными словами, решение уравнения (4.2.8) является решением системы (4.2.3) – (4.2.5). Обратное очевидно.

Уточним структуру аппроксимирующего уравнения (4.2.8).

Поскольку $\gamma^2 = \gamma$, имеем $\gamma Ux_n = Ux_n \in \Pi_n^{\mu+1}$ при любом элементе $x_n \in X_n$.

Следовательно, СЛАУ (4.2.5) равносильна функциональному уравнению вида

$$Ax_n \equiv Ux_n + \gamma Kx_n = \gamma y \quad (x_n \in X_n, \gamma y \in Y_n). \quad (4.2.11)$$

Определим теперь меру близости операторов A и A_n на X_n . В силу (4.2.7), (4.2.11), (1.5.24), (1.4.8), (1.4.6), (1.5.32) и (1.4.11) для произвольного $x_n \in X_n$ последовательно находим

$$\begin{aligned} \|Ax_n - A_n x_n\|_Y &= \|Kx_n - \gamma Kx_n\|_Y = \|TKx_n - PTKx_n\|_C = \\ &= \max_{-1 \leq t \leq 1} \left| \int_{-1}^1 (h - P_t h)(t, s) z_n(s) ds + \sum_j \sum_i (-1)^i c_{i+n+1+M(j-1)} \times \right. \\ &\times (f_{ji} - Pf_{ji})(t) \left. \right| \leq 2 \|z_n\|_C \cdot \omega_t \left(h; \frac{1}{n} \right) + \sum_j \sum_i |c_{i+n+1+M(j-1)}| \times \\ &\times \omega \left(f_{ji}; \frac{1}{n} \right) \leq 2 \left\{ \omega_t \left(h; \frac{1}{n} \right) + \sum_j \sum_i \omega \left(f_{ji}; \frac{1}{n} \right) \right\} \|x_n\|_X. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\varepsilon^{(n)} = \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \leq 2 \left\{ \omega_t \left(h; \frac{1}{n} \right) + \sum_j \sum_i \omega \left(f_{ji}; \frac{1}{n} \right) \right\}. \quad (4.2.12)$$

На основании теоремы 1.5.10 и неравенства (4.2.12) из леммы 3.1.1 получаем утверждение доказываемой теоремы с оценкой (4.2.6).

При (ОМСП) ”весовой” функции \mathcal{W}_k вычислительный алгоритм (4.2.3) – (4.2.5) равносильен операторному уравнению вида

$$A_n x_n \equiv \Gamma A x_n = \Gamma y \quad (x_n \in X_n, \Gamma y \in Y_n), \quad (4.2.13)$$

где линейное отображение $\Gamma = \Gamma_{n+\mu+1} : C\{\bar{m}; \bar{\tau}\} \rightarrow \Pi_n^{\mu+1}$ определено соотношением (1.5.33). В этом легко убедиться, рассуждая так же, как и выше. Однако, как несложно проверить, оператор Γ не является проекционным, т.е. $\Gamma^2 \neq \Gamma$. Поэтому прежние суждения по поводу оценки величины $\varepsilon^{(n)}$ в этом случае полностью не пройдут. В этой связи наряду с уравнением (4.2.13) введем в рассмотрение операторное уравнение

$$\tilde{A}_n x_n \equiv Ux_n + \Gamma Kx_n = \Gamma y \quad (x_n \in X_n, \Gamma y \in Y_n). \quad (4.2.14)$$

Копируя недавно изложенное (заменой A_n на \tilde{A}_n) в предыдущем случае “веса” ω_k , привлекая при этом оценки (1.5.34) и (ii) теоремы 1.5.11, получим

$$\|\tilde{A}_n^{-1}\| = O(1)(\tilde{A}_n^{-1} : Y_n \rightarrow X_n, n \geq n_{19}), \quad (4.2.15)$$

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\|_X = O\left\{\omega_t\left(h; \frac{1}{n}\right) + \sum_j \sum_i \omega\left(f_{ji}; \frac{1}{n}\right) + \omega\left(\Gamma y; \frac{1}{n}\right)\right\}, \quad (4.2.16)$$

$$x^* = A^{-1}y, \tilde{x}_n^* = \tilde{A}_n^{-1}\Gamma y.$$

Далее, для доказательства однозначной разрешимости приближенных уравнений (4.2.13) воспользуемся известным способом функционального анализа. Именно, оператор A_n уравнения (4.2.13) представим в виде

$$A_n = \tilde{A}_n + (\Gamma U - U) = \tilde{A}_n(E + \tilde{A}_n^{-1}R_n), \quad R_n = \Gamma U - U, \quad (4.2.17)$$

где E – единичный оператор в пространстве X_n . Очевидно, для любого элемента $g \in X_n$

$$\|\tilde{A}_n^{-1}R_n g\|_{X_n} \leq \|\tilde{A}_n^{-1}\|_{Y_n \rightarrow X_n} \|R_n g\|_{Y_n} \leq 2\|\tilde{A}_n^{-1}\| \omega\left(\Gamma U g; \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Поэтому в шаре $\|g\| \leq 1$ ($g \in X_n$) операторы $\tilde{A}_n^{-1}R_n$ сходятся к нулевому оператору θ равномерно (см., напр., [37], с.411). Тогда, начиная с некоторого номера n_{20} , по “малой” теореме Банаха (см., напр., [37], с.211) операторы $E + \tilde{A}_n^{-1}R_n$ имеют соответствующие ограниченные обратные. Следовательно, в силу (4.2.17) при всех n ($n \geq n_{21}, n_{21} = \max\{n_{19}, n_{20}\}$) операторы $A_n : X_n \rightarrow Y_n$, заданные соотношением (4.2.13), непрерывно обратимы и обратные операторы $A_n^{-1} : Y_n \rightarrow X_n$ ограничены по норме в совокупности:

$$\|A_n^{-1}\| = O(1) \quad (n \geq n_{21}). \quad (4.2.18)$$

Для оценки погрешности $\|x^* - x_n^*\|_X$ ($x_n^* = A_n^{-1}\Gamma y$), как и в [29] (с.18), имеем

представление

$$x^* - x_n^* = (E - A_n^{-1}\Gamma A)(x^* - \tilde{x}_n^*) \quad (x^* = A^{-1}y, \tilde{x}_n^* = \tilde{A}_n^{-1}\Gamma y),$$

и, следовательно, с учетом (4.2.16), (4.2.18) и равенства (i) теоремы 1.5.11 выводим требуемую оценку (4.2.6):

$$\|x_n^* - x^*\|_X = O\left\{\|x^* - \tilde{x}_n^*\|_X\right\}.$$

Теорема 4.2.1 полностью доказана.

Следствие. Если функции $h(n_0 - t), f_{ji}, \Gamma y \in C^{(r)} = C^{(r)}[-1, 1]$ (в случае (ОМСК) $r = \overline{0, 1}$, а для (ОМСП) $r=0$), то в условиях теоремы 4.2.1 верна оценка

$$\|x_n^* - x^*\|_X = O\left\{\left[\omega_r\left(h_t^{(r)}; \frac{1}{n}\right) + \sum_j \sum_i \omega\left(f_{ji}^{(r)}; \frac{1}{n}\right) + \omega\left((\Gamma y)^{(r)}; \frac{1}{n}\right)\right]n^{-r}\right\}. \quad (4.2.19)$$

В самом деле, вместо использованных в теореме 4.2.1 оценок (1.5.32) и (1.5.34) достаточно брать оценку (см., напр., [28])

$$\|f - Pf\|_C = O\left\{n^{-r} \cdot \omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right)\right\} \quad (f \in C^{(r)}).$$

Рассмотрим теперь вычислительную схему ОПМ при решении УТР (4.2.1) в классе $V\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ обобщенных функций.

Пусть дано уравнение (4.2.1), в котором ядро K подчинено условиям (2.2.6), правая часть $y \in C\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ и $x \in V\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ — неизвестная обобщенная функция.

Приближение к точному решению УТР (4.2.1) будем отыскивать в виде комбинации

$$x_n(t) = z_n(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i+n+1+M(j-1)} (t-t_j)^{-i-1}, \quad (4.2.20)$$

где сплайн z_n имеет форму (4.2.4), а $c_i = c_i^{(n)} (i = \overline{0, n+\mu})$ — подлежащие нахождению коэффициенты. Их будем определять по ОПМ из условий вида (4.2.5).

Для данной схемы имеет место нижеследующая

Теорема 4.2.2. Пусть уравнение $Ax = 0$ имеет в $V\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ лишь тривиальное решение (напр., при выполнении условий теоремы 2.3.2). Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$, хотябы достаточно больших, алгебраическая система (4.2.5) обладает единственным решением $\{c_i^*\}_0^{n+\mu}$ и приближенные решения

$$x_n^*(t) = \sum_{i=0}^n c^* \psi_i(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i+n+1+M(j-1)}^* (t-t_j)^{-i-1}$$

сходятся к точному решению $x^* = A^{-1}y$ в пространстве $V\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ с

быстротой

$$\|x_n^* - x^*\| = O \left\{ \omega_t \left(h; \frac{1}{n} \right) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{m_j-1} \left[\omega \left(f_{ji}; \frac{1}{n} \right) + \omega \left(g_{ji}; \frac{1}{n} \right) \right] + \omega \left(Ty; \frac{1}{n} \right) \right\}. \quad (4.2.21)$$

где

$$h(t, s) = (T_t K)(t, s), \quad f_{ji}(t) = T(K_s^{\{i\}}(t, t_j)),$$

$$g_{ji}(t) = T \left(\int_{-1}^1 (T_s^{i+1} K)_j(t, s) ds \right) \quad (i = \overline{0, m_j-1}, j = \overline{1, p}).$$

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 4.2.1. В качестве указания отметим лишь то, что при получении оценки для величины $\varepsilon^{(n)} \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y}$ следует воспользоваться соответствующими выкладками, приведенными в доказательстве теоремы 4.1.14.

Следствие. Если $h^{(no t)}, f_{ji}, g_{ji}, Ty \in C^{(r)}$ (для (ОМСК) $r = \overline{0, 1}$, а при (ОМСП) $r=0$), то в условиях теоремы 4.2.2 справедлива оценка

$$\|x_n^* - x^*\|_X = O \left\{ \left[\omega_t \left(h^{(r)}; \frac{1}{n} \right) + \sum_j \sum_i \left(\omega \left(f_{ji}^{(r)}; \frac{1}{n} \right) + \omega \left(g_{ji}^{(r)}; \frac{1}{n} \right) \right) \right] + \omega \left((Ty)^{(r)}; \frac{1}{n} \right) \right] n^{-r} \right\} \quad (4.2.22)$$

Замечание 4.2.1. Определенный выбор “веса” w_k в ОПМ порождает конкретный прямой метод. Именно, в случае (ОМСК) ((ОМСП)) “весовой” функции имеем истинность установленных выше результатов для обобщенного метода сплайн – коллокации (сплайн – подобластей) решения УТР (4.2.1) в классах обобщенных функций.

2.2. Обобщенный метод подобластей на базе параболических сплайнов (ОМППС). Рассмотренный в предыдущем пункте обобщенный метод сплайн–подобластей дает наивысший порядок для

погрешности $O(1/n)$. Указанного недостатка лишен метод, основанный на использовании сплайнов второго порядка.

Приближенное решение задачи (4.2.1), (4.2.2) будем искать в виде (4.2.3),

где параболический сплайн $z_n(t) = \sum_{i=-1}^n c_i \mathcal{B}_{2,i}(t)$ удовлетворяет одному из

следующих граничных условий:

$$(\mathfrak{N}_1) \quad z_n(-1) = z_n(1), \quad z'_n(-1) = z'_n(1) \text{ (периодические условия);}$$

$$(\mathfrak{N}_2) \quad z''_n(t-0) = z''_n(t+0) \quad (t = s_1, s_{n-1}).$$

Элементы $\mathcal{B}_{2,i}(t)$ суть \mathcal{B} -сплайны (см., напр., [56], с. 19-20) второго порядка на равномерной сетке с носителем (s_{i-1}, s_{i+2}) ($s_{-2} < s_{-1} < s_0$ и $s_n < s_{n+1} < s_{n+2}$). Неизвестные параметры $\{c_i\}$ будем определять из СЛАУ вида (4.2.5) в случае (ОМСП) “весовой” функции w_k ($k = \overline{1, n}$).

Дадим обоснование предлагаемой вычислительной схемы.

Теорема 4.2.3. Если УТР $Ax = 0$ имеет в $D\{\overline{m}, \overline{\tau}\}$ лишь нулевое решение и функции $h = \Gamma_t K$ ($no \ t$), $f_{ji}(t) = \Gamma(K_s^{(i)}(t, t_j))$ ($i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}$), $\Gamma y \in C^{(r)}$ ($r = \overline{1, 2}$), то погрешность ОМППС может быть оценена неравенством

$$\|x_n^* - x^*\|_X \leq e_{62} n^{-r} \left\{ \omega_t \left(h_t^{(r)}; \frac{1}{n} \right) + \sum_j \sum_i \omega \left(f_{ji}^{(r)}; \frac{1}{n} \right) + \omega \left((\Gamma y)^{(r)}; \frac{1}{n} \right) \right\} \quad (r = \overline{1, 2}).$$

(4.2.23)

Доказательство. Обоснование теоремы 4.2.3 по сути аналогично доказательству теоремы 4.2.1. При этом вычислительная схема ОМППС равносильна операторному уравнению вида

$$A_n x_n \equiv Ux_n + \mathcal{N}Kx_n = \mathcal{N}y \quad (x_n \in X_n, \mathcal{N}y \in Y_n), \quad (4.2.24)$$

где

$$X_n = S_n^2 \oplus \text{span} \left\{ \delta^{(i)}(t - t_j) \right\}_{i=0; j=1}^{m_j-1; p},$$

$$Y_n = U(S_n^2) \oplus H_{\mu-1} \equiv \Pi_n^{\mu+2},$$

S_n^2 – совокупность всех параболических сплайнов на равномерной сетке, обладающих одним из свойств (\aleph_1) , (\aleph_2) ; проекционное отображение $\mathcal{N} : C[\overline{m}; \overline{\tau}] \rightarrow Y_n$ построено в конце пункта 5.6 гл. I. Заметим, что отображение \mathcal{N} образовано согласно закону (1.5.33), в котором $P : C \rightarrow S_n^2$ обозначает сплайновый оператор, определенный и изученный в работе [1] (с. 9). Там же, в частности, указано, что образ оператора P равен производной определенного интерполяционного кубического сплайна. Из соответствующих аппроксимативных свойств последнего (см., напр., [56], с. 89, 93) непосредственно следует оценка

$$\|f - Pf\|_C = O\left\{n^{-r} \cdot \omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right)\right\} \quad (f \in C^{(r)}, r = \overline{1,2}),$$

откуда с учетом (1.4.8), (1.5.33) и (1.4.6) легко выводится соотношение

$$\|y - \mathcal{N}y\|_{C[\overline{m}; \overline{\tau}]} = O\left\{n^{-r} \omega\left((Ty)^{(r)}; \frac{1}{n}\right)\right\} \quad (Ty \in C^{(r)}, r = \overline{1,2}).$$

А тогда с привлечением этих последних двух оценок дальнейшее доказательство повторяет по существу доказательство теоремы 4.2.1 в случае (ОМСК) “веса” ω_k . Тем самым теорема 4.2.3 нами доказана.

Теперь вкратце остановимся на вычислительной схеме ОМППС в случае приближенного решения УТР (4.2.1) в пространстве $V[\overline{m}; \overline{\tau}]$.

Рассматриваем уравнение (4.2.1), в котором K удовлетворяет требованиям (2.2.6), $y \in C[\overline{m}; \overline{\tau}]$, $x \in V[\overline{m}; \overline{\tau}]$ – искомая обобщенная функция. Его точное решение будем аппроксимировать посредством линейной комбинации вида (4.2.20), где параболический сплайн $z_n(t) = \sum_{i=-1}^n c_i \mathcal{B}_{2,i}(t)$ обладает одним из свойств (\aleph_1) , (\aleph_2) . Искомые коэффициенты $\{c_i\}$ будем находить из условий (т.е. СЛАУ) вида (4.2.5) при (ОМСП) “весовой” функции ω_k :

$$\begin{cases} S_k \\ \int (TAx_n - Ty)(t)dt = 0 \quad (k = \overline{1, n}); \\ S_{k-1} \\ (Ax_n - y)^{\{i\}}(t_j) = 0 \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}). \end{cases} \quad (4.2.25)$$

Здесь алгебраическая система относительно $c_i = c_i^{(n)} (i = \overline{-1, n + \mu})$ становится квадратной за счет одного из граничных условий $(\aleph_1), (\aleph_2)$.

Обоснование данного алгоритма дается в следующем предложении.

Теорема 4.2.4. Пусть выполнено требование (i) теоремы 4.1.9. Если функции $h = T_r K (no t), f_{ji}(t) = T(K_s^{(i)}(t, t_j)), g_{ji}(t) = T \left(\int_{-1}^1 (T_s^{i+1} K)_j(t, s) ds \right)$ ($i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}$), $Ty \in C^{(r)} (r = \overline{1, 2})$, то приближенные решения сходятся к точному со следующей скоростью:

$$\|x_n^* - x^*\|_{V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} \leq e_{63} n^{-r} \left\{ \omega \left((Ty)^{(r)}; \frac{1}{n} \right) + \omega_t \left(h_t^{(r)}; \frac{1}{n} \right) + \sum_j \sum_i \left[\omega \left(f_{ji}^{(r)}; \frac{1}{n} \right) + \omega \left(g_{ji}^{(r)}; \frac{1}{n} \right) \right] \right\} \quad (r = \overline{1, 2}). \quad (4.2.26)$$

Доказательство этой теоремы ведется по схеме доказательства теоремы 4.2.3, существенно используя при этом рассуждения в обосновании теоремы 4.2.2.

2.3. В заключение параграфа 3 приведем некоторые важные факты, относящиеся к “сплайновым” методам решения УТР в пространствах $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ и $V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ обобщенных функций.

В дальнейшем при оптимизации проекционных методов решения УТР (4.2.1) существенную роль будет играть

Теорема 4.2.5. Пусть УТР (4.2.1) имеет решение вида

$$x^*(t) = z^*(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \omega_{ji}^* \delta^{(i)}(t - t_j) \quad (z^* = T U x^* \in C^{(r)}, \omega_{ji}^* \in \mathbb{R})$$

при данном $y \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ и соответствующий аппроксимирующий оператор A_n в ОПМ и ОМППС непрерывно обратим. Тогда погрешность приближенного решения $x_n^* \in X_n$ для правой части $y_n \in Y_n$ ($y_n = \Upsilon y, y_n = \Gamma y$ или $y_n = \aleph y$ соответственно рассматриваемому методу) представима в виде

$$\|x_n^* - x^*\|_{D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} = O\left\{n^{-r} \cdot \omega\left(\left(TUx^*\right)^{(r)}; \frac{1}{n}\right)\right\}, \quad (4.2.27)$$

причем $r=0$ для (ОМСП) ОПМ, $r=\overline{0,1}$ при (ОМСК) ОПМ и $r=\overline{0,2}$ в случае ОМППС.

Доказательство. В силу леммы 3.1.2 и структуры приближенного уравнения $A_n x_n \equiv D A x_n = D y$ ($D = \mathcal{Y}$, $D = \Gamma$ или $D = \mathcal{N}$ в зависимости от исследуемого метода) имеем

$$\|x^* - x_n^*\|_{D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} = O\left\{\|D\| \|x^* - x_n\|_{D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}}\right\},$$

где $x_n \in X_n$ – пока произвольный элемент. Выберем его следующим образом:

$$x_n(t) = (P T U x^*)(t) + \sum_j \sum_i \omega_{ji}^* \delta^{(i)}(t - t_j)$$

(здесь P – сплайновый оператор, соответствующий рассматриваемому методу). Тогда требуемая оценка (4.2.27) следует из определения (1.4.11) нормы в $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ и аппроксимативных свойств соответствующего сплайнового оператора P (см., напр., [28], [1], [56]), использованных при доказательстве теоремы 4.2.3 и следствия из теоремы 4.2.1.

Замечание 4.2.2. Утверждение, аналогичное только что изложенному, справедливо и в случае решения УТР (4.2.1) в классе $V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ согласно ОПМ и ОМППС.

Отметим следующие важные для приложений факты. Поскольку в условиях каждой из теорем 4.2.1 – 4.2.4 соответствующие аппроксимирующие операторы A_n непрерывно обратимы хотя бы при достаточно больших n и обратные операторы ограничены по норме в совокупности, то из лемм 3.1.3 и 3.1.4 легко следует

Теорема 4.2.6. При выполнении условий соответствующих теорем 4.2.1 – 4.2.4 имеют место следующие предложения:

(i) ОПМ и ОМППС для УТР (4.2.1) устойчивы относительно малых возмущений элементов (т.е. исходных данных) СЛАУ (4.2.5), (4.2.24) и (4.2.25) соответственно;

(ii) если УТР (4.2.1) хорошо обусловлено, то хорошо обусловлены также соответствующие СЛАУ (4.2.5), (4.2.24) и (4.2.25).

Замечание 4.2.3. Аналогично может быть рассмотрен прямой метод (4.2.3), (4.2.5) (или (4.2.20), (4.2.5)), основанный на сплайнах более высоких порядков. При этом для сплайнов нечетной степени достаточно пользоваться методикой п.3.1, а для сплайнов четной степени – п.3.2.

§3. Оптимизация прямых проекционных методов

В этом параграфе будут изложены результаты по оптимизации прямых проекционных методов решения УТР в различных пространствах обобщенных функций. При этом всюду будем придерживаться обозначений, определений и соглашений пункта 1.3 гл. III.

3.1. Случай решения УТР в $D\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$. Рассмотрим УТР (4.2.1) при условиях (4.2.2) и $x \in D\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$.

Пусть $X = D\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ и $Y = C\{\bar{m}; \bar{\tau}\}$ с соответствующими нормами (1.4.11) и (1.4.6), а $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ – произвольно фиксированные подпространства размерности $N = N(n)$. Обозначим через $\mathcal{T}_n = \{\Gamma_n\}$ некоторое множество линейных операторов из Y_n на X_n . Согласно проекционному методу приближенное решение УТР (4.2.1) будем находить как точное решение $x_n^* \in X_n$ приближенного уравнения вида

$$A_n x_n \equiv \Gamma_n A x_n = \Gamma_n y \quad (x_n \in X_n, \Gamma_n \in \mathcal{T}_n). \quad (4.3.1)$$

Задача состоит в том, чтобы среди приближенных уравнений вида (4.3.1) выбрать то, решение которого в том или ином смысле наилучшим (оптимальным) образом аппроксимирует решение $x^* \in X$ точного уравнения (4.2.1). Эта задача, как уже отмечалось в пункте 1.3 гл. III,

эквивалентна оптимальному выбору подпространств X_n, Y_n и операторов $\Gamma_n \in \mathcal{T}_n$.

Теперь будем рассматривать оптимизацию на классе однозначно разрешимых (равномерно относительно $K \in F$) уравнений вида (4.2.1) при $K(\text{pot}), \psi_{ji}(t) = K_s^{(i)}(t, t_j)$ ($i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, p}$), $y \in C_{\tau}^{\overline{m}} H_{\omega}^r$ ($r = 0, 1, 2, \dots$) (см. конец пункта 5.1 гл. I). Тогда на основании теоремы 2.3.1 имеем

$$X^* = \left\{ x^* \in X \left| Ax^* = y; K, \psi_{ji}, y \in C_{\tau}^{\overline{m}} H_{\omega}^r \right. \right\} = D_{\tau}^{\overline{m}} H_{\omega^*}^r,$$

$$\sup_{K \in F} \|A\| \leq e_{67} < \infty, \quad \sup_{K \in F} \|A^{-1}\| \leq e_{68} < \infty,$$

где $D_{\tau}^{\overline{m}} H_{\omega}^r \equiv \{x \in D\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \mid T U x \in H_{\omega}^r\}$ (см. представление x^* в теореме 4.2.5), $\omega^* = e^* \cdot \omega$ ($e^* \geq 1$).

Пусть $X_n^0 = H_{n+\mu-1}^{\delta}$ и $Y_n^0 = H_{n+\mu-1}$, а $\mathcal{T}_n^{(2)} = \{\Gamma_n\}$ — семейство всех линейных проекционных ($\Gamma_n^2 = \Gamma_n$) операторов $\Gamma_n : C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow H_{n+\mu-1}$, удовлетворяющих условию $\|\Gamma_n\| n^{-r} \omega(1/n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Иными словами, будем рассматривать оптимизацию полиномиальных проекционных методов решения УТР (4.2.1) в пространстве $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ обобщенных функций. Имеет место следующая

Теорема 4.3.1. Пусть $F = C_{\tau}^{\overline{m}} H_{\omega}^r$ и $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n^{(2)}$. Тогда

$$V_N(F) \asymp N^{-r} \omega(1/N) \ln N \quad (N = n + \mu), \quad (4.3.2)$$

и среди всевозможных проекционных методов $\Gamma_n \in \mathcal{T}_n^{(2)}$ решения УТР (4.2.1) оптимальными по порядку на классе F являются:

(i) ОМК по узлам Чебышева как первого, так и второго родов:

$$v_j = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi \quad (j = \overline{1, n}); \quad v_j = \cos \frac{j\pi}{n+1} \quad (j = \overline{1, n});$$

(ii) ОМП по узлам

$$\tau_j = \cos \frac{j\pi}{n} \quad (j = \overline{0, n});$$

(iii) *ОММ по системе полиномов Чебышева первого рода*

$$T_j(t) = \cos(j \cdot \arccos t) \quad (j = \overline{0, n-1}).$$

Доказательство. Сперва займемся получением нижней оценки для $V_N(F)$. Вэтой связи отметим, что при $K(t, s) \equiv 0$ УТР (4.2.1) не принадлежит исследуемому нами классу однозначно разрешимых в $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ уравнений. Поэтому способ, предложенный в [29] (см. §§ 2,3 гл. IV) при оптимизации проекционных методов решения интегральных уравнений второго рода, здесь неприменим. Мы предлагаем несколько иной путь, позволяющий найти требуемую нижнюю оценку. А именно, рассмотрим уравнения (4.2.1) и (4.3.1) при $K = K^*$ из приведенного выше примера 2.3.1. Нетрудно проверить, что $Kx_n \in H_{\mu-1}(x_n \in X_n^0)$. Тогда, используя те факты, что $Ux_n \in H_{n+\mu-1}$ и Γ_n – проектор, находим

$$A_n x_n \equiv \Gamma_n A x_n = A x_n \quad (x_n \in X_n^0),$$

т.е. в этом случае аппроксимирующий оператор A_n является сужением оператора A на подпространство X_n^0 . Следовательно, в силу (2.3.12) приближенное уравнение (4.3.1) при $K = K^*$ имеет единственное решение вида

$$x_n^*(t) = (T\Gamma_n y)(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} (-1)^i (\Gamma_n y - K T\Gamma_n y)^{\{i\}}(t_j) \delta^{\{i\}}(t - t_j). \quad (4.3.3)$$

УТР (4.2.1) при $K = K^*$ принадлежит рассматриваемому нами классу однозначно разрешимых в $D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ уравнений. Поэтому, с учетом (3.1.12), (2.3.12), (4.3.3), (1.4.11) и результатов пункта 5.2. гл. I, имеем

$$\begin{aligned} V_N(F) &\geq \inf_{\Gamma_n \in \mathcal{T}_n^{(2)}} \sup_{x^* \in D\{\overline{m}\}_{H_\omega^r}} \|x^* - x_n^*\|_X = \\ &= \inf_{\Gamma_n} \sup_{y \in C\{\overline{m}\}_{H_\omega^r}} \left\{ \|Ty - T\Gamma_n y\|_C + \sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{m_j-1} \left| (y - KTy)^{\{i\}}(t_j) - (\Gamma_n y - K T\Gamma_n y)^{\{i\}}(t_j) \right| \right\} = \\ &= \inf_{\Gamma_n} \sup_{y \in C\{\overline{m}\}_{H_\omega^r}} \left\{ \|Ty - T\Gamma_n y\|_C + \sum_j \sum_i \left| (K T(y - \Gamma_n y))^{\{i\}}(t_j) \right| \right\} \geq \end{aligned}$$

$$\geq \inf_{\Gamma_n} \sup_{y \in C_{\tau}^{\overline{m}} H_{\omega}^r} \|\Gamma y - T\Gamma_n y\|_C = \inf_{P_n \in \mathbf{P}_n^{(2)}} \sup_{Ty \in H_{\omega}^r} \|\Gamma y - P_n Ty\|_C, \quad (4.3.4)$$

где $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n^{(2)} = \{P_n\}$ – класс алгебраических полиномиальных проекционных операторов $P_n : C \rightarrow H_{n-1}$, обладающих свойством $\|P_n\| n^{-r} \omega(1/n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). На основании лемм 1.5.1 и 1.5.2 очевидно, что

$$\Gamma_n \in \mathcal{T}_n^{(2)} \Leftrightarrow P_n \in \mathbf{P}_n^{(2)}.$$

Далее, известно [29], с. 171, что

$$\inf_{P_n \in \mathbf{P}_n^{(2)}} \sup_{z \in H_{\omega}^r} \|z - P_n z\|_C \geq e_{69} n^{-r} \omega(1/n) \ln n. \quad (4.3.5)$$

Следовательно, из (4.3.4) и (4.3.5) находим нижнюю оценку

$$V_N(F) \geq e_{70} N^{-r} \omega(1/N) \ln N. \quad (4.3.6)$$

С другой стороны, согласно результатам пунктов 1.4 – 1.6 данной главы каждый из упомянутых в теореме методов (i) – (iii) порождает свой проекционный оператор $\Gamma_n^0 : C_{\tau}^{\overline{m}} \rightarrow H_{n+\mu-1}$, причем $(\Gamma_n^0)^2 = \Gamma_n^0$ и $\|\Gamma_n^0\| \asymp \ln n$, т.е. $\Gamma_n^0 \in \mathcal{T}_n^{(2)}$. Следовательно, благодаря теоремам 4.1.8, 4.1.12 и теореме Джексона (см., напр., [31], с.86), последовательно находим

$$\begin{aligned} V_N(F) &\leq V(F; \Gamma_n^0; H_{n+\mu-1}^{\delta}, H_{n+\mu-1}) = \sup_{x^* \in D_{\tau}^{\overline{m}} H_{\omega^*}^r} \|x^* - x_n^0\|_X \leq \\ &\leq e_{71} n^{-r} \omega(1/n) \ln n \leq e_{72} N^{-r} \omega(1/N) \ln N \quad (\Gamma_n^0 A x_n^0 \equiv \Gamma_n^0 y). \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Теперь из (3.1.13), (4.3.6) и (4.3.7) следуют утверждения теоремы 4.3.1 с оценкой (4.3.2).

Следствие. Если $F = C_{\tau}^{\overline{m}} H_{\alpha}^r(M)$, то верна оценка

$$V_N(F) \asymp MN^{-r-\alpha} \ln N \quad (N = n + \mu), \quad (4.3.8)$$

и ОМК, ОММ, ОМП оптимальны по порядку на классе F среди всех полиномиальных проекционных методов решения УТР (4.2.1).

Далее, будем рассматривать оптимизацию прямых проекционных (не только полиномиальных) методов решения УТР (4.2.1) в классе $D_{\tau}^{\overline{m}}$. В этих целях введем совокупность $\mathcal{T}_n^{(1)} = \{\Gamma_n\}$ всех линейных операторов

$\Gamma_n : C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \rightarrow Y_n$, отображающих пространство $C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ на подпространство $Y_n \subset C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ размерности $N = n + \mu + 1$. Справедлива следующая

Теорема 4.3.2. Если $F = C\{\overline{m}\}_{\omega}^r$ и $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n^{(1)}$, то

$$V_N(F) \asymp N^{-r} \omega(N^{-1}) (N = n + \mu + 1) \quad (4.3.9)$$

и этот оптимальный порядок реализуют ОПМ и ОМППС, причем для (ОМСП) ОПМ $r = 0$, при (ОМСК) ОПМ $r = \overline{0,1}$, а в случае ОМППС $r = \overline{0,2}$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу следствия 2 из теоремы 1.5.15 имеет место слабая эквивалентность

$$d_N \left(D\{\overline{m}\}_{\tau}^r H_{\omega}^r, D\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \right) \asymp N^{-r} \omega(N^{-1}) (N > \mu + r, r + 1 \in \mathbb{N}). \quad (4.3.10)$$

Далее, известно ([29], с.163), что $V_N(F) \geq d_N(X^*, D\{\overline{m}; \overline{\tau}\})$. Следовательно, из (4.3.10) следует

$$V_N(F) \geq d_N \left(D\{\overline{m}\}_{\tau}^r H_{\omega^*}^r, D\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \right) \asymp N^{-r} \omega(N^{-1}). \quad (4.3.11)$$

С другой стороны, согласно определению $V_N(F)$ и теореме 4.2.5 находим

$$V_N(F) \leq \sup_{x^* \in D\{\overline{m}\}_{\tau}^r H_{\omega^*}^r} \|x^* - x_n^*\|_{D\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} = O \left\{ N^{-r} \omega(N^{-1}) \right\} (x_n^* = A_n^{-1} D y). \quad (4.3.12)$$

Теперь из (4.3.11) и (4.3.12) следует утверждение теоремы 4.3.2 с соответствующей оценкой.

Следствие. Если $F = C\{\overline{m}\}_{\alpha}^r (M)$, то имеет место

$$V_N(F) \asymp MN^{-r-\alpha}. \quad (4.3.13)$$

При этом ОПМ и ОМППС оптимальны по порядку на классе F среди всех проекционных методов решения УТР (4.2.1) (при (ОМСП) ОПМ $r + \alpha \leq 1$, для (ОМСК) ОПМ $r + \alpha \leq 2$, в случае ОМППС $r + \alpha \leq 3$).

3.2. Случай решения УТР в $V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$. Пусть дано уравнение (4.2.1) при условиях (2.2.6), $y \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ и $x \in X = V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$.

Рассмотрим оптимизацию на классе однозначно разрешимых УТР вида (4.2.1) в случае, когда $K(\text{по } t)$, $\psi_{j_i}(t) = K_s^{(i)}(t, t_j)$, $\varphi_{j_i}(t) = \int_{-1}^1 (T_s^{i+1} K)_j(t, s) ds$

($i = \overline{0, m_j - 1}$, $j = \overline{1, p}$), $y \in C_{\tau}^{\overline{m}} H_{\omega}^r$ ($r + 1 \in \mathbb{N}$). Тогда в силу теоремы 2.3.2 имеем

$$X^* = \left\{ x^* \in X \mid Ax^* = y; K, \psi_{j_i}, \varphi_{j_i}, y \in C_{\tau}^{\overline{m}} H_{\omega}^r \right\} = V_{\tau}^{\overline{m}} H_{\omega}^r,$$

где $V_{\tau}^{\overline{m}} H_{\omega}^r \equiv \left\{ x \in V \left\{ \overline{m}; \overline{\tau} \right\} \mid T U x \in H_{\omega}^r \right\}$, $\omega^* = c^* \cdot \omega$ ($1 \leq c^* = \text{const}$).

Пусть, далее, $X_n^0 = H_{n+\mu-1}^{F.P.}$ и $Y_n^0 = H_{n+\mu-1}$, а

$\Gamma_n = \Gamma_n^{(2)} = \left\{ \Gamma_n \mid \Gamma_n : C \left\{ \overline{m}; \overline{\tau} \right\} \rightarrow H_{n+\mu-1}, \Gamma_n^2 = \Gamma_n, \|\Gamma_n\| n^{-r} \omega(n^{-1}) = o(1) (n \rightarrow \infty) \right\}$. В

данном случае оптимизации полиномиальных проекционных методов решения УТР (4.2.1) в $V \left\{ \overline{m}; \overline{\tau} \right\}$ верна следующая

Теорема 4.3.3. Справедлива оценка

$$V_N \left(C_{\tau}^{\overline{m}} H_{\omega}^r \right) \asymp N^{-r} \omega(N^{-1}) \ln N \quad (N = n + \mu), \quad (4.3.14)$$

и ОМК, ОММ, ОМП оптимальны по порядку на классе $F = C_{\tau}^{\overline{m}} H_{\omega}^r$ среди всех полиномиальных проекционных методов решения уравнения (4.2.1).

Доказательство. Верхнюю оценку из (4.3.14) можно найти теми же рассуждениями, что и в соответствующей части доказательства теоремы 4.3.1. Именно, в силу теоремы 4.1.10, замечаний 4.1.8, 4.1.12 и вышеупомянутой теоремы Джексона последовательно выводим

$$\begin{aligned} V_N(F) &\leq V \left(F; \Gamma_n^0; H_{n+\mu-1}^{F.P.}, H_{n+\mu-1} \right) = \sup_{x^* \in V_{\tau}^{\overline{m}} H_{\omega^*}^r} \left\| x^* - x_n^0 \right\|_X \leq e_{73} n^{-r} \omega(n^{-1}) \ln n \leq \\ &\leq e_{74} N^{-r} \omega(N^{-1}) \ln N \quad (\Gamma_n^0 Ax_n^0 \equiv \Gamma_n^0 y), \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

где $\Gamma_n^0 : C \left\{ \overline{m}; \overline{\tau} \right\} \rightarrow H_{n+\mu-1}$ — полиномиальный проекционный оператор, порожденный соответствующим из упомянутых в доказываемой теореме методов.

Нижнюю оценку для $V_N(F)$ можно было бы получить способом, предложенным при доказательстве теоремы 4.3.1. Однако, здесь удастся проще достичь цели.

Поскольку УТР (4.2.1) при $K(t, s) \equiv 0$ принадлежит исследуемому нами классу однозначно разрешимых в $V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ уравнений, то имеем (см. также (4.3.4) – (4.3.6))

$$\begin{aligned} V_N(F) &\geq \inf_{\Gamma_n \in \mathcal{T}_n^{(2)}} \sup_{x^* \in V_{\tau}^{\{\overline{m}\}} H_{\omega}^r} \|x^* - x_n^*\|_X = \inf_{\Gamma_n} \sup_{y \in C_{\tau}^{\{\overline{m}\}} H_{\omega}^r} \|\Gamma y - \Pi \Gamma_n y\|_C = \\ &= \inf_{P_n \in \mathbf{P}_n^{(2)}} \sup_{\Gamma y \in H_{\omega}^r} \|\Gamma y - P_n \Gamma y\|_C \geq e_{75} N^{-r} \omega(N^{-1}) \ln N, \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

где, как и прежде, $\mathbf{P}_n^{(2)} = \left\{ P_n | P_n : C \rightarrow H_{n-1}, P_n^2 = P_n, \|P_n\| n^{-r} \omega(n^{-1}) = o(1) \quad (n \rightarrow \infty) \right\}$.

Из (4.3.15) и (4.3.16) следует требуемое утверждение с оценкой (4.3.14).

Замечание 4.3.1. Если $F = C_{\tau}^{\{\overline{m}\}} H_{\omega}^r(M)$, то имеет место предложение, идентичное следствию из теоремы 4.3.1.

Аналогично теореме 4.3.2 доказывается

Теорема 4.3.4. Пусть $F = C_{\tau}^{\{\overline{m}\}} H_{\omega}^r$ и $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n^{(1)}$. Тогда

$$V_N(F) \asymp N^{-r} \omega(N^{-1}) \quad (N = n + \mu + 1), \quad (4.3.17)$$

и среди всевозможных проекционных методов $\Gamma_n \in \mathcal{T}_n^{(1)}$ решения УТР (4.2.1) оптимальными по порядку на классе F являются ОПМ и ОМППС, причем для (ОМСП) ОПМ $r = 0$, при (ОМСК) ОПМ $r = \overline{0,1}$, а в случае ОМППС $r = \overline{0,2}$.

Доказательство. Заметим, что из теоремы 1.5.15, как простое следствие, вытекает (см. замечание 1.5.6) слабая эквивалентность

$$d_N \left(V_{\tau}^{\{\overline{m}\}} H_{\omega}^r, V\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \right) \asymp N^{-r} \omega(N^{-1}) \quad (N > \mu + r, r = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.3.18)$$

Следовательно, как и в доказательстве теоремы 4.3.2, находим

$$V_N(F) \geq d_N \left(X^*, V\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \right) = d_N \left(V_{\tau}^{\{\overline{m}\}} H_{\omega}^r, V\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \right) \asymp N^{-r} \omega(N^{-1}). \quad (4.3.19)$$

С другой стороны, на основании определения $V_N(F)$ и замечания 4.2.2 получаем

$$V_N(F) \leq \sup_{x^* \in V_{\tau}^{\{\overline{m}\}} H_{\omega}^r} \|x^* - x_n^*\|_{V\{\overline{m}; \overline{\tau}\}} = O \left[N^{-r} \omega(N^{-1}) \right] \quad (x_n^* = A_n^{-1} D y). \quad (4.3.20)$$

Теперь из (4.3.19) и (4.3.20) следуют утверждения доказываемой теоремы.

Замечание 4.3.2. В рассматриваемом случае справедливо утверждение, совершенно аналогичное следствию из теоремы 4.3.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агачев Ю.Р. О сходимости метода сплайн-подобластей для интегральных уравнений // Изв. вузов. Математика. – 1981. - № 6. – С. 3-10.
2. Агачев Ю.Р. Сплайновые приближения решений интегральных и дифференциальных уравнений: Дис. ... кандидата физ.-мат. наук. – Казань, 1987. – 144 с.
3. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
4. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 316 с.
5. Бараталиев К.Б. К теории линейных интегральных уравнений третьего рода // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе, 1985. – Вып. 18. – С. 31-39.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 631 с.
7. Бжихатлов Х.Г. Об одном интегральном уравнении третьего рода // Изв. АН Уз. ССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1970. - № 2. – С. 18-23.
8. Бжихатлов Х.Г. Об одной смешанной краевой задаче для уравнения параболо-гиперболического типа // Сб. научн. работ аспирантов. – Нальчик, 1971. – Вып. 3. – С. 7-9.
9. Бжихатлов Х.Г. Об одной краевой задаче со смещением // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9. - №1. – С.162-165.
10. Векуа Н.П. Интегральные уравнения типа Фредгольма с интегралом в смысле Адамара // Труды Тбилисского матем. ин-та. - 1939. – Т.7. – С.113-146.
11. Габбасов Н.С. К теории линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода в пространстве обобщенных функций // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 4. – С. 68-70.
12. Габбасов Н.С. О приближенном решении интегральных уравнений третьего рода // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 6. – С. 49-52.

13. Габбасов Н.С. О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода // Аналитические методы решения дифференциальных уравнений. – Куйбышев: Изд-во Куйбышевского ун-та, 1988. – С. 64-69.

14. Габбасов Н.С. К численному решению интегральных уравнений третьего рода // Тез. докл. Всесоюз. симп. «Методы дискретных особенностей в задачах матфизики». – Харьков, 1989. – Ч. I. – С. 57-59.

15. Габбасов Н.С. Обобщенный метод коллокации для интегральных уравнений третьего рода // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т.25, №9. – С. 1612-1614.

16. Габбасов Н.С. Новые прямые методы решения интегральных уравнений третьего рода // Изв. вузов. Математика. – 1990. - №4. – С.7-15.

17. Габбасов Н.С. Новый прямой метод решения интегральных уравнений третьего рода // Математические заметки. – 1991. – Т.49. – Вып.1. – С.40-46.

18. Габбасов Н.С. Об одном сплайн-методе численного решения интегральных уравнений третьего рода // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т.27. - №9. – С.1648-1650.

19. Габбасов Н.С. Новые варианты метода коллокации для интегральных уравнений третьего рода // Математические заметки. – 1991. – Т.50. – Вып.2. – С.47-53.

20. Габбасов Н.С. Оптимальный проекционный метод решения одного класса интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т.30. - №2. – С.333-335.

21. Габбасов Н.С. Методы решения одного класса интегральных уравнений III рода // Изв. вузов. Математика. – 1996. - №5. – С.19-28

22. Габбасов Н.С. К теории линейных интегральных уравнений третьего рода // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т.32. - №9. – С.1192-1201.

23. Габбасов Н.С. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций: Дисс... д-ра физ.-матем. наук. – Новосибирск, 1996. – 318 с.

24. Габбасов Н.С. Оптимальный метод решения интегральных уравнений третьего рода // Докл. РАН. – 1998. – Т.362. - №1. – С.12-15.

25. Габбасов Н.С. Специальный вариант метода коллокации для интегральных уравнений третьего рода // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41. – № 12. –С. 1690-1695.

26. Габбасов Н.С. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций. – Казань: Изд-во казанск. ун-та, 2006. – 176 с.

27. Габдулхаев Б.Г. Некоторые вопросы приближенных методов // Функциональный анализ и теория функций. – Казань, 1968. – Вып. 5. – С. 20-29.

28. Габдулхаев Б.Г. , Душков П. Н. О полигональном методе решения интегральных уравнений со слабой особенностью // Прилож. функ. анализа к приближенным вычислениям. – Казань, 1974. – С. 37-57.

29. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. - Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.

30. Габдулхаев Б.Г. Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1995. – 232 с.

31. Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функций. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. – 184 с.

32. Дудучава Р.В. О теоремах Нетера для сингулярных интегральных уравнений в пространствах гильбертовых функций с весом // Тр. симпоз. по механ. сплошн. среды и родствен. пробл. анализа. – Тбилиси, 1973. – Т.1. – С.89-102.

33. Дыбин В.Б. Нормализация сингулярного интегрального уравнения в исключительном случае // Матем. анализ и его прилож. – Ростов-на-Дону, 1974. – Т.6. – С. 45-61.

34. Ермолаева Л.Б. Аппроксимативные свойства полиномиальных операторов и решение интегральных и интегро-дифференциальных

уравнений методом подобластей: Дис. ... кандидата физ.-мат. наук. – Казань, 1987. – 154с.

35. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352с.

36. Замалиев Р.Р. О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре: Дисс...канд. физ.-матем. наук. – Казань, 2012. – 114 с.

37. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

38. Каспшицкая М.Ф., Тукалевская Н.И. К вопросу о сходимости метода коллокации // Укр. мат. журн. - 1967. – Т. 19, № 4. – С. 48-56.

39. Кейз К.М., Цвайфель П.Ф. Линейная теория переноса. – М.: Мир, 1972. – 384 с.

40. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.

41. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

42. Математическая энциклопедия. Т. 4. Ок-Сло / Гл. ред. Виноградов И.М. – М.: Советская энциклопедия, 1984. – 1216 с.

43. Нагих В.В. Оценка нормы некоторого полиномиального оператора в пространстве непрерывных функций // Методы вычислений. – Л., 1976. – Вып. 10. – С. 99-102.

44. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.– Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.

45. Петерсен И. О сходимости приближенных методов интерполяционного типа для обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. АН Эст ССР. - Сер. физ.-мат. и тех. наук. – 1961. - №1. – С.3-12.

46. Пресдорф З. Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек // Матем. исследования. – Кишинев, 1972. – Т.7. – Вып.1. – С.116-132.

47. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 493 с.

48. Расламбеков С.Н. Сингулярное интегральное уравнение первого рода в исключительном случае в классах обобщенных функций // Изв. вузов. Математика. – 1983. - № 10. – С. 51-56.

49. Расламбеков С.Н. Линейные интегральные уравнения третьего рода с коэффициентом, имеющим нуль любого порядка, в пространствах обобщенных функций // Изв. вузов. Математика. – 1986. - № 11. – С. 41-44.

50. Расламбеков С.Н. Теория линейных интегральных уравнений третьего рода в классах обобщенных функций и других функциональных пространствах: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. - Ростов-на-Дону, 1987. – 99 с.

51. Рогожин В.С. Теория операторов Нетера. – 2-е изд., дополн. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1982. – 99 с.

52. Рогожин В.С., Расламбеков С.Н. Теория Нетера для интегральных уравнений третьего рода // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 9. – С. 1678-1686.

53. Рогожин В.С., Расламбеков С.Н. Теория Нетера для интегральных уравнений третьего рода в пространствах непрерывных и обобщенных функций // Изв. вузов. Математика. – 1979. - № 1. – С. 61-69.

54. Рогожин В.С., Расламбеков С.Н. К теории интегральных уравнений третьего рода // Изв. вузов. Математика. – 1986. - № 4. – С. 77-79.

55. Соловьева С.А. О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода в пространстве обобщенных функций: Дисс... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 2007. – 111 с.

56. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.

57. Уждавинис И.В. О сходимости метода типа подобластей // Дифференц. уравнения и их применение. – Вильнюс, 1971. – Вып. 1. – С. 73-83.

58. Хайкин М.И. О регуляризации операторов с незамкнутой областью значений // Изв. вузов. Математика. – 1970. - № 8. – С. 118-123.

59. Чеботарев Г.Н. Об одном уравнении типа свертки первого рода // Изв. вузов. Математика. – 1967. - № 2. – С. 80-92.

60. Чеботарев Г.Н. О нормальной разрешимости уравнений Винера-Хопфа в некоторых особых случаях // Изв. вузов. Математика. – 1968. -№ 3. – С. 113-118.

61. Эдвардс Р. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.

62. Bart G.R. Three theorems on third-kind linear integral equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1981. – V.79. - №1. – P.48-57.

63. (Bart G.R., Warnock R.L. Linear integral equations of the third-kind // SIAM J. Math. Anal. – 1973. – V.4. - №4. – P.609-622.

64. Gabbasov N.S. Optimal spline method for solving integral equations of the third kind // Short Communications of ICM. – Zurich, 1994. – P.239.

65. Sukavanam N. A Fredholm-type theory for third-kind linear integral equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1984. – V.100, №2. – P.478-485.

Учебное пособие

Габбасов Назим Салихович
Замалиев Руслан Рашидович

**ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ТРЕТЬЕГО РОДА**

Дизайн обложки

М.А. Ахметов

Подписано в печать

Бумага офсетная. Печать цифровая.

Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. .

Тираж экз. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужи́на, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28