На правах рукописи

Базайкин Ярослав Владимирович

НЕКОМПАКТНЫЕ РИМАНОВЫ И ЛОРЕНЦЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ ГРУППАМИ ГОЛОНОМИИ

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2009

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Научный консультант:

член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук, профессор
Тайманов Искандер Асанович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Берестовский Валерий Николаевич,

доктор физико-математических наук, профессор
Бураго Юрий Дмитриевич,

доктор физико-математических наук, профессор
Родионов Евгений Дмитриевич

Ведущая организация:

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Защита состоится 12 ноября 2009 г. в 15^{00} на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан 8 октября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гутман А. Е.

Общая характеристика работы

Цель работы. Диссертация посвящена исследованию геометрических и топологических свойств римановых и лоренцевых многообразий со специальными группами голономии.

Постановка задач и актуальность темы диссертации. Первое упоминание о *голономии* (а именно, использование термина «голономные» и «неголономные» связи в классической механике) датируется 1895 годом и принадлежит Герцу [27, 37]. В математических работах понятие голономии впервые возникло в 1923 году у Э. Картана [16, 17, 19] применительно к римановым многообразиям, и уже имело современный смысл. Кратко говоря, группа голономии $\mathrm{Hol}(M) \subset O(n)$ риманова многообразия M^n порождается операторами параллельных переносов относительно связности Леви — Чивита вдоль путей, начинающихся и заканчивающихся в фиксированной точке $p \in M$. Если рассмотреть только стягиваемые петли, то мы получим ограниченную группу голономии $\mathrm{Hol}^0(M)$, которая является связной компонентой единицы в группе $\mathrm{Hol}(M)$. Везде в диссертации многообразия предполагаются односвязными, и поэтому $\mathrm{Hol}(M) = \mathrm{Hol}^0(M)$. Интуитивно ясно, что если $\mathrm{Hol}(M)$ не будет совпадать с максимально возможной группой изометрий $SO(n)$ касательного пространства T_pM, то это должно свидетельствовать о наличии ограничений на геометрию риманова многообразия. И действительно, каждой специальной группе голономии отвечает та или иная специальная геометрия.

Глобальный характер группы голономии риманова многообразия подчеркивается теоремой де Рама о разложении. Очевидно, что если риманово многообразие M является прямым произведением римановых многообразий M_1 и M_2, то $\mathrm{Hol}(M) = \mathrm{Hol}(M_1) \times \mathrm{Hol}(M_2)$ (вместе с соответствующим разложением представления группы голономии). В случае, если риманово многообразие полно, то верно обратное:

Теорема [36]. *Пусть M — полное риманово многообразие, группа голономии G которого является произведением двух групп G_1 и G_2, а представление голономии группы G раскладывается в сумму представлений G_1 и G_2. Тогда M изометрично прямому произведению двух римановых пространств M_1 и M_2, где $Hol(M_1) = G_1$ и $Hol(M_2) = G_2$, а представления групп G_1 и G_2 совпадают с представлениями голономии M_1 и M_2.*

Естественным образом возникает задача классификации римановых групп голономии: *какие группы могут быть группами голономии риманова многообразия?*

При решении этой задачи можно сразу ограничиться полными неприводимыми римановыми многообразиями, т.е. такими, представление голономии которых не обладает инвариантными подпространствами в T_pM. В силу теоремы разложения де Рама такие многообразия не раскладываются в прямое произведение, и обратно, любое полное риманово многообразие раскладывается в произведение неприводимых.

Важный пример римановых многообразий со специальными группами голономии дают симметрические пространства:

Теорема [19]. *Пусть M^n — симметрическое пространство и G — группа Ли изометрий M, порожденная всеми отражениями, переворачивающими геодезические. Предположим, что $H \subset G$ — группа изотропии M, относительно выбранной точки. Тогда $M = G/H$, и группа голономии $Hol(M)$ совпадает с H, а представление голономии совпадает с представлением изотропии G/H.*

Картаном [18] задача описания односвязных римановых симметрических пространств была сведена к теории групп Ли, и им был получен список всех таких пространств. Следующее важное продвижение в задаче классификации было сделано Берже:

Теорема [7]. *Пусть M — односвязное неприводимое риманово многообразие размерности n, не являющееся локально симметрическим. Тогда имеет место один из следующих случаев.*

1) $Hol(M) = SO(n)$ — *общий случай,*
2) $n = 2m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = U(m) \subset SO(2m)$ — *кэлеровы многообразия,*
3) $n = 2m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = SU(m) \subset SO(2m)$ — *специальные кэлеровы многообразия,*
4) $n = 4m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = Sp(m) \subset SO(4m)$ — *гиперкэлеровы многообразия,*
5) $n = 4m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = Sp(m)Sp(1) \subset SO(4m)$ — *кватернионно-кэлеровы многообразия,*
6) $n = 7$ *и* $Hol(M) = G_2 \subset SO(7)$,
7) $n = 8$ *и* $Hol(M) = Spin(7) \subset SO(8)$.

В оригинальном списке Берже присутствовал также случай $n = 16$ и $\mathrm{Hol}(M) = Spin(9) \subset SO(16)$. Однако в [1, 11] было доказано что в этом случае M является симметрическим и (локально) изометрично проективной плоскости Кэли $\mathbb{C}aP^2$.

Таким образом, для решения задачи классификации нужно понять какие из групп списка Берже могут быть реализованы как группы голономии полных римановых многообразий. При этом возникают два аспекта задачи классификации: доказательство того, что группа Берже реализуется как группа голономии (неполной) локально определенной римановой метрики; нахождение полной римановой метрики с данной группой голономии. Вторая задача, особенно в случае построения римановой метрики на замкнутом многообразии является существенно более трудной. С другой стороны, построение полной метрики кажется разумным требованием, в силу глобального характера группы голономии (нельзя потенциально исключить случай, что петли, которые могут уходить «достаточно далеко» от фиксированной точки окажут решающее влияние на группу голономии). Далее мы пройдемся кратко по списку Берже и прокомментируем каждый случай.

Кэлеровы пространства хорошо изучены, и примеров кэлеровых пространств с группой голономии $U(m)$ можно приводить очень много [4, 5].

Римановы многообразия, группа голономии которых содержится в $SU(m)$ называются многообразиями Калаби — Яу (название связано с теоремой Калаби — Яу, цитированной ниже), или специальными кэлеровыми многообразиями. Можно показать, что специальные кэлеровы многообразия являются Риччи-плоскими [5, 2]. Уже из этого факта ясно, что построение таких многообразий является трудной задачей. Первый пример полной римановой метрики с группой $SU(m)$ был построен Калаби [15].

Существование специальных кэлеровых метрик на компактных многообразиях стало возможным показать после доказательства Яу гипотезы Калаби [39]: компактное кэлерово многообразие с нулевым первым классом Чженя допускает специальную кэлерову метрику, кэлерова форма которой когомологична исходной кэлеровой форме. Первым и наиболее известным примером такого многообразия является $K3$-поверхность, которую, пользуясь конструкцией Куммера можно представить следующим образом.

Рассмотрим инволюцию плоского тора T^4, возникающую из центральной симметрии евклидова пространства $\mathbb{R}^4$. После факторизации получаем орбифолд с 16 особыми точками, окрестности которых устроены как $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. Выполнив раздутие полученного орбифолда в окрестности каждой особой точки, мы получаем двумерное комплексное многообразие — $K3$-поверхность. Поскольку ее первый класс Чженя равен нулю, то на $K3$ по теореме Калаби — Яу существует специальная кэлерова метрика. Более того, пространство модулей таких метрик имеет размерность 58.

Геометрическое объяснение этой размерности, также как и «качественное» описание специальных кэлеровых метрик на $K3$ было дано Пэйджем [35]. Центральную роль в конструкции Пэйджа играет метрика Эгучи — Хансона [21]. Эта метрика является метрикой с группой голономии $SU(2)$ на T^*S^2 и асимптотически выглядит как плоская метрика на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. Топологически конструкция раздутия особой точки вида $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ в $T^4/\mathbb{Z}_2$ устроена так: надо выколоть особенность и отождествить ее окрестность с пространством шарового расслоения в T^*S^2 без нулевого слоя S^2. Пэйдж предложил рассмотреть на T^*S^2 метрику, гомотетичную метрике Эгучи — Хансона с достаточно малым коэффициентом гомотетии, так что на границе приклеиваемого шарового расслоения метрика становится сколь угодно близка к плоской. После этого надо слегка деформировать метрику на торе так, чтобы получить гладкую метрику на $K3$-поверхности с голономией $SU(2)$. Простой подсчет степеней свободы при выполнении этой операции показывает, что таким образом получается 58-мерное семейство метрик, что совпадает с известными результатами о размерности пространства модулей таких метрик [39].

Гиперкэлеровы многообразия также являются многообразиями Калаби — Яу, но их группа голономии меньше, чем $SU(2m)$ и совпадает с $Sp(m)$. Теорема Калаби — Яу также может быть использована для их построения, и более того, построение гиперкэлеровых многообразий оказалось более легким, чем специальных кэлеровых. Детали можно найти в [30]. Отметим, что первая полная риманова гиперкэлерова метрика была найдена Калаби [15].

Кватернионно-кэлеровы многообразия интересны тем, что являются эйнштейновыми (не являясь вообще говоря кэлеровыми). Классическим примером являются кватернионные проективные пространства $\mathbb{H}P^n$, являющиеся симметрическими. Есть гипотеза (до сих пор не доказанная), что этими пространствами исчерпываются компактные кватернионно-кэлеровы многообразия. В некомпактном случае, существует много однородных кватернионно-кэлеровых пространств, классифицированных в [1, 20].

Наконец, оставшиеся последними в списке Берже случаи $\mathrm{Hol} = G_2$ и $\mathrm{Hol} = Spin(7)$ представляют особый интерес с позиций диссертации.

Эти две группы голономии принято называть *исключительными* группами голономии. Довольно долго не было известно ни одной римановой метрики с исключительными группами голономии. Только в 1987 году примеры неполных (локально определенных) метрик с группами голономии $Spin(7)$ и G_2 были построены Брайантом в [12]. Затем в 1989 году Брайантом и Сэламоном [14] были построены первые примеры полных римановых метрик с исключительными голономиями на некомпактных пространствах. И лишь в 1996 году Джойс [28, 29] при помощи конструкции, восходящей к Пэйджу и довольно тонкого анализа смог доказать существование компактных примеров. Систематическое изложение результатов Джойса можно найти в [30]. Ковалёв построил новые примеры компактных многообразий с группой голономии G_2, отличные от примеров Джойса, при помощи конструкции связной суммы используя трехмерные поверхности Фано [33]. На данный момент вопрос о существовании римановых метрик с группами голономии $Spin(7)$ и G_2 на тех или иных многообразиях (компактных или некомпактных) остается до конца неясным.

Новый интерес к некомпактным примерам возник относительно недавно со стороны математической физики. Было предложено использование некомпактных метрик с группами голономии $Spin(7)$ в так называемой M-теории. В работах [23, 24, 25, 26, 31, 32] был построен ряд новых полных примеров, часть которых является не многообразиями, а орбифолдами. Все эти метрики автоматически являются Риччи-плоскими и асимптотически ведут себя либо как конусы, либо как произведения конусов на окружности. Все построенные примеры представляют собой метрики кооднородности один, т.е. расслаиваются на однородные семимерные слои.

Некомпактные римановы многообразия со специальными группами голономии (а именно этому случаю посвящена диссертация) занимают свое собственное положение в теории групп голономии римановых пространств, и важность их изучения мотивируется следующими причинами. Теорема Калаби — Яу хотя и дает исчерпывающий ответ на вопрос о существовании специальных кэлеровых метрик, но вопрос о строении таких метрик остается неясным. Нет речи о сколь-нибудь явном построении метрик Калаби — Яу на замкнутых многообразиях; однако и «качественное» строение таких метрик теорема Калаби — Яу не проясняет. Пожалуй единственный подход связан с описанным выше методом Пэйджа для построения метрик Калаби — Яу на $K3$-поверхности: действительно, в этом случае мы можем достаточно точно понять как устроена метрика с группой голономии $SU(2)$ (по крайней мере вблизи особой плоской метрики на $T^4/\mathbb{Z}_2$). При этом в методе Пэйджа принципиальное значение играет явный вид метрики Эгучи — Хансона на некомпактном многообразии T^*S^2. Этот пример является в определенном смысле модельным: Джойс, при построении своих метрик использовал именно эту идею. В цитированной выше работе Ковалёва также используется конструкция связной суммы двух некомпактных многообразий, имеющих специальные группы голономии.

Итак, резюмируя, мы можем сказать, что для качественного понимания метрик со специальными группами голономии, метрики на некомпактных многообразиях полезны, поскольку: во-первых, уравнения для них существенно проще и решаются либо явно, либо существует хорошее качественное описание решений; во-вторых, можно моделировать при помощи них метрики на компактных многообразиях (например в духе конструкции Пэйджа); в-третьих, с точки зрения математической физики представляют интерес именно метрики на некомпактных многообразиях (или орбифолдах).

Другая «логическая» часть диссертации посвящена группам голономии некомпактных лоренцевых многообразий. Отметим, что в этом случае рассмотрение компактных лоренцевых многообразий вообще вряд ли является осмысленным (по крайней мере с точки зрения физических приложений), поскольку можно доказать, что любое ориентированное во времени компактное лоренцево многообразие содержит замкнутую времениподобную кривую (образно говоря, «существует петля времени») [3].

Что касается групп голономии псевдоримановых многообразий, по отношению к классическому риманову случаю, то здесь ситуация осложняется наличием неразложимых групп голономии, не являющихся неприводимыми. Более подробно, пусть (N, g) — псевдориманово многообразие с группой голономии $G = \mathrm{Hol}_p(N)$, $p \in N$. Представление голономии называется *разложимым*, если существует G-инвариантное разложение

$$T_pN = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r,$$

такое что $r \geq 2$ и $W_i \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, r$. В противном случае представление называется *неразложимым*. Представление голономии называется *неприводимым*, если не существует нетривиального собственного G-инвариантного подпространства $W \subset T_pN$. Теорема де Рама обобщенная на псевдориманов случай утверждает следующее [36, 38]: псевдориманово многообразие с разложимым представлением голономии локально изометрично произведению $(\mathbb{R}^{k_1}, g_1) \times \ldots \times (\mathbb{R}^{k_r}, g_r)$, где $k_i = \dim W_i$ и $\mathrm{Hol}_p(N) = H_1 \times \ldots \times H_r$. Более того, если N односвязно и геодезически полно, то (N, g) изометрично $(N_1, g_1) \times \ldots \times (N_r, g_r)$, где H_i — группа голономии (N_i, g_i), $i = 1, \ldots, r$.

В работах [7, 13] был получен список кандидатов в неприводимые группы голономии псевдоримановых многообразий, и в [13] все эти группы были реализованы как группы голономии псевдоримановых пространств. При анализе списка из [7, 13] видно, что в лоренцевом случае не может быть неприводимых групп голономии, кроме $SO(n+1,1)$. Таким образом, задача классификации специальных групп голономии лоренцевых пространств сводится к исследованию неразложимых представлений голономии, не являющихся неприводимыми.

В [8] были изучены алгебры голономии неразложимых лоренцевых многообразий, не являющихся неприводимыми. С каждой такой алгеброй $\mathbf{g} \subset \mathbf{so}(n+1,1)$ была ассоциирована ее *ортогональная часть* $\mathbf{h} \subset \mathbf{so}(n)$, причем для данной ортогональной части существуют ровно четыре типа алгебры $\mathbf{g}$, которые потенциально могут быть алгебрами голономии лоренцева многообразия:

$$\mathbf{g}^{1,\mathbf{h}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & X & 0 \\ 0 & A & -X^T \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \Bigg| a \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbf{h} \subset \mathbf{so}(n) \right\};$$

$$\mathbf{g}^{2,\mathbf{h}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ 0 & A & -X^T \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigg| X \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbf{h} \subset \mathbf{so}(n) \right\};$$

$$\mathbf{g}^{3,\mathbf{h},\phi} = \left\{ \begin{pmatrix} \phi(A) & X & 0 \\ 0 & A & -X^T \\ 0 & 0 & -\phi(A) \end{pmatrix} \Bigg| X \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbf{h} \subset \mathbf{so}(n) \right\},$$

где центр $Z(\mathbf{h})$ алгебры $\mathbf{h}$ нетривиален и $\phi : \mathbf{h} \to \mathbb{R}$ — ненулевое линейное отображение, такое что $\phi|_{\mathbf{h}'} = 0$ (через $\mathbf{h}'$ мы обозначаем коммутант алгебры Ли $\mathbf{h}$);

$$\mathbf{g}^{4,\mathbf{h},m,\psi} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X & \psi(A) & 0 \\ 0 & A & 0 & -X^T \\ 0 & 0 & 0 & -\psi(A)^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigg| X \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbf{h} \subset \mathbf{so}(m) \right\},$$

где $0 < m < n$, $\dim Z(\mathbf{h}) \geq n-m$ и $\psi : \mathbf{h} \to \mathbb{R}^{n-m}$ — сюръективное линейное отображение, такое что $\psi|_{\mathbf{h}'} = 0$. Этим алгебрам отвечают четыре группы Ли $G^{1,H}$, $G^{2,H}$, $G^{3,H,\phi}$ и $G^{4,H,m,\psi}$, зависящие от ортогональной части H — группы Ли, отвечающей алгебре Ли $\mathbf{h}$.

В [34] было доказано, что если $\mathbf{g} \subset \mathbf{so}(n+1,1)$ является алгеброй голономии неразложимого лоренцева многообразия, не являющегося неприводимым, то ее ортогональная часть $\mathbf{h}$ является алгеброй голономии риманова многообразия. В работе [8] часть этих типов алгебр были, также локально, реализованы как алгебры голономии локально определенных лоренцевых метрик, в работе [22] были реализованы (локально) алгебры всех четырех типов.

Однако вопрос о глобальном строении лоренцевых метрик со специальными голономиями до сих пор до конца не ясен. Более того, даже постановка задачи осложнена неоднозначностью понимания «полноты» в лоренцевой геометрии. В работе [6] была предложена задача построения глобально гиперболических лоренцевых многообразий для каждого специального типа группы голономии. Кратко говоря, глобально гиперболическое лоренцево пространство — это пространство обладающее пространственноподобной гиперповерхностью, с которой любая непродолжаемая непространственноподобная кривая пересекается ровно в одной точке [3]. Это одно из самых сильных условий причинности, наиболее полезное для математической физики. В [6] часть специальных групп голономии (а именно тип 2) был реализован глобально гиперболическими лоренцевыми многообразиями.

Основные результаты диссертации.

1. Предложен метод, позволяющий строить метрики с группами голономии $Spin(7)$ и G_2 по произвольному семимерному 3-сасакиеву многообразию. При помощи данного метода построены новые полные римановы метрики с группой голономии $Spin(7)$ на некоторых некомпактных гладких многообразиях (в том числе однопараметрические семейства таких метрик), и с группами голономии $Spin(7)$ и G_2 на некомпактных орбифолдах.

2. В явном виде найдены Риччи-плоские римановы метрики с группой голономии $SU(2)$ на кокасательных расслоениях к взвешенным комплексным проективным прямым, обобщающие метрику Эгучи — Хансона. При помощи построенных метрик получено описание пространства модулей метрик с группой голономии $SU(2)$ на $K3$-поверхности в окрестности предельной плоской метрики на $T^4/\mathbb{Z}_3$.

3. Доказано, что на каждом односвязном компактном четырехмерном T^2-многообразии существует риманова метрика положительной кривизны Риччи, инвариантная относительно данного действия T^2.

4. Для каждой группы голономии лоренцева пространства (за исключением тех, ортогональная часть которых содержит в качестве прямого слагаемого группу изотропии кэлерова симметрического пространства ранга большего один) доказано существование глобально гиперболического лоренцева многообразия с данной группой голономии.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность. Все основные результаты диссертации являются новыми, снабжены доказательствами и своевременно опубликованы.

Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в Институте математики СО РАН, Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Петербургском отделении Математического института РАН, Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Санкт-Петербургском, Новосибирском, Омском, Алтайском и других государственных университетах.

Методы исследования. В диссертации используются методы теории групп голономии (псевдо)римановых пространств. Задача построения метрик с группой голономии $Spin(7)$ и G_2 сводится к исследованию некорректно определенной краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений на функции, определяющие метрику. При исследовании пространства модулей метрик с группой голономии $SU(2)$ на $K3$-поверхности использованы методы, развитые Джойсом для построения римановых метрик с исключительными группами голономии. Теория четырехмерных T^2-многообразий использовалась для исследования метрик голономии $SU(2)$ на взвешенных проективных комплексных прямых и для построения метрик с положительной кривизной Риччи. Для построения глобально гиперболических лоренцевых многообразий используется методы теории причинности в лоренцевой геометрии.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на различных международных и всероссийских конференциях: на международной конференции «Нелинейные методы в топологических задачах», проходившей в Бедлево в 2006, на Международном математическом конгрессе, проходившем в Мадриде в 2006, на международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения А. Д. Александрова, проходившей в С.-Петербурге в 2007, на Всероссийской конференции, проходившей в Челябинске в 2006 и других; на семинарах «Геометрия, топология и их приложения» (рук. И. А. Тайманов) Института математики СО РАН и «Алгебраическая топология и ее приложения» (рук. В. М. Бухштабер и Т. Е. Панов) Механико-математического факультета МГУ и др.

Публикации. Все результаты диссертации опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК [40, 41, 42, 43, 44, 45, 46]. Две работы являются совместными: статья [43] выполнена совместно с Е. Г. Мальковичем и статья [46] — совместно с И. В. Матвиенко. Эти работы получены в процессе неразделимой творческой деятельности авторов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Она изложена на 165 страницах текста, библиография содержит 91 наименование.

Автор выражает признательность научному консультанту И. А. Тайманову за многочисленные полезные обсуждения на всем протяжении работы над темой диссертации.

Содержание диссертации.

Введение. Во введении дается обзор современного состояния теории групп голономии римановых и лоренцевых пространств, а также описываются результаты, составляющие основное содержание диссертации.

Глава 1. Данная глава посвящена изложению используемых в диссертации сведений о группах голономии и связанных вопросов, и состоит из трех параграфов.

В параграфе 1.1 приводятся основные результаты о группах голономии римановых пространств, подробно описываются геометрии из списка Берже.

Параграф 1.2 посвящен изложению теории 3-сасакиевых многообразий, необходимых для конструкции метрик с исключительными группами голономии.

В параграфе 1.3 приведены сведения о специальных группах голономии лоренцевых пространств, указаны алгебры и группы из списка Бержери — Икемахена, являющегося аналогом списка Берже для лоренцевой геометрии.

Глава 2. В этой главе, состоящей из шести параграфов, описана конструкция, позволяющая строить метрики с группами голономии $Spin(7)$

и G_2 по произвольному семимерному 3-сасакиеву многообразию M.

Параграф 2.1 начинается с обсуждения двух возможностей гладкого разрешения конусной особенности пространства $\bar{M} = (0, \infty) \times M$ с метрикой $dt^2 + t^2 g$, где g — 3-сасакиева метрика на M. Пространство $\mathcal{M}_1$ получается при затягивании на «уровне» $t = 0$ каждого трехмерного слоя 3-сасакиева слоения M в точку, при этом сечение $\{t\} \times M$ коллапсирует при $t = 0$ в кватернионно-кэлерово пространство $\mathcal{O} = M/S^3$. Показывается, что $\mathcal{M}_1$ является пространством расслоения над $\mathcal{O}$ с общим слоем $\mathbb{R}^4$ либо $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$ (в зависимости от M), ассоциированным с главным расслоением $M \to \mathcal{O}$.

Аналогично, если при $t = 0$ затянуть в точку каждую окружность, соответствующую одному характеристическому полю M, скажем ξ_1, то получается пространство $\mathcal{M}_2$. При этом каждое сечение $\{t\} \times M$ коллапсирует при $t = 0$ в твисторное пространство $\mathcal{Z} = M/S^1$, где действие S^1 порождается киллинговым полем ξ_1. Показывается, что $\mathcal{M}_2$ является пространством векторного расслоения над $\mathcal{Z}$ со слоем $\mathbb{R}^2$, ассоциированным с главным расслоением $M \to \mathcal{Z}$. Получающиеся таким образом пространства $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ в общем случае являются орбифолдами, однако при $M = \mathbb{R}P^7, S^7, SU(3)/U(1)_{1,1}$ гладким восьмимерным многообразием является пространство $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_r$ (при любом r), а при $M = S^7$ — пространство $\mathcal{M}_1$.

Далее рассматривается риманова метрика

$$\bar{g} = dt^2 + \sum_{i=1}^{3} A_i(t)^2 \eta_i^2 + B(t)^2 g|_{\mathcal{H}}, \tag{2.1}$$

на $\bar{M} = (0, \infty) \times M$, зависящая от функций $A_1(t), A_2(t), A_3(t), B(t)$, определяющих «размеры» M в зависимости от переменной t (здесь формы η_i двойственны к характеристическим сасакиевым полям ξ^i, а $\mathcal{H}$ — касательное распределение, ортогональное этим полям). Задается $Spin(7)$-структура на $\bar{M}$, согласованная с метрикой (2.1) при помощи структурной 4-формы Φ. Метрика (2.1) является деформацией стандартной конусной метрики на $\bar{M}$, получающейся при $A_i = B = t$, $i = 1, 2, 3$ и имеющей группу голономии $Sp(2) \subset Spin(7) \subset SO(8)$. После деформации группа голономии вообще говоря увеличивается, и ставится задача найти условия, при которых группа голономии метрики (2.1) останется в $Spin(7)$. Доказывается, что эти условия равносильны следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений на функции A_i, B

(лемма 2.1):

$$\begin{aligned}
A_1' &= \frac{2A_1^2}{B^2} + \frac{(A_2-A_3)^2-A_1^2}{A_2A_3}, \\
A_2' &= \frac{2A_2^2}{B^2} + \frac{(A_3-A_1)^2-A_2^2}{A_1A_3}, \\
A_3' &= \frac{2A_3^2}{B^2} + \frac{(A_1-A_2)^2-A_3^2}{A_1A_2}, \\
B' &= -\frac{A_1+A_2+A_3}{B}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Далее формулируются краевые условия для системы (2.3), при выполнении которых метрика (2.1) является гладкой либо на пространстве $\mathcal{M}_1$, либо на пространстве $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_r$ (леммы 2.2 и 2.3):

- гладкость на пространстве $\mathcal{M}_1$ равносильна условиям $A_1(0) = A_2(0) = A_3(0) = 0, |A_1'(0)| = |A_2'(0)| = |A_3'(0)| = 1, B(0) \neq 0, B'(0) = 0$ и функции $A_1(t), A_2(t), A_3(t), B(t)$ знакоопределены на промежутке $(0,\infty)$;

- гладкость на пространстве $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_r$ равносильна условиям $A_1(0) = 0, |A_1'(0)| = 4, A_2(0) = -A_3(0) \neq 0, A_2'(0) = A_3'(0), B(0) \neq 0, B'(0) = 0$ и функции $A_1(t), A_2(t), A_3(t), B(t)$ знакоопределены на промежутке $(0,\infty)$, причем $r = 2$ или $r = 4$ в зависимости от того, равен общий слой 3-сасакиева слоения либо $\mathbb{R}P^3$, либо S^3.

В заключение параграфа приводятся известные ранее частные решения системы (2.3).

В параграфе 2.2 формулируется и доказывается один из основных результатов Главы 2 — Теорема 2.1, описывающая все решения системы уравнений (2.3) с краевыми условиями, определяющими метрику на пространстве $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_r$:

Теорема 2.1 [42]. *Пусть M — 7-мерное компактное 3-сасакиево многообразие, и положим $p = 2$ или $p = 4$ в зависимости от того, равен общий слой 3-сасакиева слоения M либо $SO(3)$, либо $Sp(1)$. Тогда на орбифолде $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ существуют следующие полные регулярные римановы метрики $\bar{g}$ вида (2.1) с группой голономии $H \subset Spin(7)$:*

1) если $A_1(0) = 0$, $-A_2(0) = A_3(0) = B(0) > 0$, то метрика $\bar{g}$ имеет группу голономии $SU(4) \subset Spin(7)$ и совпадает с AK-метрикой (2.7);

2) для каждого набора начальных значений $A_1(0) = 0$, $0 < -A_2(0) = A_3(0) < B(0)$ существует регулярная АЛК-метрика $\bar{g}$ с группой голономии $Spin(7)$. На бесконечности эти метрики стремятся к произведению конуса над твисторным пространством $\mathcal{Z}$ и окружности S^1.

Более того, любая полная регулярная метрика на пространстве $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_{(}$ вида (2.1) с параллельной $Spin(7)$-структурой, задаваемой формой Φ изометрична одной из указанных выше.

Чтобы исключить гомотетичные метрики можно ввести параметр $\mu = A_3(0)/B(0), 0 < \mu \leq 1$. Таким образом, теорема 2.1 доказывает существование однопараметрического семейства ($0 < \mu < 1$) попарно негомотетичных полных римановых метрик с группой голономии $Spin(7)$. Упоминаемая в теореме метрика (2.7) с группой голономии $SU(4)$, получающаяся при $\mu = 1$, изометрична метрике Калаби [15].

Для доказательства теоремы 2.1 производится редукция системы (2.3) к автономной системе дифференциальных уравнений на трехмерной сфере, находятся все стационарные (лемма 2.6) и условно стационарные (лемма 2.7) точки редуцированной системы. Доказывается, что стационарные и условно стационарные точки редуцированной системы отвечают асимптотически (локально)-коническим метрикам на $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ (лемма 2.8). Доказывается, что для каждой начальной точки, отвечающей краевым условиям леммы 2.3 редуцированной системы существует единственная траектория, выходящая из этой точки (лемма 2.9). В лемме 2.11 выясняется, как асимптотически ведут себя траектории редуцированной системы, и в лемме 2.12 завершается доказательство теоремы 2.1 доказательством того, что полученные полные метрики имеют группу голономии $Spin(7)$.

В параграфе 2.3 формулируется и доказывается теорема 2.2, описывающая все решения системы уравнений (2.3) с краевыми условиями, определяющими метрику на пространстве $\mathcal{M}_1$. Теорема 2.2 дополняет теорему 2.1 и вместе с ней полностью завершает исследование решений системы (2.3), удовлетворяющих условиям регулярности.

Теорема 2.2 [44]. *Пусть M — 7-мерное компактное 3-сасакиево многообразие. Тогда существует двупараметрическое семейство попарно негомотетичных римановых метрик на $\mathcal{M}_1$ вида (2.1) с группой голономии, содержащейся в $Spin(7)$, удовлетворяющих начальным условиям:*

$$\begin{aligned} &A_1(0) = A_2(0) = A_3(0) = 0, \\ &\dot{A}_1(0) = \dot{A}_2(0) = \dot{A}_3(0) = -1, \\ &B(0) > 0, B'(0) = 0. \end{aligned}$$

Семейство метрик параметризуется тройкой чисел $\lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 < 0$, таких что $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \varepsilon^2$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$: для каждой такой тройки существует значение переменной $t = t_0$, при котором траектория (A_1, A_2, A_3) проходит через эту тройку, т.е.

$$A_1(t_0) = \lambda_1, A_2(t_0) = \lambda_2, A_3(t_0) = \lambda_3.$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ метрика (2.1) является полной римановой метрикой с группой голономии $Spin(7)$ и асимптотически ведет себя как конус над M; при $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ мы также получаем семейство полных метрик с группой голономии $Spin(7)$, асимптотически ведущих себя как произведения конуса над твисторным пространством M и окружности постоянного радиуса. Наконец, в остальных случаях метрики полными не являются.

Любая другая полная регулярная метрика вида (2.1) с параллельной $Spin(7)$-структурой, заданной формой Φ на $\mathcal{M}_1$ совпадает с одной из метрик описанного семейства, с точностью до перестановок индексов переменных.

Отметим, что полные метрики, описанные в этой теореме были найдены в [23] для случая $M = S^7$.

Для доказательства теоремы 2.2 осуществляется раздутие трехмерной сферы в точке, отвечающей начальному краевому значению в лемме 2.3. Редуцированная автономная система поднимается на раздутую сферу и доказывается. что существует двупараметрическое семейство ее решений (лемма 2.14). В лемме 2.16 выясняется, как асимптотически ведут себя траектории редуцированной системы, что завершает доказательство теоремы 2.2.

В параграфе 2.4 приводятся строгие доказательства лемм 2.2 и 2.3, формулирующих условия регулярности построенных метрик на пространствах $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_r$.

В параграфе 2.5 описанная выше конструкция используется для построения метрик с группой голономии G_2 на семимерных пространствах $\mathcal{N}$, связанных с M. Рассматривается гладкое разрешение $\mathcal{N}$ стандартного конуса $(0,\infty) \times \mathcal{Z}$ над твисторным пространством $\mathcal{Z} = M/S^1$. При этом $\mathcal{Z}$ расслаивается над $\mathcal{O}$ со слоем $S^3/S^1 = S^2$, поэтому каждый слой S^2 коллапсирует в точку, а сечение $\{t\} \times \mathcal{Z}$ коллапсирует при $t = 0$ в $\mathcal{O}$. Получающиеся пространство $\mathcal{N}$ является векторным расслоением над $\mathcal{O}$ со слоем $\mathbb{R}^2$.

На $(0,\infty) \times \mathcal{Z}$ рассматривается риманова метрика

$$\bar{g} = dt^2 + A(t)^2(\eta_2^2 + \eta_3^2) + B(t)^2(\eta_4^2 + \eta_5^2) + C(t)^2(\eta_6^2 + \eta_7^2), \qquad (2.19)$$

зависящая от трех функций A, B, C, задающих деформацию конусной метрики. При помощи структурной 3-формы Ψ_1 задается G_2-структура, согласованная с метрикой (2.19) (формы η_4, η_5, η_6, η_7 порождают горизонтальное распределение $\mathcal{H}$). При этом G_2-структура для общего M

определена только при $B = C$, а при $B \neq C$ нужно потребовать дополнительно, чтобы $\mathcal{O}$ было кэлеровым.

Далее формулируется и доказывается основная теорема параграфа и оставшейся части главы:

Теорема 2.3 [43]. *Если $\mathcal{O}$ обладает кэлеровой структурой, то метрика (2.19) на $\mathcal{N}$ является гладкой метрикой с группой голономии G_2, заданной формой Ψ_1 тогда, и только тогда, когда функции A, B, C, определенные на промежутке $[t_0, \infty)$ удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$\begin{aligned} A' &= \frac{2A^2 - B^2 - C^2}{BC}, \\ B' &= \frac{B^2 - C^2 - 2A^2}{CA}, \\ C' &= \frac{C^2 - 2A^2 - B^2}{AB} \end{aligned} \qquad (2.20)$$

с начальными условиями

(1) $A(t_0) = 0, |A_1'(t_0)| = 2;$

(2) $B(t_0), C(t_0) \neq 0, B'(t_0) = C'(t_0) = 0;$

(3) функции A, B, C знакоопределены на промежутке (t_0, ∞).

Система (2.20) имеет единственное решение, удовлетворяющее вышеприведенным условиям регулярности, и это решение отвечает следующей метрике с группой голономии G_2:

$$\bar{g} = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0^4}{r^4}} + r^2 \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right) \left(\eta_2^2 + \eta_3^2\right) + 2r^2 \left(\eta_4^2 + \eta_5^2 + \eta_6^2 + \eta_7^2\right). \qquad (2.21)$$

Метрика, описанная в теореме 2.3 была впервые найдена в [14] при $M = S^7, SU(3)/U(1)_{1,1}$. Чтобы подробнее исследовать новые примеры, в параграфе 2.6 в качестве 3-сасакиева многообразия M берется пространство Эшенбурга, получающееся как фактор-пространство $SU(3)$ по следующему действию S^1:

$$z \in S^1 : A \mapsto \mathrm{diag}\,(z^{p_1}, z^{p_2}, z^{p_3}) \cdot A \cdot \mathrm{diag}\,(1, 1, z^{-p_1-p_2-p_3}).$$

Тогда на орбифолде $\mathcal{N}$, отвечающем пространству Эшенбурга, по теореме 2.3 существует метрика с группой голономии G_2, и в конце параграфа 2.6 выясняется топологическое строение этого орбифолда:

Следствие. *Орбифолд $\mathcal{N}$ диффеоморфен самосопряженной части внешней степени $\Lambda_+^2 \eta$ двумерного комплексного расслоения η над $\mathbb{C}P^2(q_1, q_2, q_3)$ стабильно эквивалентного $\xi^{q_1} \oplus \xi^{q_2} \oplus \xi^{q_3}$.*

Здесь ξ — универсальное комплексное линейное расслоение над взвешенной комплексной проективной плоскостью $\mathbb{C}P(q_1, q_2, q_3) = \mathcal{O}$ (где $q_i = (p_{i+1} + p_{i+2})/2$, если все p_i нечетны, и $q_i = (p_{i+1} + p_{i+2})$ в противном случае).

Примеров семимерных 3-сасакиевых многообразий, определяющих описанные в главе 2 конструкции существует много [9, 10]. Таким способом можно получить много различных орбифолдов, однако многообразия могут получаться (как уже отмечалось выше) только при $M = S^7, \mathbb{R}P^7, SU(3)/U(1)_{1,1}$. Отметим также, что в рассмотренной конструкции многообразие M может не быть однородным, в общем случае коодноролность M равна четырем.

Глава 3. Данная глава, состоящая из четырех параграфов, посвящена специальным кэлеровым метрикам на пространствах линейных комплексных расслоений и их приложению к исследованию геометрии $K3$-поверхности.

В параграфе 3.1 описывается класс римановых метрик вида

$$ds^2 = f(d\rho^2 + d\theta^2) + g_{ij}dx^i dx^j, \tag{3.3}$$

где f, g_{ij} зависят от только от ρ, θ, а переменные x^1, x^2 определены на двумерном прямоугольном торе T^2. Таким образом, метрика (3.3) инвариантна относительно действия тора T^2. Далее, вычисляется тензор кривизны Риччи метрики (3.3). Находится явное решение уравнения Эйнштейна $R_{ij} = 0$ искомого вида:

$$\begin{gathered} ds^2 = (\operatorname{ch}\rho - a\cos\theta)\left(d\rho^2 + d\theta^2\right) + \\ \tfrac{\operatorname{sh}^2\rho}{\operatorname{ch}\rho - a\cos\theta}\left(d\psi + \cos\theta d\phi\right)^2 + \tfrac{\sin^2\theta}{\operatorname{ch}\rho - a\cos\theta}\left(a d\psi + \operatorname{ch}\rho d\phi\right)^2 \end{gathered} \tag{3.6}$$

Метрика (3.6) зависит от вещественного параметра a, причем при $a = 0$ метрика (3.6) изометрична метрике Эгучи — Хансона. Далее, для пары взаимно-простых целых чисел k, l описывается некомпактное пространство $M_{k,l}$, являющееся конусом естественной проекции линзового пространства $L(-1, k+l)$ на сферу $S^2(k,l) = L(-1, k+l)/S^1$ (являющуюся двумерным орбифолдом с двумя особыми точками вида $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_k$ и $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_l$). Основным результатом параграфа является следующая теорема:

Теорема 3.1 [40]. *i) Метрика (3.6) является гладкой полной римановой метрикой нулевой кривизны Риччи коодноролности два на $M_a = M_{k,l}$ при $-1 < a = \frac{p}{q} < 1$, $a \neq 0$ где p, q — пара взаимно простых целых* *чисел, $q > 0$ и*

$$\begin{cases} k = q - p,\ l = q + p, & \text{если } q \pm p \text{ нечетно,} \\ k = \frac{q-p}{2},\ l = \frac{q+p}{2}, & \text{если } q \pm p \text{ четно.} \end{cases}$$

ii) При $a = 0$ метрика (3.6) является полной римановой метрикой нулевой кривизны Риччи коодноpодности один на $M_{1,1}$ и совпадает с метрикой Эгучи — Хансона.

В параграфе 3.2 доказывается, что определенное выше пространство $M_{k,l}$ можно отождествить с кокасательным расслоением $T^*\mathbb{C}P^1(k,l)$ к взвешенной комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1(k,l)$. Устанавливается следующее свойство метрики (3.6).

Теорема 3.2 [41]. *Пространство $M_{k,l} = T^*S^2(k,l)$ с метрикой (3.6) является специальным кэлеровым орбифолдом.*

Таким образом, $T^*\mathbb{C}P^1(k,l)$ с метрикой (3.6) имеет группу голономии $SU(2)$, и в параграфе 3.3 изучаются приложения построенной метрики к исследованию пространства модулей $\mathcal{S}$ римановых метрик с группой голономии $SU(2)$ на $K3$-поверхности. Описываются конструкции Куммера и Пэйджа, доказывается, что из всех групп $\mathbb{Z}_p$ с простым p, только $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_3$ могут действовать изометриями на T^4 с изолированными неподвижными точками, окрестности которых моделируются орбифолдами $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$.

Далее описывается конструкция, аналогичная конструкции Пэйджа. Рассматривается пространство $\mathcal{S}_3$ плоских метрик с группой голономии $SU(2)$ на орбифолде $X = T^4/\mathbb{Z}_3$. Окрестность каждой из девяти особых точек вида $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_3$ плоского орбифолда X заменяется на экземпляр $M_{1,2}$ с метрикой (3.6), умноженной на достаточно малую константу. После этого возникают девять особых точек типа $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, окрестность каждой из которой также разрешается при помощи $M_{1,1}$ с метрикой (3.6). В итоге мы получаем гладкое многообразие X' с некоторой гладкой метрикой $d\tilde{s}^2$. Вся конструкция зависит от трех малых констант $\delta, t, u \to 0$, задающих размер окрестностей особых точек, масштабную константу метрики (3.6) при приклейке $M_{1,2}$ и масштабную константу метрики (3.6) при последующей приклейке $M_{1,1}$. Далее формулируется один из основных результатов главы.

Теорема 3.3 [41]. *Поверхность X' является $K3$-поверхностью, и, следовательно, $\mathcal{S}_3$ является предельным для $\mathcal{S}$. Достаточно малая окрестность $\mathcal{S}_3$ в $\mathcal{S}$ состоит из 58-мерного семейства метрик, получающих-*

ся малой деформацией семейства метрик $d\tilde{s}^2$, построенных описанным выше способом при $\delta, t, u \to 0$.

Теорема 3.3 доказывается в параграфе 3.4. При этом используется конструкция мульти-инстантонов, связанная с метрикой (3.6) и доказательство проводится схожим с [30] образом.

Глава 4. В данной главе, состоящей из двух параграфов, методы исследования кривизны Риччи четырехмерных многообразий, развитые в предыдущей главе применены для построения T^2-инвариантных римановых метрик положительной кривизны Риччи на односвязных T^2-многообразиях.

В параграфе 4.1 приводится конструкция универсального T^m-многообразия N_m размерности $m+2$. Для каждого односвязного четырехмерного T^2-многообразия M (у которого многогранник M/T^2 имеет m сторон) существует тор $T^{m-2} \subset T^m$ такой, что N_m/T^{m-2} эквивариантно гомеоморфен T^2-многообразию M. Эта конструкция используется в параграфе 4.2 для построения метрики на M: сначала строится метрика

$$ds^2 = ds_0^2 + \sum_{i=1}^{m} f_i^2 d\phi_i^2$$

на N_m с подходяще выбранными функциями f_i (здесь ds_0^2 некоторая метрика на M/T^2, а ϕ_i — координаты на торе T^m). Эта метрика опускается на M/T^2 при помощи римановой субмерсии $N_m \to M$ и исследуется ее тензор Риччи. Основным результатом главы является следующая теорема, доказываемая в параграфе 4.2:

Теорема 4.1 [46]. *На каждом односвязном четырехмерном T^2-многообразии существует риманова метрика положительной кривизны Риччи, относительно которой T^2 действует изометриями.*

Глава 5. Глава 5, состоящая из трех параграфов, посвящена доказательству существования глобально гиперболических лоренцевых многообразий со специальными группами голономии.

В параграфе 5.1 рассматривается класс лоренцевых метрик на многообразии $M \times \mathbb{R}^2$ следующего вида

$$\tilde{g} = 2d\eta(d\xi + \varepsilon f d\eta + 2\varepsilon A) + g, \qquad (5.1)$$

где (M, g) — риманово многообразие размерности n, ξ, η — координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$, f — функция на N, A — 1-форма на M, $\varepsilon > 0$

— вещественный параметр. Основным результатом параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 5.1 [45]. *Пусть H — группа голономии риманова пространства, представление голономии которой не содержи в качестве прямого множителя группу изотропии кэлерова симметрического пространства ранга большего один. Тогда существует лоренцево многообразие с метрикой вида (5.1), группа голономии которого совпадает с любой из групп $G^{1,H}$, $G^{2,H}$, $G^{3,H,\phi}$ и $G^{4,H,m,\psi}$.*

В параграфе 5.2 приводятся необходимые для дальнейшего сведения по теории причинности лоренцевых многообразий. В параграфе 5.3 формулируется и доказывается следующая теорема, вместе с теоремой 5.1 составляющая основной результат главы.

Теорема 5.9 [45]. *Лоренцевы многообразия с группами голономии $G^{1,H}$, $G^{2,H}$, $G^{3,H,\phi}$ и $G^{4,H,m,\psi}$ построенные в теореме 5.1 являются глобально гиперболическими при подходящем выборе f, A и ε.*

Литература

[1] Алексеевский Д. В. Римановы многообразия с необычными группами голономии // Функциональный анализ и его приложения. 1968. Т. 2, № 2. С. 1–10.

[2] Бессе А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.

[3] Бим Дж., Эрлих П. Глобальная лоренцева геометрия. М.: Мир, 1985.

[4] Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982. Т. 1,2.

[5] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 1,2.

[6] Baum H., Muller O. Codazzi Spinors and Globally hyperbolic Lorentzian manifolds with special holonomy I // Preprint ESI 1757, 2005.

[7] Berger M. Sur les groupes d'holonomie des variétés à connexion affine et des varièt̀es Riemanniennes // Bull. Soc. Math. France. 1955. V. 83. P. 279–330.

[8] Berard-Bergery L., Ikemakhen A. On the holonomy of Lorentzian manifolds // In: Differential Geometry: Geometry in Mathematical Physics and Related Topics., Proc. Sympos. Pure Math. 1993. V. 54. P. 27–40.

[9] Boyer C., Galicki K. 3-Sasakian manifolds // Surveys in differential geometry: essays on Einstein manifolds, Surv. Differ. Geom., VI, Int. Press, Boston, MA. 1999. P. 123–184.

[10] Boyer C. P., Galicki K., Mann B. M. The geometry and topology of 3-Sasakian manifolds // J. Reine angrew. Math. 1994. V. 455. P. 183–220.

[11] Brown R., Gray A. Riemannian manifolds with holonomy group $Spin(9)$ // In: S. Kobayashi et al., editors, Differential Geometry (in honour of Kentaro Yano), Kinokuniya, Tokiyo, 1972. P. 41–59.

[12] Bryant R. Metrics with exceptional holonomy // Ann. of Math. (2). 1987. V. 126, N 3. P. 525–576.

[13] Bryant R. Classical, exceptional and exotic holonomies: a status report // Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle en l'Honneur de Marcel Berger . Collection SMF Séminaires and congrès 1 (Soc. math. de France), 1996, P. 3–166.

[14] Bryant R. L., Salamon S. L. On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy // Duke Math. J. 1989. V. 58, N 3. P. 829–850.

[15] Calabi E. Metriques kahleriennes et fibres holomorphes // Ann. Ecol. Norm. Sup. 1979. V. 12. P. 269–294.

[16] Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. I & II // Ann. Sci. Ecol. Norm. Sup. 1923. V. 40. P. 325–412 et 1924. V. 41. P. 1–25 ou Oeuvres complètes, tome III, P. 659–746 et P. 799–824.

[17] Cartan E. La géométrie des espaces de Riemann // Mémorial des Sciences Mathématiques. Paris: Gauthier-Villars, 1925. V. 5.

[18] Cartan E. Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann // Bull. Soc. Math. France. 1926. V. 54. P. 214–264, 1927. V. 55. P. 114–134 ou Oeuvres complètes, tome I, V. 2. P. 587–659.

[19] Cartan E. Les groupes d'holonomie des espaces généralisés // Acta Math. 1926. V. 48. P. 1–42 ou Oeuvres complètes. Tome III. V. 2. P. 997–1038.

[20] Cortés V. Alekseevskian spaces // Diff. Geom. Appl. 1996. V. 6. P. 129–168.

[21] Eguchi T., Hanson A. J. Asymptotically flat self-dual solutions to euclidean gravity // Physics Letters B. 1978. V. 74, N 4. P. 49–251.

[22] Galaev A. Metrics that realize all types of Lorentzian holonomy algebras // arXiv:mathDG/0502575, 2005.

[23] Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N. New Complete Non-compact $Spin(7)$ Manifolds // Nucl. Phys. B. 2002. V. 620, N 1–2. P. 29–54.

[24] Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N. New Cohomogeneity One Metrics With $Spin(7)$ Holonomy // J. Geom. Phys. 2004. V. 49, N 3–4. P. 350–365.

[25] Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N. Cohomogeneity One Manifolds of $Spin(7)$ and $G(2)$ Holonomy // Phys. Rev. D. 2002. V. 65, N 10. 29 p.

[26] Gukov S., Sparks J. M-Theory on $Spin(7)$ Manifolds // Nucl. Phys. B. 2002. V. 625, N 1–2. P. 3–69.

[27] Hertz H. Die Prinzipien der Mechanik, in neuen Zusammenhängen dargestellt. 1895. — Русский перевод: Герц Г. Р. Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд. АН СССР, 1959.

[28] Joyce D. D. Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G_2. I and II // J. Differentional Geometry. 1996. V. 43, N 2. P. 291–328. P. 329-375.

[29] Joyce D. D. Compact 8-manifolds with holonomy $Spin(7)$ // Inv. Math. 1996. V. 123. P. 507–552.

[30] Joyce D. Compact manifolds with special holonomy. Oxford Science Publications, 2000.

[31] Kanno H., Yasui Y. On $Spin(7)$ holonomy metric based on $SU(3)/U(1)$ // J. Geom. Phys. 2002. V. 43, N 4. P. 293–309.

[32] Kanno H., Yasui Y. On $Spin(7)$ holonomy metric based on $SU(3)/U(1)$: II // J. Geom. Phys. 2002. V. 43, N 4. P. 310–326.

[33] Kovalev A. Twisted connected sums and special Riemannian holonomy // J. Reine Angew. Math. 2003. V. 565. P. 125–160.

[34] Leistner T. On the classification of Lorentzian holonomy groups // Jour. Diff. Geom. (to appear).

[35] Page D. N. A physical picture of the $K3$ gravitational instanton // Physics Letters B. 1978. V. 80, N 1–2. P. 55–57.

[36] de Rham G. Sur la reductibilité d'un espace de Riemann // Comm. Math. Helv. 1952. V. 26. P. 328–344.

[37] Schwachhöfer L. J. Holonomy. Review, 2008.

[38] Wu H. On the de Rham decomposition theorem // Illinois. J. Math. 1964. V. 8. P. 291–311.

[39] Yau S.-T. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equations // I. Communications on pure and applied mathematics. 1978. V. 31. P. 339–411.

Работы автора по теме диссертации.

[40] Базайкин Я. В. О некоторых метриках нулевой кривизны Риччи кооднородности два на комплексных линейных расслоениях // Сибирский математический журнал. 2004. Т. 45, № 3. С. 497–504.

[41] Базайкин Я. В. Специальные кэлеровы метрики на линейных комплексных расслоениях и геометрия $K3$-поверхностей // Сибирский математический журнал. 2005. Т. 46, № 6. С. 1235–1247.

[42] Базайкин Я. В. О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии $Spin(7)$ // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, № 1. С. 11–32.

[43] Базайкин Я. В., Малькович Е. Г. Метрики с группой голономии G_2, связанные с 3-сасакиевым многообразием // Сибирский математический журнал. 2008. Т. 49, № 1. С. 3–7.

[44] Базайкин Я. В. Некомпактные римановы пространства с группой голономии $Spin(7)$ и 3-сасакиевы многообразия // Геометрия, топология и математическая физика. I, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова, Труды МИАН. 2008. Т. 263. С. 6–17.

[45] Базайкин Я. В. Глобально гиперболические лоренцевы пространства со специальными группами голономии // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50, № 4. С. 721–736.

[46] Базайкин Я. В., Матвиенко И. В. О четырехмерных T^2-многообразиях положительной кривизны Риччи // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, № 5. С. 973–979.

Базайкин Ярослав Владимирович

Некомпактные римановы и лоренцевы многообразия со специальными группами голономии

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Подписано в печать 28.07.09. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 100 экз. Заказ №110

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6

$10 =$