На правах рукописи

Самсонова Кристина Александровна

Геометрические и экстремальные задачи теории однолистных функций

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань–2016

Работа выполнена на кафедре математического анализа ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Научный руководитель: **Прохоров Дмитрий Валентинович**
доктор физико–математических наук,
профессор, ФГБОУ ВПО «СГУ
имени Н.Г. Чернышевского»

Официальные оппоненты:

Шамоян Файзо Агитович доктор физико–математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского», заведующий кафедрой математического анализа

Миронова Светлана Рафаиловна кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н.Туполева - КАИ»

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Петрозаводский государственный университет»

Защита диссертации состоится 25 февраля 2016 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Россия, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Кремлевская, д.35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета, а также на сайте www.kpfu.ru.

Автореферат разослан «___» «___________» 2016 г.
Ученый секретарь диссертационного совета к.ф.-м.н., доцент Липачев Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В основе диссертационного исследования лежат некоторые геометрические и экстремальные задачи теории однолистных функций – основополагающем разделе геометрической теории функций комплексного переменного, который изучает свойства конформных отображений. В начале двадцатого века начали формироваться различные методы решения экстремальных задач в классах однолистных функций в единичном круге $E = \{z :\mid z \mid < 1\}$.

Позднее в экстремальных задачах начали использоваться классические методы вариационного исчисления на множестве решений дифференциального уравнения Левнера. Обнаруженные связи теории Левнера со многими разделами математики объясняют растущий интерес к ней в современных исследованиях. При этом задачи, связанные с указанным уравнением, имеют широкие приложения в теории дифференциальных уравнений и других областях естествознания. Поэтому тематика диссертационного исследования весьма актуальна.

Приведем обзор некоторых результатов, тесно связанных с тематикой диссертации.

Определение 1. Пусть аналитическая однолистная функция $f(z)$ в единичном круге E имеет тейлоровское разложение следующего вида $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$. Класс всех таких функций обозначим через S.

Определение 2. Классом S^M назовем подкласс S, который состоит из всех ограниченных функций $f \in S$, удовлетворяющих в единичном круге условию $|f(z)| < M,\ M > 1,\ z \in E$.

Экстремальные задачи в классах S и S^M заключаются в нахождении оценок различных функционалов, в частности, коэффициентных функционалов. Задачи об оценке коэффициента $\mid a_n \mid$ вызвали интерес особенно в связи с известной гипотезой Бибербахао справедливости неравенства $|a_n| \leq n,\ n \geq 2$, для функций $f \in S$, знак равенства достигается для вращений функции Кебе

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2},\ z \in E, \tag{1}$$

которая отображает круг E на всю комплексную плоскость с разрезом по лучу на отрицательном направлении действительной оси с вершиной в точке $w = -\frac{1}{4}$. Эта гипотеза была доказана де Бранжем. Ряд экстремальных задач для оценки коэффициентов локально однолистных функций универсального линейно–инвариантного семейства решен В. В. Старковы[1,2], Я. Годулей и В.

[1]В. В.Старков / К оценке коэффициентов в классе U_α^* локально однолистных функций // Вестник ЛГУ, – 1984. – №13. – С. 48–54.

[2]В. В.Старков / Об одном неравенстве для коэффициентов функций линейно–инвариантного семейства // Докл. Болг. Акад. Наук, – 1984. – Т. 37. – №8. – С. 999–1002.

В. Старковым[3].

Если рассматривать класс S^M, то вместо функции Кебе используют функцию Пика P_M

$$P_M(z) = MK^{-1}\left(\frac{K(z)}{M}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} p_n(M)z^n, \;\; z \in E, \; M > 1. \qquad (2)$$

Функция Пика (2) отображает E на круг радиуса M с центром в начале координат и разрезом вдоль отрезка $[-M, -M(2M-1-\sqrt{M^2-M})]$ на отрицательном направлении вещественной оси.

Пик[4] доказал, что

$$\max_{f\in S^M} |a_2| = 2 - \frac{2}{M}, \; M > 1, \qquad (3)$$

причем максимум достигается для вращений функции Пика.

Известна оценка третьего коэффициента в классах S^M при $M > 1$. В частности[5],

$$\max_{f\in S^M} |a_3| = 1 - \frac{1}{M^2}, \; M \le e, \qquad (4)$$

со знаком равенства для вращений функции $P_{M^2} = \left[P_{M^2}(z^2)\right]^{1/2}$.

До сих пор точные оценки четвертого коэффициента в классах S^M известны не для всех $M > 1$, тем не менее для M, близких к 1, функции Пика $P^3_M(z) = \left[P_{M^3}(z^3)\right]^{1/3}$ будут экстремальными. М.Шиффер и О.Тамми[6] доказали, что

$$\max_{f\in S^M} |a_4| = 1 - \frac{1}{M^3}, \; M \le \frac{34}{19}, \qquad (5)$$

со знаком равенства для вращений функции P^3_M. Гипотеза Хажинского–Тамми заключается в том, что для всякого $n \ge 2$ найдется $M_n > 1$ такое, что для $M \in (1, M_n)$ и $f \in S^M$ выполняются неравенства

$$|a_n| \le \frac{2}{n-1}\left(1 - \frac{1}{M^{n-1}}\right) \qquad (6)$$

и знак равенства достигается для вращений функции Пика

[3]J. Godula, V. Starkow / Logarithmic coefficients of locally univalent function // Ann. Univ. Mariae Curie–Sklodowska, Sec.A, – 1989. – V. 43. – P. 9–13.

[4]G. Pick / Uber die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschranktes Gebiet // S.–B. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien. Math., Naturwiss. Kl. Abt. IIa, – 1917. –№126. – P. 247–263.

[5]A. C. Schaeffer, D. C. Spencer / Coefficient regions for schlicht functions // American Mathematical Society: Colloquium publications, – 1950. – V.35, –311 p.

[6]M. Schiffer, O. Tammi / On the fourth coefficient of bounded univalent functions // Transactions of the American Mathematical Society, – 1965. – №119. – P. 67–78.

$P_{M^n}(z) = [P_{M^n}(z^n)]^{1/n}$. Эту гипотезу доказали Северский[7], М.Шиффер и О.Тамми[8]. Из результата последних следует, что $M_4 = 34/19$.

Более того, доказательство этой гипотезы решает локальную проблему о существовании чисел $M_n^* \geq M_n, \quad n \geq 2$, таких, что для $M \in (1, M_n^*)$ и $f \in S^M$ неравенства (6) справедливы в некоторой окрестности функции P_{M^n}. Подробный обзор приведен в работе Д. В. Прохорова[9].

Цели и задачи диссертационной работы.

1. Определить границы действия локальной экстремальной задачи Хажинского–Тамми для пятого коэффициента тейлоровского разложения голоморфной нормированной ограниченной функции.

2. Описать множество значений $f(z_0)$ решений хордового уравнения Левнера в классах голоморфных однолистных отображений $\mathbb{H} \setminus K(T)$ на верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}$ с гидродинамической нормировкой в окрестности бесконечности, где $K(T)$ – произвольная оболочка емкости T.

3. Исследовать качественное асимптотическое поведение решений хордового дифференциального уравнения Левнера, генерируемых управлениями, обратными к степенной функции с натуральной степенью.

4. Найти асимптотическое соотношение между гармоническими мерами сторон разреза.

Научная новизна. Все результаты, полученные в ходе диссертационного исследования, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты работы носят теоретический характер, которые могут быть применимы в теории дифференциальных уравнений, при исследовании вопросов конформного отображения, вопросов аппроксимации.

Методология и методы исследования. В основе исследования лежат методы оптимального управления, комплексного анализа, геометрической теории функций комплексного переменного, теория обыкновенных дифференциальных уравнений, теория вещественных переменных.

Положения, выносимые на защиту.

1. Найдено точное верхнее значение M_5^* действия локальной гипотезы Хажинского – Тамми для пятого коэффициента тейлоровского разложения голоморфной нормированной ограниченной функции.

[7] L. Siewierski / Sharp estimation of the coefficients of bounded univalent functions close to identity // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), – 1971. – №86. – P. 1–153.

[8] M. Schiffer / On bounded univalent functions which are close to identity // Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A I. Mathematica, – 1968. – №435. – P. 3-26.

[9] D. V. Prokhorov / Bounded univalent functions // Handbook of Complex Analysis. Geometric Gunction Theory, Amsterdam: Elsevier Science, – 2002.– V. 1, – P.207-228.

2. Описано множество значений $f(z_0)$ в классах голоморфных однолистных отображений $\mathbb{H} \setminus K(T)$ на $\mathbb{H}$ с гидродинамической нормировкой в окрестности бесконечности, где $K(T)$ – произвольная оболочка емкости T.

3. Решена экстремальная задача о минимальной емкости разрезов в верхней полуплоскости, проходящих через заданные точки.

4. Исследовано качественное асимптотическое поведение решений хордового дифференциального уравнения Левнера, генерируемых управлениями, обратными к степенной функции с натуральной степенью.

5. Найдено асимптотическое соотношение между гармоническими мерами сторон разреза.

Апробация результатов. Полученные результаты докладывались и обсуждались на конференциях и семинарах:

– 17-й международной Саратовской зимней школе "Современные проблемы теории функций и их приложения посвященной 150-летию со дня рождения В. В. Стеклова (Саратов, 2014 г.);

– 7-й Петрозаводской международной конференции "Комплексный анализ и его приложения"(Петрозаводск, 2014г.);

– 13-й молодежной научной школе-конференции "Лобачевские чтения – 2014"(Казань, 2014г.);

–научно-практической конференции "Комплексный анализ и его приложения"(Брянск, 2015 г.);

– 12-й международной Казанской летней школе-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы"(Казань, 2015 г.);

– научной конференции сотрудников механико-математического факультета "Актуальные проблемы математики и механики"(Саратов, 2013–2015 гг.);

– на семинарах: "Геометрическая теория функций комплексного переменного"(Саратов, 2013–2015 гг.).

Структура и объем диссертации. Общий объем работы составляет 100 страниц и состоит из введения, трех глав, каждая из которых разбита на разделы, заключения, списка литературы из 56 наименований и включает 3 рисунка. Нумерация теорем, лемм, определений и формул двойная: первым указан номер главы, вторым – номер теоремы (леммы, определения, формулы) в этой главе, нумерация следствий подчинена нумерации соответствующих теорем.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы автором в 10 работах. Статьи [1], [2], [3] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Содержание работы

Во введении была рассмотрена история вопроса, обоснована актуальность диссертационного исследования, изложены основные результаты работы.

В первой главе диссертационной работы применением принципа максимума Л. С. Понтрягина получено точное верхнее значение M_5^* в локальной гипотезе Хажинского–Тамми.

Теорема 1.1. *Локальная гипотеза Хажинского–Тамми о максимуме модуля пятого тейлоровского коэффициента для функции $f \in S^M$ справедлива для всех $M \in (1, M_5^*)$ с неулучшаемым значением $M_5^* = 2,06263...$.*

Из вспомогательных рассуждений при доказательстве теоремы 1.1, получено локально экстремальное свойство функции Пика. Функция $P_{M^4}(z)$ доставляет граничную точку $A_M = (0,0,0,1/2(1-1/M^4))$ множеству значений коэффициентов

$$V_5(M) = \{(a_2, a_3, a_4, \Re a_5) : f \in S^M\}, \ \ 1 < M \leq M_5^*.$$

Пусть $\partial V_5^4(M)$ обозначает часть граничной гиперповерхности $\partial V_5(M)$, которую доставляют функции $f \in S^M$, отображающие E на круг радиуса M ровно с четырьмя гладкими разрезами. Так как функция P_{M^4} отображает E на круг радиуса M с четырьмя прямолинейными разрезами, то точка A_M является внутренней точкой множества $\partial V_5^4(M)$.

Теорема 1.2. *Точка $A_M = (0,0,0,1/2(1-1/M^4))$ граничной поверхности $\partial V_5(M)$, доставляемая функцией $P_{M^4}(z)$, вдоль направления $\Im a_3$ имеет угловой характер.*

Кроме экстремальных задач, вызывают интерес и геометрические задачи теории функций комплексного переменного, которые рассматриваются **во второй главе**.

На протяжении многих лет дифференциальное уравнение Левнера

$$\frac{dw}{dt} = -w\frac{e^{iv}+w}{e^{iv}-w}, \ \ w\,|_{t=0} = z, \ |z| < 1, \ t > 0,$$

служило мощным средством изучения свойств однолистных функций в единичном круге. Оно осуществляет параметрическое представление всюду плотного подкласса конформных отображений $f(z,t)$ единичного круга E в себя с нормировкой $f(0,t) = 0, \ f'(0,t) = e^{-t}$. Это уравнение в настоящее время принято называть радиальным уравнением Левнера.

Подобная задача решается и для конформных отображений верхней полуплоскости $\mathbb{H} = \{z : \Im z > 0\}$ в себя с гидродинамической нормировкой или для им обратных с помощью хордового дифференциального уравнения Левнера, которое появилось значительно позднее, и стало особенно популярным в последние десятилетия.

Ограниченное множество K верхней полуплоскости $\mathbb{H} = \{z : \Im z > 0\}$ есть оболочка, если $K = \mathbb{H} \cap \overline{K}$ и $\mathbb{H} \setminus K$ связно и односвязно. Оболочка $K = K(T)$ имеет в верхней полуплоскости емкость $T > 0$, если конформное отображение f_K области $\mathbb{H} \setminus K$ на $\mathbb{H}$ имеет нормировку в окрестности бесконечности

$$f_K(z) = z + \frac{2T}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right).$$

Иногда $2T$ называют емкостью $K(T)$. Обозначим через $\mathcal{H}(T)$ множество конформных отображений $\mathbb{H} \setminus K(T)$, с произвольной оболочкой $K(T)$ и емкостью T, на $\mathbb{H}$ с гидродинамической нормировкой, а через $\mathcal{H}^*(T)$ – класс функций $f^{-1}(w),\ f \in \mathcal{H}(T)$.

Задача нахождения множества значений $\{f(z_0)\}$ в классе аналитических функций $f(z)$ является типичной для геометрической теории функций. Грунский[10] установил множество $\mathcal{W}(z_0) := \{\log(f(z_0)/z_0)\}$, $|z_0| < 1$ в классе S однолистных голоморфных функций $f(z)$ в единичном круге E, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Результат Грунского был обобщен Горяйновым и Гутлянским[11], которые дали описание этого множества для подкласса ограниченных функций $f \in S^M$. Рогозинским[12] точно было описано множество значений $\{f(z_0)\}$, $z_0 \in E$, для класса всех голоморфных функций $f(z)$ в E, $f(0) = 0$, $f'(0) \geq 0$ и $|f(z)| < 1$ для $|z| < 1$. Аналог результата Рогозинского для однолистных функций получен Ротом и Шляйсингером[13] в терминах гиперболической геометрии. Они доказали аналогичный результат для класса однолистных голоморфных функций $g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ с гидродинамической нормировкой. Доказательства Рота и Шляйсингера основаны на радиальном и хордовом дифференциальных уравнениях Левнера.

Во второй главе диссертационной работы продолжается исследование в классе $\mathcal{H}(T)$ при фиксированном T, в частности, находится множество значений функционала

$$\{f(z_0) : f \in \mathcal{H}(T),\ z_0 \notin K(T)\},\ \ z_0 \in \mathbb{H}.$$

Известно, что если $f(z) \in \mathcal{H}(T)$, то $f(z + a) - a \in \mathcal{H}(T)$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

[10] H. Grunsky / Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche // Berlin: Teubner, Schr. Math. Inst. u. Inst. Angew. Math. Univ. Berlin – №1. – 1932. – P. 95–140.

[11] В. В. Горяйнов, В. Я. Гутлянский / Об экстремальных задачах в классе S_M // Математический сборник. – Киев : Изд–во "Наукова думка", 1976. – С. 242–246.

[12] W. Rogosinski / Zum Schwarzen Lemma // Jber. Deutsche Math.-Verein. – 1934. – V. 44, – P. 258–261.

[13] O. Roth, S. Schleissinger / Rogosinski's lemma for univalent functions, hyperbolic Archimedean spirals and the Loewner equation // Bulletin London Mathematical Society, – 2014. – V. 46, – P. 1099–1109.

Это позволяет ограничиться нахождением множества значений функционала для чисто мнимого z_0. Кроме того, если $f(z) \in \mathcal{H}(T)$, то $rf(z/r) \in \mathcal{H}(r^2T)$ для всех $r > 0$. Таким образом, без ограничения общности, предположим, что $z_0 = i$ и рассмотрим экстремальную задачу описания множеств значений

$$D(T) = \{f(i) : f \in \mathcal{H}(T),\ i \notin K(T)\}$$

и

$$D^*(T) = \{g(i) : g \in \mathcal{H}^*(T)\},\ \ T > 0.$$

Метод описания $D(T)$ и $D^*(T)$ опирается на хордовые уравнения Левнера

$$\frac{df(z,t)}{dt} = \frac{2}{f(z,t) - \lambda(t)}, \quad f(z,0) = z, \quad t \geq 0, \tag{7}$$

и

$$\frac{dg(w,t)}{dt} = -\frac{2}{g(w,t) - \mu(t)}, \quad g(w,0) = z, \quad t \geq 0, \tag{8}$$

решения которых $f(z,T)$, $g(w,T)$ образуют плотные подклассы $\mathcal{H}(T)$ и $\mathcal{H}^*(T)$, соответственно. Здесь $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ действительнозначные непрерывные управляющие функции. Через $C_0(\varphi, T) > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $0 < T \leq \frac{1}{4}$, обозначим единственное решение уравнения

$$2\cos^2\varphi \log(1 - \sin\varphi) + (1 - \sin\varphi)^2 = 2\cos^2\varphi \log C + C^2(1 - 4T). \tag{9}$$

В работе получены получены следующие результаты.

Теорема 2.1. *Область $D(T)$, $0 < T \leq \frac{1}{4}$, ограничена двумя кривыми l_1 и l_2, соединяющими точки i и $i\sqrt{1-4T}$. Кривая l_1 в комплексной (u,v)-плоскости задается параметрическими уравнениями*

$$u(T) = \frac{C_0^2(\varphi,T)(4T-1) + (1-\sin\varphi)^2}{2C_0(\varphi,T)\cos\varphi}, \quad v(T) = \frac{1-\sin\varphi}{C_0(\varphi,T)}, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Кривая l_2 симметрична l_1 относительно мнимой оси.

Через $C_0(\varphi,T) > 0$ обозначим минимальный корень уравнения (9), а через $C_{00}(\varphi,T) > 0$ максимальный корень уравнения (9), при $T > \frac{1}{4}$ и $\varphi \in [\varphi_0(T), \frac{\pi}{2}]$. Здесь $\varphi_0(T) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $T > \frac{1}{4}$, единственное решение уравнения

$$\log\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi} + \frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi} + 1 = \log\frac{1}{4T-1}.$$

Теорема 2.2. *Область $D(T)$, $T > \frac{1}{4}$, ограничена двумя кривыми $l_1 = l_{11} \cup l_{12}$ и $l_2 = l_{21} \cup l_{22}$, имеющими общую концевую точку $i \in l_{11} \cap l_{21}$. Кривая l_{11} в комплексной (u,v)-плоскости задается параметрическими уравнениями*

$$u(T) = \frac{C_0^2(\varphi,T)(4T-1) + (1-\sin\varphi)^2}{2C_0(\varphi,T)\cos\varphi}, \quad v(T) = \frac{1-\sin\varphi}{C_0(\varphi,T)}, \quad \varphi_0(T) \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Кривая l_{12} задается параметрическими уравнениями

$$u(T)=\frac{C_{00}^2(\varphi,T)(4T-1)+(1-\sin\varphi)^2}{2C_{00}(\varphi,T)\cos\varphi},\quad v(T)=\frac{1-\sin\varphi}{C_{00}(\varphi,T)},\quad \varphi_0(T)\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

Кривая l_2 симметрична l_1 относительно мнимой оси.

Через $C^0(\varphi,T)>0$, $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, $T\ge 0$, обозначим единственный корень уравнения

$$2\cos^2\varphi\log(1+\sin\varphi)+(1+\sin\varphi)^2=2\cos^2\varphi\log C+C^2(1+4T).$$

Теорема 2.3. *Область $D^*(T)=\{g(i):g\in\mathcal{H}^*(T)\}$, $T>0$, ограничена двумя кривыми L_1 и L_2, соединяющими точки i и $i\sqrt{1+4T}$. Кривая L_1 в комплексной (u,v)-плоскости задается уравнениями*

$$u(T)=\frac{(C^0(\varphi,T))^2(4T+1)-(1+\sin\varphi)^2}{2C^0(\varphi,T)\cos\varphi},\quad v(T)=\frac{1+\sin\varphi}{C^0(\varphi,T)},\quad -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}.$$

Кривая L_2 симметрична L_1 относительно мнимой оси.

Опираясь на метод, разработанный в статье Д.В.Прохорова и К.А.Самсоновой[14], Ю.Кох и С.Шляйсингер[15] получили аналогичный результат с описанием множества значений $\{f(z_0)\}$ в классе S_T, где $S_T=\{f:E\to E, f(0)=0, f'(0)=e^{-T}\}$

В первом параграфе **третьей главы** решена экстремальная задача о минимальной емкости разрезов в верхней полуплоскости $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}:\Im z>0\}$ и проходящих через заданные точки $A_k\in\mathbb{H}$, $k=1,\dots,n$. Обозначим через γ_k, $k=1,\dots,n$, разрезы в $\mathbb{H}$, соединяющие точки A_k с вещественной осью $\mathbb{R}$. Пусть конформное отображение $f:\ \mathbb{H}\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n}\gamma_k\longrightarrow\mathbb{H}$ имеет гидродинамическую нормировку.

Теорема 3.1. *Минимальная емкость $\bigcup\limits_{k=1}^{n}\gamma_k$ относительно верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ для разрезов $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ в $\mathbb{H}$, соединяющих заданные точки $A_k\in\mathbb{H}$, $k=1,\dots,n$, с вещественной осью $\mathbb{R}$, достигается только в том случае, когда все $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ являются отрезками, перпендикулярными к $\mathbb{R}$.*

Конформные отображения $f(z,t)$ допускают непрерывное продолжение на множество всех точек $z\in\mathbb{R}$, не принадлежащих замыканию множества K_t. Продолженные таким образом отображения $f(z,t)$ удовлетворяют уравнению (7). Известная задача заключается в том, чтобы определить в терминах λ случаи, когда K_t оказывается жордановой дугой $\gamma(\tau)$, $\tau\ge 0$, с начальной точкой $\gamma(0)\in\mathbb{R}$. В этом случае $\gamma(t)$ является разрезом полуплоскости

[14] D. Prokhorov, K. Samsonova / Value range of solutions to the chordal Loewner equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications, – 2015, – V. 428, I. 2, – P. 910–919.

[15] J.Koch, Schleissinger S.J.Koch, Schleissinger S. / Value ranges of univalent self-mappings of the unit disc // Journal of Mathematical Analysis and Applications, – 2016, – V. 433, I. 2, – P. 1772-1789.

$\mathbb{H}$, а $f(z,t)$ непрерывно продолжается на множество достижимых граничных точек на обеих сторонах разреза $\gamma(t)$,

$$\lambda(t) = f(\gamma(t), t), \quad \gamma(t) = f^{-1}(\lambda(t), t).$$

Точки $\gamma(t)$ рассматриваются как носители простых концов, различных на разных сторонах дуги. Известны примеры управляющих функций в уравнении Левнера, которые генерируют отображения $\mathbb{H} \setminus K_t \to \mathbb{H}$ с круговыми двуугольниками K_t. Для классического уравнения Левнера подобный пример построен Куфаревым . Его аналог (7) для верхней полуплоскости возникает при $\lambda(t) = 3\sqrt{2}\sqrt{1-t}$.

Линейным преобразованиям управляющей функции $\lambda(t)$ соответствуют определенные преобразования решений уравнения (7). Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\lambda(0) = 0$. Геометрическое описание критических траекторий для интегралов хордового дифференциального уравнения Левнера приводится в ряде работ[16,17], как в случае интегрирования уравнения в квадратурах, так и для управляющих функций из разных функциональных классов, например, класса $\mathrm{Lip}(1/2)$.

Так же в третьей главе диссертационной работы исследовано качественное асимптотическое поведение решений дифференциального уравнения (7), генерируемых управлениями, обратными к степенной функции с натуральной степенью. Управляющая функция $\lambda(t) = \sqrt[N]{t}, \;\; N \in \mathbb{N}, \;\; N \geq 3$, выбрана как типичный представитель класса $\mathrm{Lip}(1/N)$.

Определение 3. Класс Липшица $\mathrm{Lip}(\alpha), \; 0 < \alpha \leq 1$, – это пространство непрерывных функций λ с показателем α, удовлетворяющих условию

$$\mid \lambda(s) - \lambda(t) \mid \leq c \mid s - t \mid^{\alpha} .$$

Минимальное значение c называется нормой Липшица $\|\lambda\|_{\alpha}$ порядка α.

Основной результат третьей главы содержится в следующей теореме.

Теорема 3.3. *Пусть $f(z,t)$ является решением дифференциального уравнения*

$$\frac{df(z,t)}{dt} = \frac{2}{f(z,t) - \sqrt[N]{t}}, \;\; f(z,0) = z, \;\; \Im z \geq 0, \;\; N \in \mathbb{N}, \;\; N \geq 3.$$

Тогда для достаточно малых $t > 0$ функция $f(\cdot, t)$ отображает область $D(t) = \mathbb{H} \setminus \gamma(t)$ на $\mathbb{H}$, где $\gamma(t)$ является C^1-кривой, лежащей в $\mathbb{H}$, за исключением, быть может, точки $\gamma(0) = 0$.

[16] W. Kager, B. Nienhuis, L. P. Kadanoff / Exact solutions for Loewner evolutions // Journal of Statistical Physics. – 2004. – V. 115, №3-4. – P. 805–822.

[17] Д. В. Прохоров, А. М. Захаров / Интегрируемость частного вида уравнения Левнера // Известия Саратовского Униивepситета. Новая Серия. Сер. Математика. Механика. Информатика, – 2010. – Т. 10, вып. 2. – С. 19 –23.

Известно, что если $N \geq 3$, то разрез $\gamma(t)$ в теореме 3.3 не может находиться в угле Штольца с вершиной в точке $z = 0$. В работе Д. Прохорова и А. Васильева[18] показано, что круговой разрез $\gamma(t)$, касающийся вещественной оси $\mathbb{R}$ в точке $z = 0$, генерируется управляющей функцией $\lambda(t) \in \mathrm{Lip}(\frac{1}{3})$ хордового дифференциального уравнения Левнера.

Также приводятся предварительные сведения об особых точках и соответствующих сингулярных решениях дифференциального уравнения. Даются вспомогательные результаты, характеризующие поведение сингулярных решений, содержится описание важных траекторий, порожденных уравнением Левнера, доказана теорема 3.4 об асимптотическом поведении отношения гармонических мер $m_1(t)$ и $m_2(t)$ двух сторон разреза $\gamma(t)$, генерируемого управляющей функцией уравнения Левнера.

Теорема 3.4. *Пусть функция $f(z,t)$ является решением уравнения Левнера*

$$\frac{df(z,t)}{dt} = \frac{2}{f(z,t) - \sqrt[N]{t}}, \quad f(z,0) = z, \quad \Im z \geq 0, \quad N \in \mathbb{N}, \quad N \geq 3.$$

Тогда справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t \to +0} \frac{m_1(t)}{m_2^{N-1}(t)} = 2N\pi^{N-2}.$$

Заключение

В локальной экстремальной задаче Хажинского-Тамми о максимуме модуля пятого коэффициента тейлоровского разложения голоморфной нормированной ограниченной функции точно определены границы действия гипотезы Хажинского - Тамми.

Решена задача описания множеств значений решений хордового дифференциального уравнения Левнера в классах голоморфных однолистных отображений $\mathbb{H} \setminus K(T)$ на $\mathbb{H}$ с гидродинамической нормировкой в окрестности бесконечности, где $K(T)$ – произвольная оболочка емкости T. Приведены соответствующие иллюстрации найденных множеств решений.

Исследовано качественное асимптотическое поведение решений дифференциального уравнения Левнера, которые генерируются управляющими функциями, обратными к степенной с натуральным показателем степени. Управляющая функция выбирается как типичный представитель класса

[18] D. Prokhorov, A. Vasil'ev / Singular and tangent slit solutions to the Löwner equation // Analysis and Mathematical Physics, – 2009. – P. 455–463.

$\mathrm{Lip}(\frac{1}{N})$. Найдено асимптотическое соотношение между гармоническими мерами сторон разреза.

Автор искренне благодарна своему научному руководителю д.ф.–м.н., профессору Дмитрию Валентиновичу Прохорову за постановку задач и постоянную поддержку в исследовании.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки Российской Федерации для опубликования основных результатов диссертации:

[1] Гордиенко, В. Г. Определение границы в локальной гипотезе Хажинского–Тамми для пятого коэффициента / В. Г. Гордиенко, К. А. Самсонова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика, –2013.– Т.13, вып. 4, ч.1. – С. 5-14. – 0,63 п.л.

[2] Прохоров, Д. В. Интегралы уравнения Левнера со степенной управляющей функцией / Д. В. Прохоров, К. А. Самсонова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т.13, вып. 4, ч.2. – С. 98-108. – 0,69 п.л.

[3] Prokhorov, D. Value range of solutions to the chordal Loewner equation / D. Prokhorov, K. Samsonova // Journal of Mathematical Analysis and Applications, – 2015, – V. 428, I. 2, – P. 910-919. – 0,63 п.л.

Статьи в других научных изданиях:

[4] Гордиенко, В. Г. О локально экстремальном свойстве функции Пика / В. Г. Гордиенко, К. А. Пилясова // Сборник научных трудов Механика. Математика, – Саратов: Издательство Саратовского университета, – 2012. – С. 27-30. – 0,25 п.л.

[5] Самсонова, К. А. Аппроксимация решений уравнения Левнера / К. А. Самсонова // Труда математического центра имени Н.И.Лобачевского: Материалы тринадцатой молодежной школы – конференции "Лобачевские чтения – 2014".– Казань: Издательство Казанского математического общества, Издательство Казанского университета, – 2014. – Т. 50, – С. 159-161. – 0,19 п.л.

[6] Самсонова, К. А. Интегралы уравнения Левнера и гармонические меры разреза области / К. А. Самсонова //Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 17-й саратовской зимней школы. – Саратов: ООО Издательство "Научная книга", – 2014. – С . 242-245. – 0,25 п.л.

[7] Самсонова, К. А. Множество значений решений хордового уравнения Левнера / К. А. Самсонова // Комплексный анализ и его приложения: материалы международной научно-практической конференции "Комплексный анализ и его приложения". – Брянск: РИО БГУ, – 2015. – С. 51-53. – 0,25 п.л.

[8] Самсонова, К. А. Множество значений решений хордового уравнения Левнера / К. А. Самсонова // Труда математического центра имени Н.И.Лобачевского: Материалы Двенадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции.– Казань: Издательство Казанского математического общества, Издательство Академии наук РТ, – 2015. – Т. 51, – С. 388-390. – 0,19 п.л.

[9] Самсонова, К. А. Об отображении с минимальной емкостью разреза / К. А. Самсонова // Сборник научных трудов Механика. Математика, – Саратов: Издательство Саратовского университета, – 2014. – С. 27-30. – 0,25 п.л.

[10] Samsonova, K.A. Determination of the boundary in the local Charzynski-Tammi conjecture / K.A.Samsonova // Комплексный анализ и его приложения: Материалы VII Петрозаводской международной конференции. – Петрозаводск : Издательство Петрозаводского государственного университета, – 2014, – С. 88-93. – 0,38 п.л.