

0719596-1

На правах рукописи

КАРАМОВА АЛЬФИРА АВКАЛЕВНА

**Качественные и спектральные свойства
решений уравнений смешанного типа
с двумя линиями вырождения и их применения**

специальность 01.01.02 – "Дифференциальные уравнения"

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико – математических наук

Карамов

Казань – 2000

Диссертация выполнена на кафедре математического анализа
Стерлитамакского государственного педагогического института

Научный руководитель: доктор физико – математических наук,
профессор Сабитов К.Б.

Официальные оппоненты: доктор физико – математических наук,
профессор Солдатов А.П.

кандидат физико – математических наук,
доцент Бурмистров Б.Н.

Ведущая организация: Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова

Защита состоится “20” декабря 2000 г. в 16 часов 00 минут
на заседании диссертационного совета К 053.29.27 при Казанском
государственном университете по адресу: г. Казань, ул. Универси-
тетская, 17, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского
государственного университета.

Автореферат разослан 15 ноября 2000 г.

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА
КФУ



0000947910

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ. – мат. наук,
профессор

Плешинский Н.Б.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория краевых задач для уравнений смешанного типа в силу прикладной и теоретической значимости в последние годы стала одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Начало исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в известных работах Ф. Трикоми и С. Геллерстедта, где были впервые поставлены и исследованы краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. Они изучали задачи для уравнения смешанного типа с одной линией параболического вырождения, теперь известные как "задача Трикоми" и "задача Геллерстедта".

В 40-х годах Ф.И. Франкль [1] обнаружил важные приложения задачи Трикоми и других родственных ей задач в трансзвуковой газодинамике. Кроме того, в последние годы на важность уравнений смешанного типа указано в работах О.С. Рыжова, А.Д. Пилия и В.И. Федорова, Э.Г. Шифрина, Г.Г. Черного, А.Г. Кузьмина в связи с проблемами теории сопел Лавалю, теории плазмы и другими вопросами.

В 50-е годы в работах Ф.И. Франкля, А.В. Бицадзе, К.И. Бабенко было положено начало современной теории уравнений смешанного типа. В этих работах наряду с задачами Трикоми и Геллерстедта были поставлены и изучены новые краевые задачи для уравнений смешанного типа. В дальнейшем эти краевые задачи изучались многими авторами как в нашей стране (В.Ф. Волкодавов, В.Н. Врагов, В.И. Жегалов, Т.Д. Джураев, Т.Ш. Кальменов, А.И. Кожанов, Ю.М. Крикунов, О.А. Ладыженская, М.Е. Лернер, В.П. Михайлов, Е.И. Моисеев, А.М. Нахушев, С.М. Пономарев, С.П. Пулькин, К.Б. Сабитов, М.С. Салахитдинов, М.М. Смирнов, А.П. Солдатов, Л.И. Чибрикова, Р.С. Хайруллин, Б.Н. Бурмистров и другие), так и за рубежом (S. Agmon, L. Nirenberg, M.N. Protter, C.S. Morawetz, P. Germain, R. Bader, P.O. Lax, R.P. Phillips, M. Schneider, Г.Д. Каратопраскиев, Н.И. Попиванов, Г.Д. Дачев и другие). Основные результаты этих работ и соответствующая им библиография приведены в монографиях

А.В. Бицадзе, Л. Берса, К.Г. Гудерлея, М.М. Смирнова, М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева, Е.И. Моисеева.

Краевыми задачами для уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа занимались М.М. Зайнулабидов, В.Ф. Волкодавов, В.В. Азовский, О.И. Маричев, А.М. Ежов, Н.И. Попиванов, Т.Б. Ломоносова, Хе Кан Чер, С.И. Макаров, С.С. Исамухамедов, Ж. Орамов, М.С. Салахитдинов, К.Б. Сабитов, Б. Ислюмов и другие авторы.

Основными целями работы являются: установление принципа экстремума для общих уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа; исследование спектральной задачи Трикоми для оператора Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа и изучение свойств системы собственных функций на полноту; применение метода рядов по собственным функциям для решения задачи Трикоми для модельных уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями изменения типа.

Методы исследования. При установлении качественных свойств решений уравнений смешанного типа используются известные принципы экстремума для эллиптических, гиперболических и смешанных уравнений, метод барьерных функций. При доказательстве единственности решения краевых задач используется установленный принцип максимума для уравнений смешанного типа и метод интегральных тождеств, а при доказательстве существования применяется метод рядов по собственным функциям соответствующей спектральной задачи.

Научная новизна. 1. Установлены экстремальные свойства решений общих линейных уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа в более широком классе регулярных решений и при более слабых ограничениях на коэффициенты, чем в [2], и показаны применения при доказательстве единственности решения задачи Трикоми.

2. Спектральная задача Трикоми для оператора Лаврентьева – Бицадзе с двумя перпендикулярными линиями изменения типа сведена к новой нелокальной эллиптической задаче на

собственные значения для оператора Лапласа. В случае, когда область эллиптичности – четверть круга, методом разделения переменных найдены собственные значения $\lambda_{n,m}$ и соответствующие им собственные функции $u_{n,m}(x, y)$. Построенная система собственных функций исследована на полноту в областях эллиптичности, гиперболичности и в целом в смешанной области.

3. На основании системы собственных функций $\{u_{n,m}\}$ построены регулярные решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа и уравнения Лаврентьева – Бицадзе с комплексным параметром.

4. Построено решение пространственной задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя плоскостями изменения типа в цилиндрической области.

5. Методом рядов по собственным функциям соответствующей спектральной задачи построены регулярные решения краевых задач типа Трикоми и Трикоми – Неймана, имеющих газодинамическое приложение [1, 3], для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями степенного вырождения.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты работы представляют теоретический интерес и могут найти практическое применение в газовой динамике.

Апробация работы. Результаты, приведенные в диссертации, докладывались и обсуждались на научном семинаре кафедры математического анализа Стерлитамакского государственного педагогического института (научные руководители – профессор К.Б. Сабитов и профессор Ф.Х. Мукминов, 1997 – 2000 гг.), на научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета (научные руководители – профессор Л.И. Чибрикова и профессор В.И. Жегалов, октябрь 2000 г.), на научном семинаре кафедры общей математики факультета ВМиК Московского государственного университета им М.В. Ломоносова (научный руководитель – чл.-корр. РАН Е.И. Моисеев, октябрь 2000 г.), а также на следующих конференциях.

1. Международная научная конференция "Дифференциаль-

ные уравнения. Интегральные уравнения. Специальные функции", посвященная 90-летию со дня рождения профессора Пулькина С.П. (г. Самара, 1997).

2. Всероссийская научная конференция "Физика конденсированного состояния" (г. Стерлитамак, 1997).

3. Международная научная конференция "Спектральная теория дифференциальных операторов и смежные вопросы", посвященная юбилею академика В.А. Ильина (г. Стерлитамак, 1998).

4. Всероссийская научно-практическая конференция "Проблемы физико-математического образования в педагогических вузах России на современном этапе" (г. Магнитогорск, 1999).

5. Международная научная конференция "Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы" (г. Уфа, 2000).

6. Международная научная конференция "Актуальные проблемы математики и механики", посвященная 40-летию механико-математического факультета КГУ (г. Казань, 2000).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в работах [6] – [16], список которых приведен в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 13 параграфов, списка литературы. Объем диссертации составляет 105 страниц, включая список литературы, состоящий из 92 наименований.

Основное содержание работы

Во введении приведен краткий обзор литературы по теме диссертации, излагается краткое содержание работы, сформулированы основные результаты, которые выносятся на защиту.

В главе 1 изучены экстремальные свойства решений уравнения

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + N(x)u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = F, \quad (1)$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $xN(x) > 0$ при $x \neq 0$, в областях эллиптичности, гиперболичности и в целом в смешанной области D в более широком классе регулярных решений уравнения (1) и при более слабых ограничениях на его коэффициенты, по сравнению с работой [2]. Приводятся применения экстремальных свойств при исследовании задачи Трикоми.

В § 1.1 приведена постановка задачи Трикоми для уравнения (1).

Рассмотрим уравнение (1) в области D , ограниченной:

- 1) простой кривой Жордана Γ , лежащей в первой четверти плоскости с концами в точках $A_1 = (a, 0)$ и $B_1 = (0, b)$, $a, b > 0$;
- 2) характеристиками OC_1 и C_1A_1 уравнения (1) при $x > 0$ и $y < 0$,
- 3) характеристиками OC_2 и C_2B_1 уравнения (1) при $x < 0$ и $y > 0$, где $O = (0, 0)$, $C_1 = (a/2, y_{C_1})$, $y_{C_1} < 0$, $C_2 = (x_{C_2}, b/2)$, $x_{C_2} < 0$.

Задача T_1 . Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_0 \cup D_1 \cup D_2); \quad (2)$$

$$Lu(x, y) \equiv F(x, y), \quad (x, y) \in D_0 \cup D_1 \cup D_2; \quad (3)$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\Gamma}; \quad (4)$$

$$u(x, y) = \psi_1(x, y), \quad (x, y) \in \overline{OC_1 \cup OC_2},$$

где $D_0 = D \cap \{x, y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{y < 0\}$, $D_2 = D \cap \{x < 0\}$, φ и ψ_1 - заданные достаточно гладкие функции.

Задача T_2 . Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (2) - (4) и

$$u(x, y) = \psi_2(x, y), \quad (x, y) \in \overline{C_1A_1 \cup C_2B_1},$$

где φ и ψ_2 - заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(A_1) = \psi_2(A_1)$, $\varphi(B_1) = \psi_2(B_1)$.

В § 1.2 в эллиптической области доказаны утверждения о знаке нормальной производной в точке максимума и вблизи точки максимума решения уравнения (1) на линии вырождения.

Лемма 1.2. Пусть: 1) $C(x, y) \leq 0$ в области D_0 ,
2) $u(x, y) \in C(\overline{D_0}) \cap C^1(D_0 \cup OA_1 \cup OB_1) \cap C^2(D_0)$, $Lu \equiv F(x, y) \geq 0$

(≤ 0) в D_0 ;

3) $\max_{\overline{D_0}} u(x, y) = u(Q) > 0$ ($\min_{\overline{D_0}} u(x, y) = u(Q) < 0$),

4) функция $u(x, y)$ имеет изолированный максимум (минимум) $u(Q)$ в точке O ;

5) в малой окрестности точки O : а) функции u_x^2 и u_y^2 суммируемы; б) производные A_x и B_y непрерывны вплоть до границы; в) $2C - A_x - B_y \leq 0$, $A(0, y) \geq 0$ и $B(x, 0) \geq 0$. Тогда в любой окрестности $U \subset \partial D_0$ точки O найдется точка $Q' \in U$ такая, что

$$\frac{\partial u}{\partial n}(Q') < 0 \text{ } (> 0),$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial n} = u_x n_x + u_y n_y,$$

n_x и n_y — компоненты внутренней нормали к границе области D_0 .

В § 1.3 для уравнения (1) в областях гиперболичности при некоторых ограничениях на его коэффициенты показано, что максимум решения $u(x, y)$ по замкнутым областям $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$ достигается на отрезках параболического вырождения.

В § 1.4 для уравнения (1) в смешанной области при определенных условиях доказано, что максимум решения $u(x, y)$ по замкнутой смешанной области $\overline{D}$ достигается на эллиптической границе $\overline{\Gamma}$. Из этого утверждения следуют единственность решения задач T_1 и T_2 при произвольной эллиптической границе Γ .

В § 1.5 приведены примеры модельных уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения:

$$\operatorname{sgn} y \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} x \cdot u_{yy} = 0,$$

$$\operatorname{sgn} y \cdot |y|^n u_{xx} + \operatorname{sgn} x \cdot |x|^m u_{yy} = F(x, y), \quad n, m \geq 0,$$

$$\operatorname{sgn} y \cdot |y|^n u_{xx} + x^m u_{yy} = 0, \quad n > 0, \quad m \geq -\frac{n}{n+1}.$$

На этих примерах показано применение изложенной в главе 1 теории: получены принципы экстремума и на их основе доказаны теоремы единственности решения краевых задач T_1 , T_2 и других.

В главе 2 изучены спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа и показаны их применения при построении решения задачи Трикоми.

В § 2.1 изучена спектральная задача Трикоми для оператора Лаврентьева – Бицадзе. Для уравнения

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} x \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0, \quad (5)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, в области D , ограниченной: 1) простой кривой Жордана Γ , лежащей в первой четверти плоскости XOY с концами в точках $A(1, 0)$ и $B(0, 1)$; 2) характеристиками OC_1 и C_1A уравнения (5) при $x > 0, y < 0$; 3) характеристиками OC_2 и C_2B при $x < 0, y > 0$, поставим следующую спектральную задачу.

Задача T_λ . Найти значения комплексного параметра λ и соответствующие им функции $u(x, y)$, удовлетворяющие условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_0 \cup D_1 \cup D_2), \quad (6)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_0 \cup D_1 \cup D_2, \quad (7)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in C_1C_2 \cup \overline{\Gamma}. \quad (8)$$

На основании решений задач Дарбу областях D_1 и D_2 [2, гл. II], получены функциональные соотношения между следом решения $u(x, y)$ и следом нормальной производной решения на отрезках OA и OB . На основании этих соотношений задача T_λ сведена к новой нелокальной эллиптической задаче на собственные значения для оператора Лапласа в области D_0 : найти значения параметра λ и соответствующие им собственные функции $u(x, y)$, удовлетворяющие в D_0 условиям (6)–(8) и

$$u_y(x, 0) = u_x(x, 0) + \lambda \int_0^x u(t, 0) \frac{J_1[\sqrt{\lambda}(x-t)]}{\sqrt{\lambda}(x-t)} dt, \quad 0 < x < 1,$$

$$u_x(0, y) = u_y(0, y) + \lambda \int_0^y u(0, t) \frac{J_1[\sqrt{\lambda}(y-t)]}{\sqrt{\lambda}(y-t)} dt, \quad 0 < y < 1,$$

где $J_\mu(\cdot)$ – функция Бесселя, $\sqrt{\lambda} > 0$ при $\lambda > 0$.

В случае, когда область эллиптичности является четвертью круга единичного радиуса с центром в начале координат, методом разделения переменных найдены собственные значения $\lambda_{n,m}$ и соответствующие им собственные функции спектральной задачи Трикоми:

$$u_{n,m}(x, y) = \begin{cases} c_{n,m} J_{\mu_n} \left(\sqrt{\lambda_{n,m}(x^2 + y^2)} \right) (\cos \mu_n \varphi + \sin \mu_n \varphi), & (x, y) \in D_0, \\ c_{n,m} \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n} \left(\sqrt{\lambda_{n,m}(x^2 - y^2)} \right), & (x, y) \in D_1, \\ (-1)^{n-1} c_{n,m} \left(\frac{y+x}{y-x} \right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n} \left(\sqrt{\lambda_{n,m}(y^2 - x^2)} \right), & (x, y) \in D_2, \end{cases} \quad (9)$$

где $\mu_n = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, $c_{n,m}$ – действительные числа, $\lambda_{n,m}$ – m -й корень уравнения $J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}) = 0$.

Изучен вопрос о полноте системы собственных функций (9) в областях эллиптичности, гиперболичности и в целом в смешанной области. Результат сформулирован в виде теорем:

Теорема 2.2. Система собственных функций (9) задачи T_λ полна в $L_2(D_0)$.

Теорема 2.3. Система собственных функций (9) задачи T_λ полна в $L_2(D_1)$ и $L_2(D_2)$.

Теорема 2.4. Система собственных функций (9) задачи T_λ не полна в $L_2(D)$.

Так же показано, что задача T_λ не имеет присоединенных функций.

В §§ 2.2 – 2.4 на основании работ Е.И. Моисеева [4, 5] показаны применения системы собственных функций для построения решения задачи Трикоми для уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа.

В § 2.2 рассмотрены краевые задачи для уравнения

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} x \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = 0 \quad (10)$$

в области D , ограниченной: 1) дугой Γ_0 единичной окружности с центром в начале координат при $x, y > 0$; 2) характеристиками

OC_1 и C_1A при $x > 0, y < 0$; 3) характеристиками OC_2 и C_2B при $x < 0, y > 0$, где $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C_1 = (1/2, -1/2)$, $C_2 = (-1/2, 1/2)$.

Задача Трикоми (задача T_1). Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (6), (7) и

$$u(x, y)|_{\Gamma_0} = v(r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi), \quad \varphi \in [0, \pi/2], \quad (11)$$

$$u|_{C_1C_2} = 0,$$

где f - заданная достаточно гладкая функция.

Задача T_2 . Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (6), (7), (11) и

$$u|_{AC_1 \cup BC_2} = 0,$$

причем $f(0) = f(\pi/2) = 0$.

Получены следующие утверждения.

Теорема 2.5. Если $f(\varphi) \in C^\alpha[0, \pi/2]$, $0 < \alpha \leq 1$, $f(0) = f(\pi/2) = 0$, то существует единственное решение задачи T_1 и оно имеет вид

$$u(x, y) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n r^{2n-1} \sin[(2n-1)\varphi + \pi/4], & (r, \varphi) \in D_0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n (x+y)^{2n-1}, & (x, y) \in D_1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f_n (y+x)^{2n-1}, & (x, y) \in D_2, \end{cases}$$

где f_n определяются по формулам [5]:

$$f_n = \int_0^{\pi} f(\varphi/2) h_n(\varphi) d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$h_n(\varphi) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos \varphi/2)^{-1}}{(\operatorname{tg} \varphi/2)^{1/2}} \sum_{k=1}^n (\sin k\varphi) B_{n-k},$$

$$B_l = \sum_{m=0}^l C_{1/2}^{l-m} C_{1/2}^m (-1)^{l-m}, \quad C_l^n = \frac{l(l-1) \cdots (l-n+1)}{n!}.$$

Теорема 2.6. Если $f(\varphi) \in C^\alpha[0, \pi/2]$, $0 < \alpha \leq 1$, $f(0) = f(\pi/2) = 0$, то существует единственное решение задачи T_2 , которое определяется по формуле

$$u(x, y) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n r^{2n-1} \sin[(2n-1)\varphi + \pi/4], & (x, y) \in D_0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n (x-y)^{2n-1}, & (x, y) \in D_1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_n (y-x)^{2n-1}, & (x, y) \in D_2. \end{cases}$$

В § 2.3 для уравнения (5) в области D найдено решение следующей задачи.

Задача Трикоми. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (6), (7),

$$u(x, y)|_{\bar{\Gamma}_0} = v(r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi), \quad \varphi \in [0, \pi/2], \quad u|_{C_1 C_2} = 0,$$

где f – заданная достаточно гладкая функция.

На основании системы собственных функций задачи T_λ построено решение задачи Трикоми в области D .

Теорема 2.8. Если $f(\varphi) \in C^\alpha[0, \pi/2]$, $0 < \alpha \leq 1$, $f(0) = f(\pi/2) = 0$, то существует решение задачи T при всех $\lambda \neq \lambda_{n,m}$ и оно имеет вид (соответственно в областях D_0, D_1, D_2):

$$u(x, y) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{J_{2n-1}(r\sqrt{\lambda})}{J_{2n-1}(\sqrt{\lambda})} \sin\left[(2n-1)\varphi + \frac{\pi}{4}\right], \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{2n-1} \frac{J_{2n-1}(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)})}{J_{2n-1}(\sqrt{\lambda})}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f_n \left(\frac{y+x}{y-x}\right)^{2n-1} \frac{J_{2n-1}(\sqrt{\lambda(y^2-x^2)})}{J_{2n-1}(\sqrt{\lambda})}. \end{cases}$$

В § 2.4 изучен пространственный аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя плоскостями изменения типа

$$LW \equiv \operatorname{sgn} x \cdot W_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot W_{yy} + W_{zz} = 0$$

в области $G = D \times (0, \pi)$.

Задача Т. Найти функцию $W(x, y, z)$, удовлетворяющую условиям:

$$W(x, y, z) \in C(\overline{G}) \cap C^1(G) \cap C^2(G_0 \cup G_1 \cup G_2),$$

$$LW(x, y, z) \equiv 0, \quad (x, y, z) \in G_0 \cup G_1 \cup G_2,$$

$$W(x, y, z)|_S = V(r, \varphi, z)|_{r=1} = F(\varphi, z), \quad \varphi \in [0, \pi/2], \quad z \in [0, \pi],$$

$$W(x, y, z)|_{y=-x} = 0, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad z \in [0, \pi],$$

$$W(x, y, z)|_{z=0} = W(x, y, z)|_{z=\pi} = 0,$$

где F - заданная достаточно гладкая функция, S - часть цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 1$, $x, y > 0$, $z \in [0, \pi]$; $G_0 = G \cap \{x, y > 0\}$; $G_1 = G \cap \{x > 0, y < 0\}$; $G_2 = G \cap \{x < 0, y > 0\}$.

На основании результатов § 2.3 получено следующее утверждение.

Теорема 2.9. Если функция $F(\varphi, z)$ по переменной φ удовлетворяет на отрезке $[0, \pi/2]$ условию Гельдера с показателем $\alpha \in (0, 1]$, а по переменной z на отрезке $[0, \pi]$ условию Гельдера с показателем $\beta \in (0, 1]$, $F(\varphi, 0) = F(\varphi, \pi) = 0$, $F(0, z) = F(\pi/2, z) = 0$, то существует решение задачи Т в области G и оно задается формулой (соответственно в областях G_0 , G_1 , G_2):

$$W(x, y, z) = \begin{cases} \sum_{n,k=1}^{\infty} f_{nk} \sin nz \sin \left[(2k-1)\varphi + \frac{\pi}{4} \right] \frac{I_{2k-1}(nr)}{I_{2k-1}(n)}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n,k=1}^{\infty} f_{nk} \sin nz \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^{2k-1} \frac{I_{2k-1}(n\sqrt{x^2-y^2})}{I_{2k-1}(n)}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n,k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} f_{nk} \sin nz \left(\frac{y+x}{y-x} \right)^{2k-1} \frac{I_{2k-1}(n\sqrt{y^2-x^2})}{I_{2k-1}(n)}, \end{cases}$$

где коэффициенты f_{nk} находятся из разложения функции $P_n(\varphi)$ в ряд по системе синусов

$$P_n(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{nk} \sin \left[(2k-1)\varphi + \frac{\pi}{4} \right], \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

функция $P_n(\varphi)$ определяется формулой $P_n(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(\varphi, z) \sin nz dz$,
 $I_{\mu}(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя.

В главе 3 изучены краевые задачи, имеющие газодинамическое приложение [1, 3], для уравнения

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + x^m u_{yy} = 0, \quad m > 0, \quad (12)$$

в области D , ограниченной: 1) простой кривой Γ , лежащей в первой четверти $x, y > 0$, с концами в точках $A(1, 0)$, $B(0, 1)$; 2) отрезком OB оси Oy ; 3) характеристиками OC и CA при $y < 0$, где $O = (0, 0)$, $C = ((1/2)^{1/\alpha}, -(1/2)^{1/\alpha})$, $\alpha = (m+2)/2$.

В § 3.1 исследована задача TN : найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \quad (13)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-, \quad (14)$$

$$u(x, y) = \hat{f}(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\Gamma}, \quad (15)$$

$$u_x(0+0, y) = 0, \quad y \in (0, 1), \quad (16)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in OC, \quad (17)$$

где $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $\hat{f}$ – заданная достаточно гладкая функция.

Аналогично главе 2 (§§ 2.2 – 2.4) задача TN сводится к нелокальной эллиптической задаче. В случае, когда $\Gamma = \Gamma_0$: $x^{2\alpha} + y^{2\alpha} = 1$, и $\hat{f}(x, y)|_{\overline{\Gamma}_0} = f(\varphi)$, с помощью метода рядов по собственным функциям соответствующей спектральной задачи доказано следующее утверждение.

Теорема 3.2. Если $f(\varphi) \in C^1[0, \pi/2]$, функция $f(\varphi)$ в малой окрестности точек $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ дважды непрерывно дифференцируема и $f(0) = f'(0) = f(\pi/2) = f'(\pi/2) = 0$, то существует единственное решение задачи TN и оно определяется формулой:

$$u(x, y) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} f_n r^{2\rho_n - 2q} \sin^{1/2-q} 2\varphi P_{\rho_n - 1/2}^{1/2-q}(-\cos 2\varphi), & \text{в } D_+, \\ -2^{q+1/2} \sqrt{\pi} \left(x^\alpha + (-y)^\alpha \right)^{-2q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n \Gamma(1-q)}{\Gamma(1+\rho_n) \Gamma(q-\rho_n)} \times \\ \times \left(x^\alpha - (-y)^\alpha \right)^{2\rho_n} F \left(\rho_n + q, q, 1 + \rho_n; \left(\frac{x^\alpha - (-y)^\alpha}{x^\alpha + (-y)^\alpha} \right)^2 \right), & \text{в } D_-, \end{cases}$$

где $q = \frac{m}{2(m+2)}$, $\rho_n = n + \frac{q}{2} + \frac{1}{4}$, $P_\nu^\mu(\cdot)$ - модифицированная функция Лежандра, $F(\cdot)$ - гипергеометрическая функция Гаусса, коэффициенты f_n вычисляются по формулам:

$$f_n = \frac{\Gamma(q) \sin(\pi q)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi h_n(\theta) \omega(\theta) d\theta,$$

$$h_n(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos(\theta/2))^{q-3/2}}{\operatorname{tg}(\theta/2)} \sum_{i=1}^n \sin(i\theta) B_{n-i},$$

$$\omega(\theta) = \sin \theta \int_0^\theta \left(f \left(\frac{\pi-t}{2} \right) \sin^{2q-1} t \right)' (\cos t - \cos \theta)^{-q} dt,$$

В § 3.2 исследована задача, аналогичная задаче (13) - (17), только вместо (16) задано граничное условие

$$u|_{OB} = u(0, y) = 0, \quad y \in [0, 1]. \quad (18)$$

В § 3.3 изучена задача (13), (14), (16), (17),

$$\delta_x[u] = y^m \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dy}{dx} - x^m \frac{\partial u}{\partial y} = \hat{w}(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Gamma}, \quad (19)$$

где $\hat{w}$ – заданная достаточно гладкая функция.

В § 3.4 решена задача (13), (14), (17) – (19).

Аналогично § 3.1 при некоторых ограничениях на граничную функцию получены представления решений задач в виде суммы рядов по собственным функциям соответствующих спектральных задач.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю профессору Сабитову Камиллю Басировичу за постановку задач, внимание к работе и поддержку.

Литература

1. Франкль Ф.И. О задачах Чаплыгина С.А. для смешанных до- и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1945. – Т. 9, № 2. – С. 121-142.
2. Сабитов К.Б. Некоторые вопросы качественной и спектральной теории уравнений смешанного типа: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М., 1991.
3. Гудерлей К.Г. Теория околосзвуковых течений. – М.: ИЛ, 1960. – 421 с.
4. Моисеев Е.И. Решение задачи Трикоми в специальных областях // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 1. – С. 93-103.
5. Моисеев Е.И. О базисности одной системы синусов // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 1. – С. 177-179.
6. Карамова А.А. К вопросу о единственности решения задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа // Тезисы Международной научной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения С.П. Пулькина. – Самара, 1997. – С. 33.
7. Сабитов К.Б., Карамова А.А. Принцип максимума для вырождающихся уравнений второго порядка // Материалы II Уральской региональной межвузовской научно-практической конференции. – Ч.2. – Уфа, 1997. – С. 40-41.
8. Карамова А.А. О единственности решения задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения

типа // Физика конденсированного состояния: Труды Всерос. науч. конф. – Т. 1. Математические методы физики. – Стерлитамак, 1997. – С. 69-72.

9. *Сабитов К.Б., Карамова А.А.* Принцип максимума для уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения // Тезисы Третьего Сибирского конгресса по прикладной и промышленной математике (ИНПРИМ). – Ч. 4. – Новосибирск, 1998. – С. 36-37.

10. *Шарафутдинова Г.Г., Карамова А.А.* Задача Трикоми для уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения // Спектральная теория дифференциальных операторов и смежные вопросы: Сборник науч. трудов Междунар. науч. конф. – Ч.1. – Стерлитамак, 1998. – С. 87-95.

11. *Сабитов К.Б., Карамова А.А.* О задаче на собственные значения для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа // Проблемы физико-математического образования в педвузах России на современном этапе: Материалы Всерос. науч.-практ. конф. – Ч. 2. – Магнитогорск, 1999. – С. 28-29.

12. *Сабитов К.Б., Карамова А.А., Шарафутдинова Г.Г.* К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения // Известия вузов. Математика. – 1999, № 11. – С. 70-80.

13. *Карамова А.А.* Решение задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа методом разделения переменных // Дифференциальные уравнения и их приложения в физике: Сборник науч. трудов. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал АН РБ, 1999. – С. 31-38.

14. *Сабитов К.Б., Карамова А.А.* Задача Трикоми для пространственного уравнения смешанного типа с двумя плоскостями изменения типа // Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках: Тезисы докл. науч. конф. – Воронеж, 2000. – С. 196.

15. *Карамова А.А.* Пространственная задача Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя плоскостями изменения типа // Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы. III. Анализ и дифференциальные уравнения: Труды Междунар. науч. конф. – Уфа, 2000. – С. 112-116.

16. Карамова А.А., Сабитов К.Б. Решение одной газодинамической задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Том 5. Актуальные проблемы математики и механики: Материалы Междунар. науч. конф. – Казань: УНИПРЕСС, 2000. – С. 100-102.

Работы [7], [9], [11], [12], [14], [16] выполнены в соавторстве с научным руководителем Сабитовым К.Б., которому принадлежит постановка задач. В работах [10], [12] результаты получены совместно с Шарафутдиновой Г.Г. независимо друг от друга.

Диссертация выполнена при финансовой поддержке Министерства Образования Российской Федерации, код гранта 22, и Российского фонда фундаментальных исследований, код гранта 99-01-00934.

Подписано в печать 31.10.2000.

Формат 60 × 84_{1/16}.

Гарнитура "Time".

Печать оперативная.

Усл. печ. л. 1,00.

Тираж 100 экз.

Заказ №168/0.

Отпечатано в типографии

Стерлитамакского государственного
педагогического института:

453103, г. Стерлитамак, пр. Ленина, 49.

2-20