На правах рукописи

ИБРАГИМОВА НАИЛЯ АНАСОВНА

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ B-МЕТАГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2015

Работа выполнена на кафедре высшей математики и математического моделирования ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Научный руководитель:	**Уткина Елена Анатольевна**, доктор физико-математических наук, доцент кафедры общей математики ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
Официальные оппоненты:	**Кожанов Александр Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории дифференциальных и разностных уравнений ФГБУН Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск
	Ляхов Лев Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и прикладного анализа ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Самарский государственный университет», г. Самара

Защита диссертации состоится 29 октября 2015 года в 16 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35, НБ КФУ.

Автореферат разослан «__» августа 2015 г. и размещен на официальном сайте ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»: http://kpfu.ru/dis_card?p_id=1992

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10,
кандидат физико-математических наук, доцент Е.К. Липачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Сингулярные уравнения, содержащие оператор Бесселя

$$B_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{x}\frac{\partial}{\partial x},$$

действующий по одной или нескольким из пространственных переменных, являются актуальной областью исследований. Изучение таких уравнений вызвано и теоретическими интересами, и практической необходимостью. Отметим, что исследование задач гидроаэродинамики вязкой жидкости и неидеального газа, а также задачи акустики привели к изучению дифференциальных уравнений с сингулярным оператором Бесселя. Например, в середине 60-х годов при изучении влияния вязкости и теплопроводности на структуру сжимаемых течений при обтекании тел конечных размеров звуковым на бесконечности потоком неидеального газа О.С. Рыжовым и Г.М. Шефтером были получены стационарное и нестационарное вязкое трансзвуковые уравнения

$$P_\gamma u = \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\gamma}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right) u(x,y) = f_0(x,y),$$

$$L_\gamma v = \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} - P_\gamma\right) v(t,x,y) = -f(t,x,y),$$

где $\gamma = \text{const} \geqslant 0$.

Кроме того, вырождающиеся эллиптические уравнения с оператором Бесселя встречаются в теории фильтрации при исследовании процессов переноса массы через неоднородные пористые пласты, а также в современной космологии при рассмотрении экзотических состояний материи.

Начиная с самых первых исследований дифференциальных уравнений с частными производными теория сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя играла важную роль (E. Beltrami, A.Weinstein и др.).

В 1881 году впервые E. Beltrami были построены фундаментальные решения уравнения

$$\Delta_B u = 0, \tag{0.1}$$

где $\Delta_B = \Delta_{x'} + B_{x_p}$, $\Delta_{x'}$ —оператор Лапласа, $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$, B_{x_p} — оператор Бесселя, при $k = 1$ и $p = 2$. A. Weinstein этот результат распространил на любое значение $k > 0$. И.А. Киприяновым и В.И. Кононенко построены фундаментальные решения общих линейных B-эллиптических уравнений. Фундаментальной матрице решений B-параболической системы (параболической системы с оператором Бесселя) посвящена работа В.В. Крехивского и М.И. Матийчука.

Как и для любых уравнений в частных производных, в теории сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя центральное положение занимает теория краевых задач.

Одной из первых работ, посвященных краевым задачам для этого класса уравнений, является статья И.Н. Векуа, опубликованная в 1947 году. В ней изучен вопрос о корректности постановки задачи Дирихле для уравнения (0.1) в полуплоскости $x_2 > 0$ при $p = 2$ и $k < 1$. Ряд результатов о краевых задачах для уравнений с оператором Бесселя в случае $p > 2$ были получены М.Н. Олевским, A. Huber, С.П. Пулькиным, В.Ф. Волкодавым, В.И. Евсиным, N.S. Hall, О.И. Маричевым, и другими.

Начало интенсивному развитию теории сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя положила фундаментальная работа И.А. Киприянова, опубликованная в 1967 году. Эллиптические уравнения, по одной или нескольким переменным которых действует оператор Бесселя, впервые и были названы И.А. Киприяновым B-эллиптическими. Задачи для дифференциальных уравнений с особенностью в коэффициентах давно и хорошо известны. Методы их решения не являются стандартными и, как правило, зависят от характера особенностей уравнения. Один из подходов, развитый И.А. Киприяновым и его научной школой (Л.А. Иванов, В.В. Катрахов, М.И. Ключанцев, Л.Н. Ляхов и др.), заключается в использовании интегральных преобразований, приспособленных именно к данной особенности уравнения.

И.А. Киприяновым была создана теория весовых функциональных пространств. В настоящее время эти пространства известны как пространства Киприянова. С помощью этих пространств им и его учениками установлен ряд важных результатов для B-эллиптических, B-параболических и B-гиперболических уравнений.

Другой подход к построению весовых функциональных пространств на основе операторов преобразования типа Пуассона и Сонина был предложен учеником И.А. Киприянова В.В. Катраховым. Эти исследования применены им к изучению общих краевых задач для B-эллиптических уравнений с весовыми неоднородными граничными условиями на характеристической части границы.

Важный вклад в изучение сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя внесли работы Л.Н. Ляхова и его учеников. Так Л.Н. Ляховым введен и изучен новый класс гиперсингулярных интегралов, названный им B-гиперсингулярными интегралами. Им рассмотрены основные приложения этих конструкций к описанию весового класса функций дробной B-гладкости, представляющих собой обобщения функциональных классов И.А. Киприянова, и к построению формул обращений интегральных уравнений с B-потенциальным ядром.

Совместные исследования Л.Н. Ляхова и И.А. Киприянова привели к получению преобразования Киприянова-Радона и формулы, связывающей все три классические интегральные преобразования — Фурье, Фурье-Бесселя и Радона. Позднее Л.Н. Ляховым были получены формулы обращения преобразования Киприянова-Радона.

В работе Н.В. Роговой вариационным методом, используя теоремы вложения, решены задачи Дирихле и Неймана для сингулярного B-эллиптического уравнения и основная краевая задача для B-полигармонического уравнения

$$\Delta_B^m u = 0.$$

Ряд результатов для уравнений с оператором Бесселя были получены А.Б. Муравником. Он доказал в терминах весовых средних граничной функции необходимое и достаточное условие стабилизации решения, то есть существование конечного предела решения при стремлении аргумента к бесконечности по направлению, ортогональному граничной гиперплоскости.

Среди методов решения краевых задач для сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя особое место занимает метод потенциалов, поскольку с помощью правильно подобранных потенциалов сингулярная задача может быть сведена к регулярной системе интегральных уравнений, к тому же интегральные уравнения — это весьма удобный аппарат для доказательства теорем существования. Мы знаем, что доказательство существования решения часто является трудной задачей, и в ряде проблем существование решения до сих пор остается недоказанным. Известно, что очень долго (до создания общей теории интегральных уравнений) существование функции Грина, играющей, как известно, большую роль при исследовании задач математической физики, в общем случае выводилось из физической гипотезы о потенциале точечного источника и индуцируемых этим источником зарядов на границе.

Что касается метода потенциалов в теории B-эллиптических, B- полигармонических уравнений, то можно назвать работы Ф.Г. Мухлисова, Н.Р. Раджабова, А.Ю. Сазонова и их учеников.

В частности, Н.Р. Раджабов исследовал краевые задачи для уравнения (0.1) при условиях, когда нехарактеристическая часть границы есть поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол. Далее А.Ю. Сазонов распространил эти результаты на общие линейные B-эллиптические уравнения с переменными коэффициентами при тех же ограничениях на нехарактеристическую часть границы области.

Ф.Г. Мухлисовым методом потенциалов решена задача типа Рикье для уравнения

$$\Delta_B^m u = 0,$$

краевые условия которой задаются в видах

$$\Delta_B^k u\Big|_\Gamma = f_k, \quad k = \overline{0, m-1},$$

$$\frac{\partial \Delta_B^k u}{\partial n}\Bigg|_\Gamma = f_k, \quad k = \overline{0, m-1}.$$

В дальнейшем ученики Ф.Г. Мухлисова М.Ю. Денисова, А.Ш. Хисматуллин и Э.В. Чеботарева развили эти результаты. М.Ю. Денисова применила метод потенциалов при решении основных краевых задач для уравнений

$$\Delta_B^2 u = 0, \quad \Delta_B^3 u = 0,$$

с краевыми условиями

$$u\Big|_\Gamma = f_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Bigg|_\Gamma = f_1, \quad \Delta_B u\Big|_\Gamma = f_2.$$

А.Ш. Хисматуллин распространил результаты, полученные для вырождающихся эллиптических уравнений, на вырождающиеся B-эллиптические уравнения с двумя независимыми переменными первого и второго рода.

$$y^m B_x u + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad m > 0,\ y \geqslant 0,$$

$$B_x u + y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad m > 0,\ y \geqslant 0,$$

$$B_x u + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^\alpha \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad 0 < \alpha < 1,\ y \geqslant 0.$$

Э.В. Чеботарева обобщила результаты полученные А.Ш. Хисматуллиным на многомерные вырождающиеся B-эллиптические уравнения.

Краевые задачи как для эллиптических, так и для B-эллиптических уравнений могут ставиться также в неограниченных областях. Однако в этом случае для обеспечения единственности решения, кроме условий на границе области, необходимо задавать условия на бесконечности. Впервые такие условия для уравнения Гельмгольца были найдены Зоммерфельдом. В работе И.Н. Векуа этот результат был распространен на m-метагармонические уравнения, а в статьях В.В. Грушина, Ф.Г. Мухлисова на гипоэллиптические,

B-гипоэллиптические уравнения более общего вида, а в данной диссертационной работе — на B-метагармоническое уравнение и B-эллиптические системы.

Отметим, что несмотря на исследование дифференциальных уравнений в частных производных с оператором Бесселя разными учеными и школами, вопросы существования и единственности решения основных краевых задач для B-эллиптических систем и B-метагармонических уравнений оставались не изученными.

Изучение краевых задач для сингулярного B-метагармонического уравнения и для B-эллиптических систем является актуальным в связи с тем, что эти краевые задачи могут найти применение при решении многих важных задач прикладного характера, в их числе задачи дифракции акустических волн, задачи гидроаэродинамики вязкой жидкости и неидеального газа, задачи фильтрации в пористой среде, задачи теории упругости и др. Кроме того, они представляют и самостоятельный математический интерес, так как методы решения этих уравнений открывают дополнительные возможности для развития теории сингулярных дифференциальных уравнений. Таким образом, прогресс в аналитическом исследовании подобных задач важен как с теоретической, так и с практической точек зрения.

Целью настоящей работы является решение основных краевых задач методом потенциалов B-метагармонического уравнения m-го порядка методом сведения этого уравнения к многомерной B-эллиптической системе, последующее построение и применение потенциалов к исследованию внутренних и внешних краевых задач для многомерных B-эллиптических систем второго порядка и доказательство существования единственного решения краевых задач.

Методы исследования. Применяются методы классической теории потенциала, теории функциий действительной переменной, дифференциальных и интегральных уравнений.

Научная новизна и положения, выносимые на защиту. В диссертации получены следующие новые результаты, которые выносятся на защиту:

- Методом потенциалов решены основные краевые задачи для B- метагармонического уравнения m-го порядка.

- Построены фундаментальные матрицы решений многомерных B- эллиптических систем уравнений, доказана единственность решения основных краевых задач для многомерных B-эллиптических систем уравнений и изучены основные свойства этих решений, в частности, поведение их на бесконечности.

- Построены потенциалы, изучены их свойства. Исследована разрешимость основных краевых задач для многомерных B-эллиптических систем уравнений методом потенциалов.

Теоретическая и практическая значимость. Данная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории неклассических уравнений с сингулярным оператором Бесселя, краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений и осесимметрических задач теории потенциала, применяемых при решении задач прикладного характера. Результаты диссертации могут быть использованы в учебном процессе, спецкурсах и монографиях, в научных исследованиях, проводимых в Воронежской государственной технологической академии (научная школа Л.Н. Ляхова), Тамбовском государственном университете им. Г.Р. Державина (научная школа А.Ю. Сазонова), Черновицком национальном университете Украины (научная школа В.В. Городецкого), Институте математики и механики Национальной Академии наук Азербайджана (научная школа В.С. Гулиева).

Апробация работы. Результаты диссертационной работы по мере их получения докладывались на семинарах кафедры математического анализа Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета (Казань, 2009–2011), семинарах кафедры высшей математики и математического моделирования Казанского (Приволжского) федерального университета (Казань, 2011–2014, руководитель семинара — профессор Ф.Г. Мухлисов), семинарах кафедры дифференциальных уравнений Казанского (Приволжского) федерального университета (Казань, руководитель семинара — профессор В.И. Жегалов), межвузовском городском семинаре «Неклассические задачи математической физики» (Самара, 2013, руководитель семинара — профессор Л.С. Пулькина).

Основные результаты работы докладывались на Второй всероссийской научно-практической конференции, посвященной памяти заслуженного деятеля науки РФ, члена-корреспондента РАЕ, доктора физ.-мат. наук, профессора В.Ф. Волкодавова (Самара, 2009), Девятой молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения» (Казань, 2010), XVIII Международной конференции «Математика. Экономика. Образование» (Ростов-на-Дону, 2010), Десятой международной Казанской летней научной школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 2011), Втором Международном Российско-Узбекском Симпозиуме «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (Кабардино-Балкарская Республика, Нальчик, 2012) (включен в «Перечень научных конференций, симпозиумов, съездов, семинаров и школ на 2012 г.» по Отделению математических наук РАН и по Отделению нанотехнологий и информационных технологий РАН), XX Международной конференции «Математика. Экономика. Образование» (Ростов-на-Дону, 2012), Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева «Обратные и некорректные задачи математической физики» (Новосибирск, 2012), научно-практических итоговых конференциях при кафедре математического анализа Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета (Казань, 2009–2011, руководитель — профессор Ф.Г. Мухлисов), при кафедре дифференциальных уравнений Казанского (Приволжского) федерального университета (Казань, 2013, руководитель — профессор В.И. Жегалов), Международной научной конференции, посвященной 80-летию В.И. Жегалова «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций — 2014» (Казань, 2014).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 11 печатных работ, список которых приведен в конце автореферата, из них две [1], [2] — в изданиях, входящих в перечень ВАК и базу РИНЦ. Работы [1], [11] написаны совместно с Ф.Г. Мухлисовым, которому принадлежат постановка задач, идея и рекомендации по их решению. Доказательства всех результатов получены автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 13 параграфов, заключения и списка литературы, содержащего 85 наименований. Работа набрана в системе LaTeX и изложена на 135 страницах.

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы, исследованной в диссертации, формулируется цель исследования, приводится краткий обзор работ по теме диссертации и вопросам, примыкающим к ней, а также приводятся основные результаты исследования.

Первая глава, состоящая из шести параграфов, посвящена краевым задачам для B-метагармонического уравнения m-го порядка

$$P_m(\Delta_B)u = 0, \tag{P_m}$$

где $P_m(\Delta_B)$ — полином m-й степени от Δ_B, $k > 0$, когда корни λ_j, $j = \overline{1,m}$ характеристического уравнения $P_m(-\lambda) = 0$ различные вещественные положительные.

Пусть $\mathbb{E}_p^+$ — полупространство $x_p > 0$ p-мерного евклидова пространства точек $x = (x', x_p)$, $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$, D — конечная область в $\mathbb{E}_p^+$, ограниченная частью $\mathit{\Gamma}_0$ плоскости $x_p = 0$ и поверхностью $\mathit{\Gamma}$, $D_e = \mathbb{E}_p^+ \setminus \overline{D}$.

В первом параграфе уравнение (P_m) сводится к B-эллиптической системе уравнений

$$N_B[\bar{u}] = \Delta_B \bar{u} + \mathcal{R}\bar{u} = 0, \qquad (N_B)$$

где

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{m-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}.$$

Во втором параграфе строится фундаментальная матрица решений $Z(x, x_0)$ B-эллиптической системы (N_B) при $\lambda_j > 0$, $j = \overline{1, m}$. Исследуется ее поведение на бесконечности и при $x \to x_0$. В третьем параграфе с помощью фундаментальной матрицы решений $Z(x, x_0)$ вводятся в рассмотрение потенциалы простого и двойного слоя

$$V(x) = \int\limits_{\Gamma} Z(\xi, x)\, \mu(\xi) \xi_p^k \, d\Gamma,$$

$$W(x) = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial Z(\xi, x)}{\partial n}\, \nu(\xi) \xi_p^k d\Gamma$$

и изучаются их свойства, в частности, доказываются теоремы о предельном значении потенциала двойного слоя и нормальной производной потенциала простого слоя на границе области.

Далее через $\widehat{\mathrm{E}}$ будем обозначать матрицу порядка m: $\widehat{\mathrm{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Теорема 1.1. *Пусть Γ — поверхность Ляпунова и в точках пересечения поверхности Γ с Γ_0 углы между касательными плоскостями с плоскостью Γ_0, таковы, что $\theta_j = \pi$, $j = \overline{1, p-2}$, $\theta_{p-1} = \dfrac{\pi}{2}$ и $\nu(\xi)$ — непрерывная функция. Тогда имеют место следующие предельные соотношения*

$$W_i(x_0) = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{E}}\nu_0 + \overline{W(x_0)},$$

$$W_e(x_0) = -\frac{1}{2}\widehat{\mathrm{E}}\nu_0 + \overline{W(x_0)},$$

где точка $x_0 \in \Gamma$ — фиксированная точка, $W_i(x_0)$ и $W_e(x_0)$ означают предельные значения для потенциала двойного слоя, когда точка x стремится к точке $x_0 \in \Gamma$ соответственно изнутри и извне границы Γ, а $\overline{W(x_0)}$ — прямое значение потенциала двойного слоя в точке $x_0 \in \Gamma$, $\nu_0 = \nu(x_0)$ — вектор-столбец.

Теорема 1.2. *Пусть $\mathit{\Gamma}$ — поверхность Ляпунова и в точках пересечения поверхности $\mathit{\Gamma}$ с $\mathit{\Gamma}_0$ углы между касательными плоскостями с плоскостью $\mathit{\Gamma}_0$, таковы, что $\theta_j = \pi$, $j = \overline{1, p-2}$, $\theta_{p-1} = \dfrac{\pi}{2}$ и $\nu(\xi)$ — непрерывная функция. Тогда потенциал простого слоя непрерывен в E_p^+.*

Теорема 1.3. *Пусть $\mathit{\Gamma}$ — поверхность Ляпунова и в точках пересечения поверхности $\mathit{\Gamma}$ с $\mathit{\Gamma}_0$ углы между касательными плоскостями с плоскостью $\mathit{\Gamma}_0$, таковы, что $\theta_j = \pi$, $j = \overline{1, p-2}$, $\theta_{p-1} = \dfrac{\pi}{2}$ и $\nu(\xi)$ — непрерывная функция. Тогда имеют место следующие предельные соотношения*

$$\left[\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}\right]_i = -\frac{1}{2}\widehat{\mathrm{E}}\mu_0 + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}},$$

$$\left[\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}\right]_e = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{E}}\mu_0 + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}},$$

где $\overline{\dfrac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}}$ — прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя, а $\left[\dfrac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}\right]_i$ и $\left[\dfrac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}\right]_e$ означают предельные значения для нормальной производной потенциала простого слоя, когда точка x стремится к точке $x_0 \in \mathit{\Gamma}$ соответственно изнутри и извне границы $\mathit{\Gamma}$, $\mu_0 = \mu(x_0)$ — вектор-столбец. Индекс у нормали означает что она проведена в точке x_0.

В четвертом параграфе изучаются краевые задачи для уравнения (P_m) в конечной и бесконечной областях.

Это следующие задачи:

Первая внутренняя краевая задача. Найти функцию $u(x)$, являющуюся решением уравнения (P_m) в области D, когда корни характеристического уравнения $P_m(-\lambda) = 0$ различные положительные, и удовлетворяющую условиям

$$\begin{gathered} u(x) \in C^{2m}(D) \cap C^{2m-2}(\overline{D}), \\ u\Big|_{\mathit{\Gamma}} = \varphi_1(\xi), \quad \Delta_B u\Big|_{\mathit{\Gamma}} = \varphi_2(\xi), \ \ldots, \Delta_B^{m-1} u\Big|_{\mathit{\Gamma}} = \varphi_m(\xi), \\ \varphi_j(\xi) \in C(\mathit{\Gamma}), \quad j = \overline{1, m}. \end{gathered} \tag{0.2}$$

Первая внешняя краевая задача. Найти функцию $u(x)$, являющуюся решением уравнения (P_m) в области D_e и удовлетворяющую условиям

$$\begin{gathered} u(x) \in C^{2m}(D_e) \cap C^{2m-2}(\overline{D_e}), \\ u\Big|_{\mathit{\Gamma}} = \varphi_1(\xi), \quad \Delta_B u\Big|_{\mathit{\Gamma}} = \varphi_2(\xi), \ \ldots, \Delta_B^{m-1} u\Big|_{\mathit{\Gamma}} = \varphi_m(\xi), \\ \varphi_j(\xi) \in C(\mathit{\Gamma}), \quad j = \overline{1, m}, \end{gathered} \tag{0.3}$$

причем при $R \to \infty$

$$\int\limits_{S_R^+} |u|^2 \, x_p^k \, dS_R = \mathrm{O}(1), \qquad \int\limits_{S_R^+} \sum_{t=1}^{m} \left| \frac{\partial u^t}{\partial r} - i\sqrt{\lambda_t}\, u^t \right|^2 x_p^k \, dS_R = \mathrm{o}(1),$$

где $u = \sum\limits_{t=1}^{m} u^t$, λ_t — корни характеристического уравнения $P_m(-\lambda) = 0$, λ_t — различные положительные, $t = \overline{1, m}$.

Вторая внутренняя краевая задача. Найти функцию $u(x)$, являющуюся решением уравнения (P_m) в области D, когда корни характеристического уравнения $P_m(-\lambda) = 0$ различные положительные, и удовлетворяющую условиям

$$u(x) \in C^{2m}(D) \cap C^{2m-1}(\overline{D}),$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\mathit{\Gamma}} = \psi_1(\xi), \quad \left.\frac{\partial \Delta_B u}{\partial n}\right|_{\mathit{\Gamma}} = \psi_2(\xi), \; \ldots \;, \left.\frac{\partial \Delta_B^{m-1} u}{\partial n}\right|_{\mathit{\Gamma}} = \psi_m(\xi), \tag{0.4}$$
$$\psi_j(\xi) \in C(\mathit{\Gamma}), \quad j = \overline{1, m}.$$

Вторая внешняя краевая задача. Найти функцию $u(x)$, являющуюся решением уравнения (P_m) в области D_e и удовлетворяющую условиям

$$u(x) \in C^{2m}(D_e) \cap C^{2m-1}(\overline{D_e}),$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\mathit{\Gamma}} = \psi_1(\xi), \quad \left.\frac{\partial \Delta_B u}{\partial n}\right|_{\mathit{\Gamma}} = \psi_2(\xi), \; \ldots \;, \left.\frac{\partial \Delta_B^{m-1} u}{\partial n}\right|_{\mathit{\Gamma}} = \psi_m(\xi), \tag{0.5}$$
$$\psi_j(\xi) \in C(\mathit{\Gamma}), \quad j = \overline{1, m},$$

причем при $R \to \infty$

$$\int\limits_{S_R^+} |u|^2 \, x_p^k \, dS_R = \mathrm{O}(1), \qquad \int\limits_{S_R^+} \sum_{t=1}^{m} \left| \frac{\partial u^t}{\partial r} - i\sqrt{\lambda_t}\, u^t \right|^2 x_p^k \, dS_R = \mathrm{o}(1),$$

где $u = \sum\limits_{t=1}^{m} u^t$, λ_t — корни характеристического уравнения $P_m(-\lambda) = 0$, λ_t — различные положительные, $t = \overline{1, m}$.

Эти задачи сводятся к краевым задачам для системы (N_B). Доказывается единственность решения краевых задач. В пятом параграфе задачи Дирихле и Неймана для B-эллиптической системы (N_B), а вместе с тем и краевые задачи для B-метагармонического уравнения m-го порядка (P_m) сводятся к системам интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Доказывается однозначная разрешимость этих систем. В шестом параграфе строятся решения систем интегральных уравнений соответствующих внутренним и внешним краевым задачам Дирихле и Неймана для B-эллиптической системы уравнений. С помощью этих решений дается явное представление решения краевых задач для уравнения (P_m).

Во второй главе исследуются краевые задачи для B-метагармонического уравнения m-го порядка (P_m), когда корни λ_j, $j = \overline{1,m}$ характеристического уравнения $P_m(-\lambda) = 0$ различные вещественные отрицательные.

В первом параграфе строится и исследуется фундаментальная матрица решений $\Omega(x, x_0)$ B-эллиптической системы уравнений (N_B), при $\lambda_j < 0$, $j = \overline{1,m}$. Во втором параграфе с помощью фундаментальной матрицы решений $\Omega(x, x_0)$ вводятся в рассмотрение потенциалы простого и двойного слоя

$$V(x) = \int\limits_{\Gamma} \Omega(\xi, x)\, \mu(\xi) \xi_p^k \, d\Gamma,$$

$$W(x) = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial \Omega(\xi, x)}{\partial n}\, \nu(\xi) \xi_p^k d\Gamma,$$

Изучаются свойства этих потенциалов и, в частности, доказываются теоремы о предельном значении потенциала двойного слоя и нормальной производной потенциала простого слоя на границе области.

В третьем параграфе изучаются следующие краевые задачи для уравнения (P_m):

Первая внутренняя краевая задача. Найти функцию $u(x)$, являющуюся решением уравнения (P_m) в области D, когда корни характеристического уравнения $P_m(-\lambda) = 0$ различные отрицательные, и удовлетворяющую условиям (0.2).

Первая внешняя краевая задача. Найти функцию $u(x)$, являющуюся решением уравнения (P_m) в области D_e, когда корни характеристического уравнения $P_m(-\lambda) = 0$ различные отрицательные, и удовлетворяющую условиям (0.3), причем на бесконечности

$$u(x) = \mathrm{O}(e^{-R}).$$

Вторая внутренняя краевая задача. Найти функцию $u(x)$, являющуюся решением уравнения (P_m) в области D, когда корни характеристического уравнения $P_m(-\lambda) = 0$ различные отрицательные, и удовлетворяющую условиям (0.4).

Вторая внешняя краевая задача. Найти функцию $u(x)$, являющуюся решением уравнения (P_m) в области D_e, когда корни характеристического уравнения $P_m(-\lambda) = 0$ различные отрицательные, и удовлетворяющую условиям (0.5), причем на бесконечности

$$u(x) = \mathrm{O}(e^{-R}).$$

Эти задачи сводятся к краевым задачам для системы (N_B). Доказывается единственность решения краевых задач. В четвертом параграфе задачи Дирихле и Неймана для B-эллиптической системы (N_B), а вместе с тем и краевые задачи для B-метагармонического уравнения m-го порядка (P_m) сводятся к системам интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Доказывается однозначная разрешимость этих систем, а тем самым существование решения краевых задач. В пятом параграфе дается явное представление решения краевых задач для уравнения (P_m).

В третьей главе диссертационной работы исследуются краевые задачи для B-эллиптических систем уравнений более общего вида. Она состоит из двух параграфов, каждый из которых разбит на четыре пункта.

В первом параграфе этой главы рассматривается B-эллиптическая система уравнений

$$L_B[u] = \Delta_B u + Au = 0, \tag{0.6}$$

где $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ — искомая вектор-функция, $k > 0$, когда $A = (a_{sj})$ — вещественная симметрическая положительно определенная матрица порядка m.

В первом пункте §1 строится фундаментальная матрица решений системы (0.6) и изучаются ее свойства. Во втором пункте с помощью фундаментальной матрицы решений вводятся в рассмотрение потенциалы простого и двойного слоя для системы (0.6) и изучаются их свойства, в частности, исследуются предельные значения этих потенциалов на границе области.

В третьем пункте даются постановки основных краевых задач для системы (0.6) и доказывается единственность их решения. Рассмотрены следующие краевые задачи:

Внутренняя краевая задача Дирихле. Найти вектор-функцию $u(x)$, являющуюся решением системы (0.6) в области D и удовлетворяющую следующим условиям:

$$\begin{gathered} u(x) \in C^2(D) \cap C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \mathit{\Gamma}_0), \\ u\Big|_{\mathit{\Gamma}} = f(\xi), \quad f(\xi) \in C(\mathit{\Gamma}), \end{gathered} \tag{0.7}$$

где $f(\xi) = \begin{pmatrix} f_1(\xi) \\ \vdots \\ f_m(\xi) \end{pmatrix}$.

Внешняя краевая задача Дирихле. Найти вектор-функцию $u(x)$, являющуюся решением системы (0.6) в области D_e, удовлетворяющую следующим условиям:

$$
\begin{gathered}
u(x) \in C^2(D_e) \cap C(\overline{D}_e) \cap C^1(D_e \cup \Gamma_0), \\
u\Big|_{\Gamma} = f(\xi), \quad f(\xi) \in C(\Gamma),
\end{gathered}
\tag{0.8}
$$

при $R \to \infty$

$$
\int\limits_{S_R^+} |u_s|^2 \, x_p^k \, dS_R = \mathrm{O}(1), \qquad \int\limits_{S_R^+} \sum_{t=1}^{m} \left| \frac{\partial u_s^t}{\partial r} - i\sqrt{\lambda_t}\, u_s^t \right|^2 x_p^k \, dS_R = \mathrm{o}(1),
$$

где $u_s = \sum\limits_{t=1}^{m} u_s^t$, λ_t $(t = \overline{1,m})$ — собственные значения матрицы A, $s = \overline{1,m}$.

Внутренняя краевая задача Неймана. Найти вектор-функцию $u(x)$, являющуюся решением системы (0.6) в области D и удовлетворяющую следующим условиям:

$$
\begin{gathered}
u(x) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}), \\
\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = g(\xi), \quad g(\xi) \in C(\Gamma),
\end{gathered}
\tag{0.9}
$$

где $g(\xi) = \begin{pmatrix} g_1(\xi) \\ \vdots \\ g_m(\xi) \end{pmatrix}$.

Внешняя краевая задача Неймана. Найти вектор-функцию $u(x)$, являющуюся решением системы (0.6) в области D_e и удовлетворяющую следующим условиям:

$$
\begin{gathered}
u(x) \in C^2(D_e) \cap C^1(\overline{D}_e), \\
\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = g(\xi), \quad g(\xi) \in C(\Gamma),
\end{gathered}
\tag{0.10}
$$

при $R \to \infty$

$$
\int\limits_{S_R^+} |u_s|^2 \, x_p^k \, dS_R = \mathrm{O}(1), \qquad \int\limits_{S_R^+} \sum_{t=1}^{m} \left| \frac{\partial u_s^t}{\partial r} - i\sqrt{\lambda_t}\, u_s^t \right|^2 x_p^k \, dS_R = \mathrm{o}(1),
$$

где $u_s = \sum\limits_{t=1}^{m} u_s^t$, λ_t $(t = \overline{1,m})$ — собственные значения матрицы A, $s = \overline{1,m}$.

В четвертом пункте краевые задачи сводятся к системам интегральных уравнений Фредгольма второго рода и доказывается их однозначная разрешимость.

Во втором параграфе исследуется B-эллиптическая система уравнений

$$F_B[u] = \Delta_B u + Cu = 0, \tag{0.11}$$

где $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ — искомая вектор-функция, $k > 0$, когда $C = (c_{sj})$ — вещественная симметрическая отрицательно определенная матрица порядка m.

В первом пункте §2 строится фундаментальная матрица решений системы (0.11) и исследуются ее свойства. Во втором пункте §2 с помощью фундаментальной матрицы построенной в первом пункте этого параграфа вводятся потенциалы простого и двойного слоев для системы (0.11). Изучаются свойства этих потенциалов и, в частности, исследуется их поведение на границе области.

В третьем пункте даются постановки основных краевых задач:

Внутренняя краевая задача Дирихле. Найти в области D решение системы (0.11), удовлетворяющее условиям (0.7).

Внешняя краевая задача Дирихле. Найти в области D_e решение системы (0.11), удовлетворяющее условиям (0.8), причем на бесконечности

$$u(x) = \mathrm{O}\left(e^{-R}\right).$$

Внутренняя краевая задача Неймана. Найти в области D решение системы (0.11), удовлетворяющее условиям (0.9).

Внешняя краевая задача Неймана. Найти в области D_e решение системы (0.11), удовлетворяющее условиям (0.10), причем на бесконечности

$$u(x) = \mathrm{O}\left(e^{-R}\right).$$

Доказывается единственность решения всех поставленных краевых задач. В четвертом пункте краевые задачи сводятся к системам интегральных уравнений Фредгольма второго рода и доказывается их однозначная разрешимость.

В заключение автор выражает признательность и благодарность доктору физико-математических наук Елене Анатольевне Уткиной за научное руководство, ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку. А также автор благодарен ныне покойному первому научному руководителю Фоат Габдулловичу Мухлисову за предложенную тематику исследований, помощь и советы.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК РФ

1. Ибрагимова Н. А. Исследование краевых задач для одной B- эллиптической системы уравнений методом потенциалов/ Н. А. Ибрагимова, Ф. Г. Мухлисов// Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – Тула: Изд. ТулГУ– 2011.– Вып.3 – С.31–41.

2. Ибрагимова Н. А. Решение краевых задач для B-полигармонического уравнения методом потенциалов/ Н. А. Ибрагимова// Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – Тула: Изд. ТулГУ – 2012.– Вып.2 – С.51–63.

Основные публикации в научных журналах и сборниках трудов научных конференций

3. Ибрагимова Н. А. О фундаментальной матрице решений одной B- эллиптической системы уравнений/ Н. А. Ибрагимова// Материалы Второй Всероссийской научно-практической конференции посвященной памяти доктора физ.-мат. наук, профессора В.Ф. Волкодавова. – Самара: Изд. ПГСГА – 2009.– С.21–26.

4. Ибрагимова Н. А. Интегральное представление решения системы уравнений B- эллиптического типа/ Н. А. Ибрагимова// Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского (материалы 9-й молодежной научной школы–конференции «Лобачевские чтения–2010»). – Казань: Изд. Казанского математического общества – 2010.– Т.40.– С.143–148.

5. Ибрагимова Н. А. Об интегральном представлении решения B- эллиптической системы уравнений/ Н. А. Ибрагимова// Труды XVIII Международной конференции «Математика. Экономика. Образование». – Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ – 2010.– С.13–17.

6. Ибрагимова Н. А. Фундаментальная матрица решений с особенностью в произвольной точке B-эллиптической системы уравнений/ Н. А. Ибрагимова// Материалы Всероссийской заочной интернет-конференции, посвященной 100-летию Поволжской государственной социально-гуманитарной академии, «Естественно-научное образование. Прошлое, настоящее, будущее». – Самара: Изд. ПГСГА – 2011.– С.33–44.

7. Ибрагимова Н. А. Решение основных краевых задач для B-эллиптической системы уравнений методом потенциалов/ Н. А. Ибрагимова// Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского (материалы 10-й Международной Казанской летней научной школы-конференции) – Казань: Изд. Казанского математического общества – 2011.– Т.43.– С.153–155.

8. Ибрагимова Н. А. Фундаментальная матрица решений B-эллиптической системы уравнений с отрицательно определенной матрицей/ Н. А. Ибрагимова// Тезисы докладов XX Международной конференции «Математика. Экономика. Образование». – Ростов-на-Дону: Изд. СКНЦ ВШ ЮФУ – 2012.– С.56.

9. Ибрагимова Н. А. Решение первой краевой задачи для B- полигармонического уравнения методом потенциалов/ Н. А. Ибрагимова// Материалы Второго Международного Российско–Узбекского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». – Нальчик: Изд. КБНЦ РАН. – 2012.– С.116–118.

10. Ибрагимова Н. А. Решение второй краевой задачи для B- полигармонического уравнения методом потенциалов/ Н. А. Ибрагимова// Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева «Обратные и некорректные задачи математической физики». – Новосибирск: Сибирское научное изд. – 2012.– С.372–373.

11. Ибрагимова Н. А. Краевые задачи для B-эллиптической системы уравнений с отрицательно определенной симметрической матрицей/ Н. А. Ибрагимова, Ф. Г. Мухлисов// Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского (материалы Международной научной конференции «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций — 2014», посвященной 80-летию В.И. Жегалова) – Казань: Изд. Казанского математического общества – 2014.– Т.49.– С.172–175.