УДК 519.6

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ТОЧЕЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ХЕЛЕ-ШОУ [1)]

А.А. СВИДЛОВ, М.И. ДРОБОТЕНКО, А.Э. БИРЮК

Кубанский государственный университет, г. Краснодар
E-mail: svidlov@mail.ru; mdrobotenko@mail.ru; abiryuk@gmail.ru

MODIFIED METHOD OF POINT POTENTIALS AND ITS APPLICATION TO HELE SHAW PROBLEM

A.A. SVIDLOV, M.I. DROBOTENKO, A.E. BIRYUK

Kuban State University, Krasnodar

Аннотация

В работе рассмотрен модифицированный метод точечных потенциалов и его применение к задаче Хеле-Шоу. Введена расширенная система точечных потенциалов, доказана её полнота и сходимость модифицированного метода точечных потенциалов. Полученные результаты использованы для решения задачи Хеле-Шоу.

Ключевые слов : Метод фундаментальных решений, метод точечных потенциалов, задача Хеле-Шоу

Summary

Modified method of Point Potential and its application to Hele Shaw problem is being observed. Extended system of point potential has been introduced. Completeness of system and convergence of Modified method of Point Potential have been proved. The achieved results have been used for solving Hele Shaw problem.

Key words: fundamental solutions method, method of point potential, Hele Shaw problem.

В последнее время проявляется большой интерес к несеточным методам решения краевых задач. Метод, который следуя [1] будем называть методом точечных потенциалов (МТП), был предложен в работах В.Д.Купрадзе и М.А.Алексидзе [2, 3]. В [1, 4] метод точечных потенциалов распространен на широкий класс краевых задач.

Удобство метода для решения задач математической физики в областях сложной формы обеспечило его широкое распространение [5, 6]. В настоящей работе предложена модификация МТП, обеспечивающая сходимость приближенного решения в более сильной норме, что позволяет применять его для решения таких задач, как, например, задача Хеле-Шоу [7].

1. Расширенная система точечных потенциалов и её полнота

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^2$ − ограниченная область с ляпуновской границей или открытый ограниченный многоугольник, $Q^+ = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}$.

[1)] Работ выполнена при поддержке РФФИ (РФФИ-Юг 13/96)

Определение 1. *Расширенной системой точечных потенциалов будем называть следующее множество функций:*

$$\alpha_0(x) = 1, \; \alpha_i(x) = E(x - z_i), \; i = 1, 2, \ldots,$$

где $\{z_i\}_{i=1}^{\infty} \subset Q^+$, $E(x) = \dfrac{1}{2\pi} \ln |x|$ *— фундаментальное решение уравнения Лапласа. Точки множества* $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ *назовем базисными точками расширенной системы точечных потенциалов.*

Определим необходимые в дальнейшем понятия регулярной области и множества единственности потенциала простого слоя.

Определение 2. *Пусть потенциал простого слоя (ППС)*

$$V_\rho(x) = \int\limits_{\partial Q} \rho(y) E(x - y) dy$$

с плотностью $\rho \in W_2^{-1}(\partial Q)$ *обращается в тождественный нуль на множестве* Q^+ *тогда и только тогда, когда его плотность* $\rho \equiv 0$, *тогда область* Q *будем называть регулярной.*

Определение 3. *Множество* $A \subset Q^+$ *будем называть множеством единственности ППС, если из равенства* $V_\rho(x) = 0$ *для всех* $x \in A$ *следует равенство* $V_\rho(x) = 0$ *для всех* $x \in Q^+$.

Следующая теорема устанавливает необходимые и достаточные условия полноты расширенной системы точечных потенциалов.

Теорема 1. *Расширенная система точечных потенциалов* $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ *замкнута и полна в* $W_2^1(\partial Q)$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*
1. область Q *регулярна,*
2. множество базисных точек системы является множеством единственности ППС.

Следующие леммы показывают, что классы регулярных областей и множеств единственности ППС достаточно широки.

Лемма 1. *Если существует точка* $x \in Q$, *относительно которой область* Q *является звездной, то область* Q *регулярна.*

Лемма 2. *Любой отрезок (и даже любое его счетное подмножество), расположенный на прямой, не пересекающейся с* $\bar{Q}$, *является множеством единственности ППС.*

2. Модифицированный МТП и его свойства.

Изложим модификацию МТП на примере задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
Рассмотрим следующую задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } Q, \\ \\ u = \varphi \text{ на } \partial Q, \; \varphi \in W_2^1(\partial Q). \end{cases} \tag{1}$$

Определение 4. *Пусть* $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ *— расширенная система точечных потенциалов. Приближенным решением задачи (1) будем называть функцию вида*

$$u^N = c_0 + \sum_{i=1}^{N} c_i \alpha_i,$$

где коэффициенты $c_i, i = 1, 2, \ldots, N$ *доставляют минимум функции*

$$F(c_1, \ldots, c_N) = \left\| \varphi - u^N \right\|^2_{W_2^1(\partial Q)}.$$

От обычного МТП модифицированный метод точечных потенциалов отличается видом функции F.

Из теоремы 1 следует, что если область Q регулярна и множество базисных точек системы $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ является множеством единственности ППС, то $\left\|\varphi - u^N\right\|_{W_2^1(\partial Q)} \to 0$ при $N \to \infty$.

Сходимость приближенного решения задачи (1) устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть область Q регулярна и множество базисных точек системы $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ является множеством единственности ППС, $u \in W_2^1(Q)$ − решение задачи (1), u^N − приближенное решение задачи (1); тогда $\|u - u^N\|_{W_2^1(Q)} \to 0$ при $N \to \infty$.*

Опираясь на теорему 1 можно доказать аналогичную теорему о сходимости модифицированного МТП для уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями.

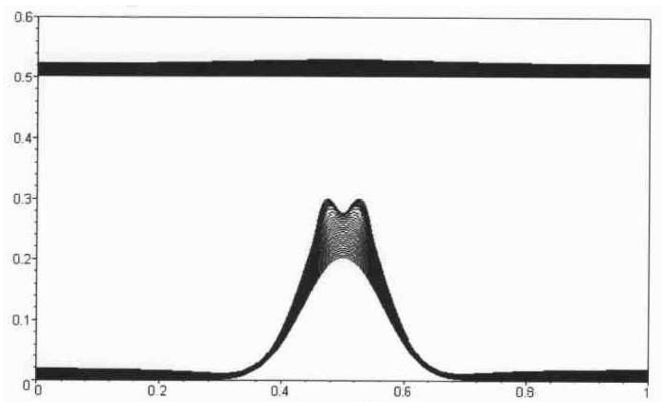

Рис. 1:

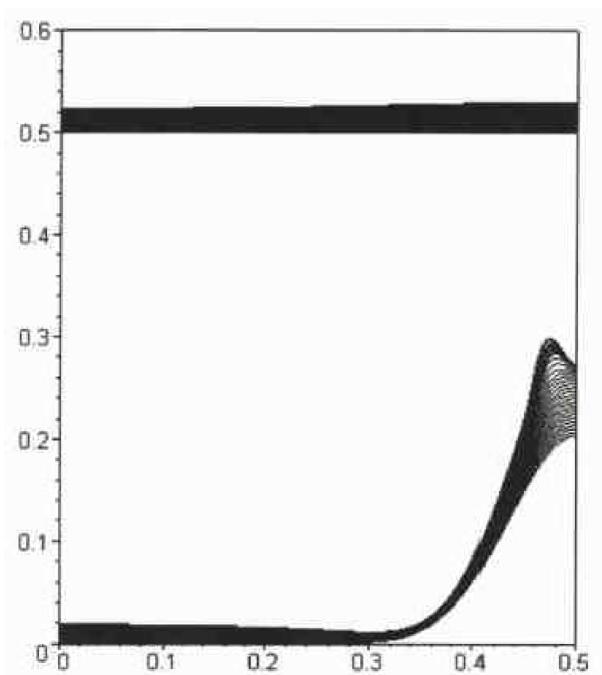

Рис. 2:

3. Применение модифицированного МТП к задаче Хеле-Шоу.

Рассмотрим следующую задачу: найти такие функцию p и область $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$, что

$$\begin{cases} \Delta p = 0 \text{ в } \Omega(t), \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_1(t), \\ p = 0 \text{ на } \Gamma_2(t),\ p = 1 \text{ на } \Gamma_3(t), \\ v_n = \lambda \dfrac{\partial p}{\partial n} \text{ на } \Gamma_2(t) \cup \Gamma_3(t). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\Omega(0)$ — заданная область, $\Gamma_1(t), \Gamma_2(t), \Gamma_3(t)$ — непересекающиеся части границы $\partial\Omega(t)$, $\Gamma_1(t) \cup \Gamma_2(t) \cup \Gamma_3(t) = \partial\Omega(t)$, $\Gamma_1(t)$ — неподвижная часть границы, $\Gamma_2(t), \Gamma_3(t)$ — подвижные части, v_n — нормальная составляющая скорости движения подвижной части границы.

Проведем полудискретизацию задачи (2) по t. Для отыскания скорости движения подвижной части границы на каждом временном слое необходимо решать смешанную краевую задачу для уравнения Лапласа. Для этого удобен МТП, поскольку он практически не требует затрат, связанных с изменением формы границы. Обычный МТП не гарантирует необходимой точности при вычислении значений $\dfrac{\partial p}{\partial n}$ на подвижной части границы, поэтому задача решалась с помощью модифицированного МТП. На рис. 1,2 приведены решения двух задач, причем, при $x \leqslant 0.5$ эти решения совпадают, что свидетельствует об устойчивости предложенного метода. Решение этих же задач с помощью обычного метода приводило к сильной численной неустойчивости уже при малых значениях t.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лежнев А.В., Лежнёв В.Г.** Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. — Краснодар: Издательство КубГУ, 2009. — 111 с.
2. **Купрадзе В.Д., Алексидзе М.А.** Метод функциональных уравнений для приближенного решения некоторых граничных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1964. — Т. 4, № 4. — С. 683—715.
3. **Купрадзе В.Д.** О приближенном решении задач математической физики // Успехи математических наук. — 1967. — Т. XXII, № 2(134). — С. 59—107.
4. **Дроботенко М.И., Игнатьев Д.В.** Метод точечных потенциалов для уравнения Лапласа // Экологический вестник научных центров ЧЭС. — 2007. — № 1. — С. 5—9.
5. **Li X.** Convergence of the method of fundametal solutions for solving the boundary value problem of modified Helmholtz equation // Applied Mathematics and Computation. — 2004. — V. 159. — P. 113-125.
6. **Alves C.J.S., Chen C.S.** A new method of fundamental solutions applied to nonhomogeneous elliptic problems// Adv. Comp. Math. — 2005. — V. 23. — P. 125-142.
7. **Окендон Дж.Р., Ховисон С.Д.** П.Я.Кочина и Хеле-Шоу в современной математике, естественных науках и технике // ПММ. — 2002. — Т. 66, вып. 3. — С. 515—524.

REFERENCES

1. **Lezhnev A.V., Lezhnev V.G.** The method of basis potentials in mathematical physics and hydrodynamics [Metod bazisnykh potentcialov v zadachakh matematicheskoi fiziki i gidrodinamiki. — Krasnodar: Publishing KubSU, 2009. — 111 p. (in Russian)

2. **Kupradze V.D., Aleksidze M.A.** The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1964. – V. 4, № 4. – P. 82–126.
3. **Kupradze V.D.** On the approximate solution of problems in mathematical physics // Russian Mathematical Surveys. – 1967. – V. 22, № 2. – P. 58–108.
4. **Drobotenko M.I., Ignatiev D.V.** A method of point potentials for Laplace equation [Metod tochechnykh potentcialov dlja uravnenija Laplasa] // Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation. – 2007. – № 1. – P. 5–9. (in Russian)
5. **Li X.** Convergence of the method of fundametal solutions for solving the boundary value problem of modified Helmholtz equation // Applied Mathematics and Computation. – 2004. – V. 159. – P. 113-125.
6. **Alves C.J.S., Chen C.S.** A new method of fundamental solutions applied to nonhomogeneous elliptic problems// Adv. Comp. Math. – 2005. – V. 23. – P. 125-142.
7. **Ockendon J.R., Howison S.D.** Kochina and Hele-Shaw in modern mathematics, natural science and industry // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2002. – V. 66, Is. 3. – C. 505–512.