

УДК 519.63

**ОПЕРАТОРЫ НОРМЫ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ<sup>1)</sup>****А.В. ГУЛИН, В.А. МОРОЗОВА***Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова**E-mail: vmgul@cs.msu.su, moroz@cs.msu.su***OPERATORS OF THE NORM IN THE THEORY OF STABILITY OF DIFFERENCE SCHEMES****A.V. GULIN, V.A. MOROZOVA***Lomonosov Moscow State University***Аннотация**

Рассматриваются схемы с весами, аппроксимирующие уравнение теплопроводности с нелокальными граничными условиями

$$y_{t,i}^n - y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad y_0^{n+1} = 0, \quad \frac{h}{2} y_{t,N}^n + y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \gamma y_{x,0}^{(\sigma)} = 0.$$

Здесь  $\gamma > 1$  – заданный параметр. Спектр основного разностного оператора содержит определенное число собственных значений в левой комплексной полуплоскости, что делает задачу неустойчивой во всем сеточном пространстве. Одним из этапов исследования устойчивости является построение оператора нормы  $D$ , то есть такого самосопряженного положительного оператора, для которого квадратичная форма  $(Dy, y)$  не возрастает на решении разностной задачи. В настоящей работе демонстрируется один из способов построения и исследования операторов нормы, гарантирующих устойчивость схемы в соответствующих подпространствах.

**Ключевые слова:** уравнение теплопроводности, нелокальные граничные условия, схема с весами, оператор нормы, устойчивость схемы.

**Summary**

Considered schemes with weights that approximate the heat equation with non-local boundary conditions

$$y_{t,i}^n - y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad y_0^{n+1} = 0, \quad \frac{h}{2} y_{t,N}^n + y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \gamma y_{x,0}^{(\sigma)} = 0.$$

Here  $\gamma > 1$  is the specified parameter. The spectrum of the primary difference operator contains a certain number of eigenvalues in the left complex half-plane, which makes the task unstable all over the net space. One of the stages of the study of stability is building operator norm  $D$ , then there is such a self-adjoint positive operator, for which the quadratic form  $(Dy, y)$  does not increase on the solution of the difference problem. In this paper shows one way of constructing and investigating operators norms that guarantee the stability of the scheme in the corresponding subspaces.

**Key words:** heat equation, nonlocal boundary conditions, the scheme with weights, the operator norm, stability of the scheme.

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00908)

**1. Введение**

Общий подход к построению теории устойчивости двухслойных разностных схем предложен А. А. Самарским [1]. Устойчивость разностных схем для уравнения теплопроводности с нелокальным граничным условием изучалась во многих работах (см., напр., [2]). Будем рассматривать схему с весами

$$\begin{aligned} y_{i,i}^n - y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad n = 0, 1, \dots, \\ y_i^0 &= u_0(x_i), \quad y_0^{n+1} = 0, \quad \frac{h}{2} y_{i,N}^n + y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \gamma y_{x,0}^{(\sigma)} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\gamma > 1$  – заданный параметр. Изучение устойчивости предполагает проведение нескольких этапов исследования. Первый этап состоит в отыскании необходимых и достаточных условий устойчивости в терминах заданных параметров  $\tau, h, \sigma, \gamma$ . Обычно эти условия находятся методом разделения переменных, а в более сложных случаях – с использованием принципа замороженных коэффициентов. Полученные таким образом условия будем называть спектральными условиями устойчивости. Для схем вида (1) спектральные условия устойчивости найдены в [2–4]. На втором этапе находится оператор нормы  $D$ , то есть такой самосопряженный положительный оператор, для которого решение  $y_n$  однородной разностной задачи удовлетворяет неравенствам

$$(Dy_{n+1}, y_{n+1}) \leq (Dy_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots \tag{2}$$

Иначе говоря, надо найти квадратичную форму  $(Dy, y)$ , невозрастающую на решении разностной схемы. Построение такой квадратичной формы аналогично отысканию функции Ляпунова в теории устойчивости систем дифференциальных уравнений. Не существует каких-либо достаточно общих способов построения оператора нормы  $D$ . В принципе, в качестве  $D$  можно взять любой самосопряженный положительный оператор, однако для него неравенства (2) будут выполняться лишь при грубых достаточных условиях на входные параметры. Наконец, на третьем этапе проводится исследование оператора устойчивости на предмет выяснения эквивалентности его какому-либо более простому оператору  $D_0$ . Например, установление операторных неравенств

$$\alpha_0 E \leq D \leq \alpha_1 E, \quad 0 < \alpha_0 < \alpha_1 \tag{3}$$

позволяет найти константы эквивалентности  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  энергетической нормы  $\|y\|_D = (Dy, y)^{1/2}$  среднеквадратичной норме  $\|y\| = (y, y)^{1/2}$ , а также оценить сверху число обусловленности матрицы  $D$ . Наличие оценок (3) позволяет упростить исследование устойчивости разностных схем по правой части (см. [2, с. 190]).

Построение оператора нормы  $D$  и его оценки для схемы (1) в определенном диапазоне изменения параметра  $\gamma$  осуществлено в [2]. Заметим, что впервые для схемы (1) с  $\gamma = 1$  подобное исследование проведено Н.И. Ионкиным [3].

В зависимости от величины  $\gamma$  спектр основного разностного оператора содержит определенное число собственных значений в левой комплексной полуплоскости, что делают задачу неустойчивой во всем пространстве, то есть при любом выборе начальных данных. Критерий спектральной устойчивости в подпространствах, порожденных устойчивыми гармониками, сформулирован в [4]. Один из способов построения оператора нормы, гарантирующего устойчивость в подпространстве, предложен в [5]. В настоящей работе на простом примере изучается другой подход к построению и исследованию оператора нормы.

На отрезке  $0 \leq x \leq 1$  зададим сетку  $\omega_h = \{x_i = ih\}_{i=0}^N$  и введем комплексное линейное пространство  $H$ , состоящее из векторов  $y = (y_1 y_2 \dots y_N)^T$  и снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} h y_i \bar{v}_i + 0,5 h y_N \bar{v}_N, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}. \tag{4}$$

Здесь  $y_i = y(x_i)$  – координаты вектора  $y$  в единичном базисе пространства  $H$ . Будем рассматривать также суммы  $(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} h y_i \bar{v}_i, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}$ . Основной разностный оператор  $A : H \rightarrow H$  схемы (1)

определяется правилом

$$\begin{aligned} (Ay)_i &= -y_{\bar{x},i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad y_0 = 0, \\ (Ay)_N &= \frac{2}{h} (y_{\bar{x},N} - \gamma y_{x,0}). \end{aligned} \quad (5)$$

В дальнейшем предполагаем, что  $\gamma > 1$ . Оператор  $A$  обладает базисной системой собственных векторов. Собственные значения  $\lambda_k$  и отвечающие им собственные векторы  $\mu^{(k)}$  можно выписать в явном виде (см. [2, с. 206]). Из явного представления следует, что по крайней мере одно собственное значение  $\lambda_0 < 0$  и, следовательно, схема неустойчива во всем пространстве  $H$ . Составим матрицу  $M = [\mu^{(0)} \mu^{(1)} \dots \mu^{(N-1)}]$ , столбцами которой являются собственные векторы оператора  $A$ . Поскольку система собственных векторов образует базис, матрица  $M$  имеет обратную. В [2] на основе матрицы  $M$  построен оператор нормы  $D = (hMM^*)^{-1}$ , гарантирующий устойчивость разностной схемы при условии  $|\gamma| < 1$  и естественном ограничении на отношение  $\tau/h^2$ .

Основная идея настоящей работы состоит в том, чтобы рассматривать устойчивость в подпространствах, полученных отбрасыванием неустойчивых гармоник  $\mu^{(k)}$ , для которых  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ . Иллюстрируем процесс исследования устойчивости на несложном примере, когда  $N = 4$ .

## 2. Оператор нормы в пространстве $H$ .

В случае  $N = 4$  введем в  $H$  скалярное произведение

$$(y, z] = h(y_1 \bar{z}_1 + y_2 \bar{z}_2 + y_3 \bar{z}_3 + 0.5y_4 \bar{z}_4) = y^T R \bar{z}, \quad R = h \operatorname{diag} [ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0.5 ]. \quad (6)$$

Разностный оператор (5) при  $\gamma > 1$  имеет следующие собственные значения и векторы:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 64 \sin^2(0, 5\psi h), \quad \mu^{(0)}(x_j) = \sin(\psi x_j), \quad h = 1/4, \\ \lambda_1 &= 64 \sin^2((\pi - 0, 5\psi) h), \quad \mu^{(1)}(x_j) = \sin((2\pi - \psi) x_j), \\ \lambda_2 &= 64 \sin^2((\pi + 0, 5\psi) h), \quad \mu^{(2)}(x_j) = \sin((2\pi + \psi) x_j), \\ \lambda_3 &= 64 \sin^2((2\pi - 0, 5\psi) h), \quad \mu^{(3)}(x_j) = \sin((4\pi - \psi) x_j), \\ \psi &= i\alpha, \quad \alpha = \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}), \quad x_j = jh, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (7)$$

Для любого  $y \in H$  справедливо разложение

$$y = c_0 \mu^{(0)} + c_1 \mu^{(1)} + c_2 \mu^{(2)} + c_3 \mu^{(3)}. \quad (8)$$

Обозначая  $c = (c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3)^T$ ,

$$M = [ \mu^{(0)} \quad \mu^{(1)} \quad \mu^{(2)} \quad \mu^{(3)} ] = \begin{bmatrix} \mu_1^{(0)} & \mu_1^{(1)} & \mu_1^{(2)} & \mu_1^{(3)} \\ \mu_2^{(0)} & \mu_2^{(1)} & \mu_2^{(2)} & \mu_2^{(3)} \\ \mu_3^{(0)} & \mu_3^{(1)} & \mu_3^{(2)} & \mu_3^{(3)} \\ \mu_4^{(0)} & \mu_4^{(1)} & \mu_4^{(2)} & \mu_4^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

получим  $y = Mc$ , следовательно  $c = M^{-1}y$ . Тем самым,

$$h^{-1}(c, c] = ((hMM^*)^{-1}y, y] = (Dy, y], \quad D = (hMM^*)^{-1}.$$

Иными словами,

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 + 0.5|c_3|^2 = (Dy, y], \quad D = (hMM^*)^{-1}. \quad (10)$$

Заметим, что матрица сопряженного к  $M$  оператора находится по правилу  $M^* = R^{-1} \bar{M}^T R$ . Наряду с матрицей  $M$  будем рассматривать матрицу  $V$  с элементами

$$\begin{aligned} v^{(0)}(x_j) &= -a \cos((1 - x_j)\bar{\psi}), \quad v^{(1)}(x_j) = a \cos(2\pi x_j + (1 - x_j)\bar{\psi}), \\ v^{(2)}(x_j) &= -a \cos(2\pi x_j - (1 - x_j)\bar{\psi}), \quad v^{(3)}(x_j) = a \cos(4\pi x_j + (1 - x_j)\bar{\psi}). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $a = 2/\sqrt{1-\gamma^2}$ ,  $x_j = jh$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . Системы векторов  $\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu^{(3)}$  и  $v^{(0)}, v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$  биортогональны, то есть  $(\mu^{(k)}, v^{(l)}) = \delta_{k,l}$ . Свойство биортогональности можно записать в виде равенства  $\bar{V}^T R M = E$ . Из биортогональности получаем, что  $c_k = (y, v^{(k)}) = y^T R \bar{v}^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  в разложении (8). Справедливо следующее утверждение.

Для оператора  $D = (hMM^*)^{-1}$  справедливы оценки  $\alpha_0(y, y) \leq (Dy, y) \leq \alpha_1(y, y)$ , где

$$\alpha_0 = \left[ (\mu^{(0)}, \mu^{(0)}) + (\mu^{(1)}, \mu^{(1)}) + (\mu^{(2)}, \mu^{(2)}) + 2(\mu^{(3)}, \mu^{(3)}) \right]^{-1},$$

$$\alpha_1 = (v^{(0)}, v^{(0)}) + (v^{(1)}, v^{(1)}) + (v^{(2)}, v^{(2)}) + 0,5(v^{(3)}, v^{(3)}).$$

Доказывается аналогично теореме 2 из раздела 5 настоящей работы.

### 3. Устойчивые трехмерные подпространства.

Поскольку  $\lambda_0 < 0$ , схема (1) не является устойчивой во всем пространстве  $H$ , каким бы не задать оператор нормы. Из представления (7) следует, что при любом  $\gamma > 1$  устойчивым является подпространство  $\tilde{H}_1 = \text{span}(\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu^{(3)})$ . Согласно [4], получаем следующий критерий спектральной устойчивости в подпространстве  $\tilde{H}_1$ :

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{32\tau(1 + \text{ch}(\alpha h))}, \text{ если } \gamma < \gamma_*, \quad \sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{32\tau \text{ch}^2(\alpha h)}, \text{ если } \gamma > \gamma_*. \quad (12)$$

Здесь  $h = 1/4$ ,  $\alpha = \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})$  и

$$\gamma_* = \frac{(z + \sqrt{z})^4 + (z + \sqrt{z})^{-4}}{2} \approx 34.889, \text{ где } z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Требование  $y \in \tilde{H}_1$  выделяет из (8) множество векторов, для которых  $c_0 = (y, v^{(0)}) = 0$ , что означает линейную связь между компонентами вектора  $y$ :

$$y_1 \bar{v}_1^{(0)} + y_2 \bar{v}_2^{(0)} + y_3 \bar{v}_3^{(0)} + 0,5y_4 \bar{v}_4^{(0)} = 0. \quad (13)$$

Поскольку  $|v_j^{(0)}| \neq 0$ , уравнение (13) можно разрешить относительно каждой компоненты  $y_j$ , для  $j = 1, 2, 3, 4$ . Например, разрешая относительно  $y_1$ , получим

$$y_1 = -\frac{1}{\bar{v}_1^{(0)}} (y_2 \bar{v}_2^{(0)} + y_3 \bar{v}_3^{(0)} + 0,5y_4 \bar{v}_4^{(0)}). \quad (14)$$

Таким образом, приходим к подпространству  $H_1 \subset H$ , состоящему из векторов  $y^{(1)} = (y_2 \quad y_3 \quad y_4)^T$  и снабженное скалярным произведением

$$(y^{(1)}, z^{(1)})_1 = h(y_2 \bar{z}_2 + y_3 \bar{z}_3 + 0,5y_4 \bar{z}_4).$$

Если  $y = (y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4)^T \in H_1$ , то согласно (14) имеем

$$y_1 = (y^{(1)}, w^{(1)})_1, \text{ где } w^{(1)} = \begin{pmatrix} w_2^{(1)} \\ w_3^{(1)} \\ w_4^{(1)} \end{pmatrix}, \quad w_i^{(1)} = -\frac{v_i^{(0)}}{h v_1^{(0)}}, \quad j = 2, 3, 4.$$

Аналогично вводятся подпространства  $H_2, H_3$  и  $H_4$ .

#### Подпространство $H_2$ .

$$y^{(2)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad w^{(2)} = \begin{pmatrix} w_1^{(2)} \\ w_3^{(2)} \\ w_4^{(2)} \end{pmatrix}, \quad w_i^{(2)} = -\frac{v_i^{(0)}}{h v_2^{(0)}}, \quad i = 1, 3, 4,$$

$$y_2 = (y^{(2)}, w^{(2)})_2 = h(y_1 \bar{w}_1^{(2)} + y_3 \bar{w}_3^{(2)} + 0,5y_4 \bar{w}_4^{(2)}).$$

Подпространство  $H_3$ .

$$y^{(3)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad w^{(3)} = \begin{pmatrix} w_1^{(3)} \\ w_2^{(3)} \\ w_4^{(3)} \end{pmatrix}, \quad w_i^{(3)} = -\frac{v_i^{(0)}}{hv_3^{(0)}}, \quad i = 1, 2, 4,$$

$$y_3 = (y^{(3)}, w^{(3)})_2 = h \left( y_1 \bar{w}_1^{(3)} + y_2 \bar{w}_2^{(3)} + 0,5 y_4 \bar{w}_4^{(3)} \right).$$

Подпространство  $H_4$ .

$$y^{(4)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad w^{(4)} = \begin{pmatrix} w_1^{(4)} \\ w_2^{(4)} \\ w_3^{(4)} \end{pmatrix}, \quad w_i^{(4)} = -2 \frac{v_i^{(0)}}{hv_4^{(0)}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$y_4 = (y^{(4)}, w^{(4)})_4 = h \left( y_1 \bar{w}_1^{(4)} + y_2 \bar{w}_2^{(4)} + y_3 \bar{w}_3^{(4)} \right).$$

#### 4. Устойчивость схемы (1) в подпространствах.

Построим сужения  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и  $A_4$  основного разностного оператора (5) на подпространства  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  и  $H_4$  соответственно. Оператор (5) при  $N = 4$ ,  $h = 1/4$  определяется как

$$(Ay)_1 = \frac{2y_1 - y_2}{h^2}, \quad (Ay)_2 = \frac{-y_1 + 2y_2 - y_3}{h^2},$$

$$(Ay)_3 = \frac{-y_2 + 2y_3 - y_4}{h^2}, \quad (Ay)_4 = \frac{-2\gamma y_1 - 2y_3 + 2y_4}{h^2}. \quad (15)$$

Пусть  $y \in H_1$ , тогда  $y_1 = (y^{(1)}, w^{(1)})_1$ . Подставляя это значение  $y_1$  в определение (15) оператора  $A$ , получим оператор  $A_1 : H_1 \rightarrow H_1$ , заданный правилом

$$(A_1 y^{(1)})_2 = h^{-2} \left( - (y^{(1)}, w^{(1)}) + 2y_2 - y_3 \right), \quad (A_1 y^{(1)})_3 = h^{-2} (-y_2 + 2y_3 - y_4),$$

$$(A_1 y^{(1)})_4 = h^{-2} \left( -2\gamma (y^{(1)}, w^{(1)}) - 2y_3 + 2y_4 \right).$$

Оператор  $A_1$  назовем *сужением оператора  $A$  на подпространство  $H_1$* . Матрица оператора  $A_1$  имеет вид

$$A_1 = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 - h\bar{w}_2^{(1)} & -1 - h\bar{w}_3^{(1)} & -0,5h\bar{w}_4^{(1)} \\ -1 & 2 & -1 \\ -2h\gamma\bar{w}_2^{(1)} & -2 - 2h\gamma\bar{w}_3^{(1)} & 2 - h\gamma\bar{w}_4^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Аналогично строятся сужения  $A_2$ ,  $A_3$  и  $A_4$  оператора  $A$  на подпространства  $H_2$ ,  $H_3$  и  $H_4$ . Собственными значениями каждого из операторов сужения являются числа  $\lambda_k$ , а отвечающими им собственными векторами – векторы  $\mu^{(k)}$ , где  $k = 1, 2, 3$ . Точнее, собственные векторы являются столбцами соответствующих подматриц третьего порядка матрицы  $M$ , а именно

$$M_1 = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & \mu_2^{(1)} & \mu_2^{(2)} & \mu_2^{(3)} \\ * & \mu_3^{(1)} & \mu_3^{(2)} & \mu_3^{(3)} \\ * & \mu_4^{(1)} & \mu_4^{(2)} & \mu_4^{(3)} \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} * & \mu_1^{(1)} & \mu_1^{(2)} & \mu_1^{(3)} \\ * & * & * & * \\ * & \mu_3^{(1)} & \mu_3^{(2)} & \mu_3^{(3)} \\ * & \mu_4^{(1)} & \mu_4^{(2)} & \mu_4^{(3)} \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} * & \mu_1^{(1)} & \mu_1^{(2)} & \mu_1^{(3)} \\ * & \mu_2^{(1)} & \mu_2^{(2)} & \mu_2^{(3)} \\ * & * & * & * \\ * & \mu_4^{(1)} & \mu_4^{(2)} & \mu_4^{(3)} \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} * & \mu_1^{(1)} & \mu_1^{(2)} & \mu_1^{(3)} \\ * & \mu_2^{(1)} & \mu_2^{(2)} & \mu_2^{(3)} \\ * & \mu_3^{(1)} & \mu_3^{(2)} & \mu_3^{(3)} \\ * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Справедливы равенства  $A_l M_l = M_l \Lambda$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$ ,  $\Lambda = \text{diag} [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]$ , из которых следует в частности, что матрицы  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и  $A_4$  связаны попарно преобразованиями подобия. Разностную схему

$$\frac{y_{n+1}^{(1)} - y_n^{(1)}}{\tau} + \sigma A_1 y_{n+1}^{(1)} + (1 - \sigma) A_1 y_n^{(1)} = 0, \text{ где } y_n^{(1)} = \begin{pmatrix} y_2^n \\ y_3^n \\ y_4^n \end{pmatrix}, \quad y_0^{(1)} \text{ задан} \quad (16)$$

назовем *сужением разностной схемы (1) на подпространство  $H_1$* . Обозначим через  $s_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) собственные значения оператора перехода  $S_1 = E - \tau(E + \sigma \tau A_1)^{-1} A_1$  схемы (16).

Пусть в  $H_1$  задан самосопряженный положительный оператор  $D_1$ . По аналогии с (2) назовем разностную схему (1) *устойчивой в подпространстве  $H_{1,D_1}$* , если при любых  $y_0^{(1)} \in H_1$  для решения задачи (16) выполняются оценки

$$(D_1 y_{n+1}^{(1)}, y_{n+1}^{(1)})_1 \leq (D_1 y_n^{(1)}, y_n^{(1)})_1, \quad n = 0, 1, \dots$$

Имеет место следующая связь между спектральной устойчивостью и устойчивостью в подпространстве.

**Теорема 1.** *Если схема (1) устойчива в каком-либо подпространстве  $H_{1,D_1}$ , то для  $k = 1, 2, 3$  справедливы неравенства  $|s_k| \leq 1$ . Обратно, если выполнены указанные неравенства, то схема (1) устойчива в подпространстве  $H_{1,D_1}$ , где  $D_1 = (hM_1 M_1^*)^{-1}$ .*

Доказательство то же самое, что и для теоремы 13.1 из [2, с. 219]. Аналогичные определения и теоремы имеют место и в случаях подпространств  $H_2$ ,  $H_3$  и  $H_4$ .

### 5. Оценки операторов нормы.

Остановимся на вопросе о построении и оценках вида (3) оператора нормы  $D_1$ . По заданной матрице  $M_1$  найдем матрицу сопряженного оператора,

$$M_1^* = R_1^{-1} \bar{M}_1^T R_1 = \begin{bmatrix} \mu_2^{(1)} & \mu_2^{(2)} & 0,5\mu_2^{(3)} \\ \mu_3^{(1)} & \mu_3^{(2)} & 0,5\mu_3^{(3)} \\ 2\mu_4^{(1)} & 2\mu_4^{(2)} & \mu_4^{(3)} \end{bmatrix}, \text{ где } R_1 = h \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Согласно теореме 1, оператор нормы определяется как  $D_1 = (hM_1 M_1^*)^{-1}$ . При этом схема (1) будет устойчива в подпространстве  $H_{1,D_1}$  тогда и только тогда, когда выполнены неравенства (12).

Столбцы матрицы  $M_1$  являются собственными векторами оператора  $A_1$ , отвечающими собственным значениям  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  соответственно. Следовательно, любой вектор  $y^{(1)} = (y_2 \ y_3 \ y_4)^T \in H_1$  можно единственным образом представить в виде разложения

$$y^{(1)} = c_1 \mu^{(1)} + c_2 \mu^{(2)} + c_3 \mu^{(3)}, \quad \mu^{(k)} = \begin{pmatrix} \mu_2^{(k)} \\ \mu_3^{(k)} \\ \mu_4^{(k)} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (17)$$

Наряду с  $M_1$  будем рассматривать матрицу  $V_1 = R_1^{-1} (M_1^T)^{-1} = [v^{(1)} \ v^{(2)} \ v^{(3)}]$ , столбцы которой составляют систему векторов, биортонормированную по отношению к системе  $\{\mu^{(l)}\}_{l=1}^3$ . Заметим, что построенная таким образом матрица  $V_1$  не является какой-либо подматрицей матрицы  $V$ .

Коэффициенты разложения (17) определяются формулами  $c_k = (y^{(1)}, v^{(k)})_1$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Справедливо аналогичное (10) равенство

$$h^{-1} (c, c)_1 = |c_1|^2 + |c_2|^2 + 0,5 |c_3|^2 = (D_1 y^{(1)}, y^{(1)})_1, \quad D_1 = (hM_1 M_1^*)^{-1}. \quad (18)$$

**Теорема 2.** *Для оператора  $D_1 = (hM_1 M_1^*)^{-1}$  и любого  $y^{(1)} = (y_2 \ y_3 \ y_4)^T \in H_1$  справедливы оценки*

$$\alpha_0 (y^{(1)}, y^{(1)})_1 \leq (D_1 y^{(1)}, y^{(1)})_1 \leq \alpha_1 (y^{(1)}, y^{(1)})_1, \quad (19)$$

где

$$\alpha_0 = \left( \|\mu^{(1)}\|_1^2 + \|\mu^{(2)}\|_1^2 + 2\|\mu^{(3)}\|_1^2 \right)^{-1}, \quad \|\mu^{(k)}\|_1^2 = \left( \mu^{(k)}, \mu^{(k)} \right)_1,$$

$$\alpha_1 = \|\nu^{(1)}\|_1^2 + \|\nu^{(2)}\|_1^2 + 0,5\|\nu^{(3)}\|_1^2, \quad \|\nu^{(k)}\|_1^2 = \left( \nu^{(k)}, \nu^{(k)} \right)_1.$$

**Доказательство.** Согласно (18), предстоит оценить сверху и снизу сумму  $h^{-1}(c, c]_1$ . Оценка сверху получается непосредственно:

$$h^{-1}(c, c]_1 = \left| (y^{(1)}, y^{(1)})_1 \right|^2 + \left| (y^{(2)}, y^{(1)})_1 \right|^2 + 0,5 \left| (y^{(3)}, y^{(1)})_1 \right|^2 \leq$$

$$\leq \left( \|\nu^{(1)}\|_1^2 + \|\nu^{(2)}\|_1^2 + 0,5\|\nu^{(3)}\|_1^2 \right) \|\mu^{(1)}\|_1^2.$$

Для оценки снизу рассмотрим разложения

$$y^{(1)} = c_1\mu^{(1)} + c_2\mu^{(2)} + c_3\mu^{(3)} = d_1\nu^{(1)} + d_2\nu^{(2)} + d_3\nu^{(3)}.$$

Из биортогональности систем  $\{\mu^{(l)}\}$  и  $\{\nu^{(k)}\}$  следует, что  $(y^{(1)}, y^{(1)})_1 = c_1\bar{d}_1 + c_2\bar{d}_2 + c_3\bar{d}_3$ . Поэтому справедлива оценка

$$\left( y^{(1)}, y^{(1)} \right)_1 = c_1\bar{d}_1 + c_2\bar{d}_2 + \left( \frac{c_3}{\sqrt{2}} \right) \left( \sqrt{2}\bar{d}_3 \right) = h^{-1}(\tilde{c}, \tilde{d}) \leq h^{-1} \|\tilde{c}\| \|\tilde{d}\|,$$

где  $\tilde{c} = (c_1 \ c_2 \ c_3/\sqrt{2})^T$ ,  $\tilde{d} = (d_1 \ d_2 \ \sqrt{2}d_3)^T$ . Заметим, что

$$\|\tilde{c}\|^2 = h \left( |c_1|^2 + |c_2|^2 + 0,5|c_3|^2 \right) = (c, c]_1, \quad \|\tilde{d}\|^2 = h \left( |d_1|^2 + |d_2|^2 + 2|d_3|^2 \right) \quad (20)$$

Возведем в квадрат неравенство  $(y^{(1)}, y^{(1)})_1 \leq h^{-1} \|\tilde{c}\| \|\tilde{d}\|$  и перепишем его в виде

$$\left( y^{(1)}, y^{(1)} \right)_1^2 \leq h^{-2} (c, c]_1 \|\tilde{d}\|^2. \quad (21)$$

Второе из равенств (20) приводит к оценке

$$\|\tilde{d}\|^2 = h \left( \left| (y^{(1)}, \mu^{(1)})_1 \right|^2 + \left| (y^{(1)}, \mu^{(2)})_1 \right|^2 + 2 \left| (y^{(1)}, \mu^{(3)})_1 \right|^2 \right) \leq$$

$$\leq h \left( \|\mu^{(1)}\|_1^2 + \|\mu^{(2)}\|_1^2 + 2\|\mu^{(3)}\|_1^2 \right) \left( y^{(1)}, y^{(1)} \right)_1.$$

Итак,  $\|\tilde{d}\|^2 \leq \beta_1 (y^{(1)}, y^{(1)})_1$ , где  $\beta_1 = h \left( \|\mu^{(1)}\|_1^2 + \|\mu^{(2)}\|_1^2 + 2\|\mu^{(3)}\|_1^2 \right)$ . Отсюда и из (21) получаем, что  $(y^{(1)}, y^{(1)})_1^2 \leq h^{-2} \beta_1 (c, c]_1 (y^{(1)}, y^{(1)})_1$  и, следовательно,

$$h^{-1}(c, c]_1 \geq \beta_1^{-1} h (y^{(1)}, y^{(1)})_1 = \alpha_0 (y^{(1)}, y^{(1)})_1.$$

Теорема 2 доказана.

Перечислим оценки, аналогичные (19) в других подпространствах.

**Подпространство  $H_2$ .** Вводятся матрицы

$$M_2 = \left[ \begin{array}{ccc} \mu^{(1)} & \mu^{(2)} & \mu^{(3)} \end{array} \right], \quad \mu^{(k)} = \begin{bmatrix} \mu_1^{(k)} \\ \mu_3^{(k)} \\ \mu_4^{(k)} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$V_2 = (M_2^T R_2)^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc} \nu^{(1)} & \nu^{(2)} & \nu^{(3)} \end{array} \right], \quad R_2 = h \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Для оператора  $D_2 = (hM_2M_2^*)^{-1}$  и любого  $y^{(2)} = (y_1 \ y_3 \ y_4)^T \in H_2$  справедливы оценки

$$\alpha_0 \left( y^{(2)}, y^{(2)} \right)_2 \leq \left( D_2 y^{(2)}, y^{(2)} \right)_2 \leq \alpha_1 \left( y^{(2)}, y^{(2)} \right)_2,$$

где  $(y^{(2)}, v)_2 = h(y_1 \bar{v}_1 + y_3 \bar{v}_3 + 0,5y_4 \bar{v}_4)$  и

$$\alpha_0 = \left( \|\mu^{(1)}\|_2^2 + \|\mu^{(2)}\|_2^2 + 2\|\mu^{(3)}\|_2^2 \right)^{-1}, \quad \alpha_1 = \|v^{(1)}\|_2^2 + \|v^{(2)}\|_2^2 + 0,5\|v^{(3)}\|_2^2.$$

**Подпространство  $H_3$ .** Положим

$$M_3 = [ \mu^{(1)} \quad \mu^{(2)} \quad \mu^{(3)} ], \quad \mu^{(k)} = \begin{bmatrix} \mu_1^{(k)} \\ \mu_2^{(k)} \\ \mu_4^{(k)} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$V_3 = (\bar{M}_3^T R_3)^{-1} = [ v^{(1)} \quad v^{(2)} \quad v^{(3)} ], \quad R_3 = h \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Для оператора  $D_3 = (hM_3M_3^*)^{-1}$  и любого  $y^{(3)} = (y_1 \ y_2 \ y_4)^T \in H_3$  справедливы оценки

$$\alpha_0 \left( y^{(3)}, y^{(3)} \right)_3 \leq \left( D_3 y^{(3)}, y^{(3)} \right)_3 \leq \alpha_1 \left( y^{(3)}, y^{(3)} \right)_3,$$

где  $(y^{(3)}, v)_3 = h(y_1 \bar{v}_1 + y_2 \bar{v}_2 + 0,5y_4 \bar{v}_4)$  и

$$\alpha_0 = \left( \|\mu^{(1)}\|_3^2 + \|\mu^{(2)}\|_3^2 + 2\|\mu^{(3)}\|_3^2 \right)^{-1}, \quad \alpha_1 = \|v^{(1)}\|_3^2 + \|v^{(2)}\|_3^2 + 0,5\|v^{(3)}\|_3^2.$$

**Подпространство  $H_4$ .** В данном случае

$$M_4 = [ \mu^{(1)} \quad \mu^{(2)} \quad \mu^{(3)} ], \quad \mu^{(k)} = \begin{bmatrix} \mu_1^{(k)} \\ \mu_2^{(k)} \\ \mu_3^{(k)} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$V_4 = (h\bar{M}_4^T)^{-1} = [ v^{(1)} \quad v^{(2)} \quad v^{(3)} ].$$

Для оператора  $D_4 = (hM_4M_4^*)^{-1}$  и любого  $y^{(4)} = (y_1 \ y_2 \ y_3)^T \in H_4$  справедливы оценки

$$\alpha_0 \left( y^{(4)}, y^{(4)} \right)_4 \leq \left( D_4 y^{(4)}, y^{(4)} \right)_4 \leq \alpha_1 \left( y^{(4)}, y^{(4)} \right)_4,$$

где  $(y^{(4)}, v)_4 = h(y_1 \bar{v}_1 + y_2 \bar{v}_2 + y_3 \bar{v}_3)$ ,  $\|y^{(4)}\|_4^2 = (y^{(4)}, y^{(4)})_4$  и

$$\alpha_0 = \left( \|\mu^{(1)}\|_4^2 + \|\mu^{(2)}\|_4^2 + \|\mu^{(3)}\|_4^2 \right)^{-1}, \quad \alpha_1 = \|v^{(1)}\|_4^2 + \|v^{(2)}\|_4^2 + \|v^{(3)}\|_4^2.$$

## 6. Численные результаты.

Целью расчетов было выяснение границ спектра матриц  $D$  и  $D_l$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$  и их чисел обусловленности. Кроме того, прослеживалась точность теоретических оценок  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  границ спектра в зависимости от величины  $\gamma$ . Далее везде  $N = 4$ ,  $h = 1/4$ ,  $\lambda_{\min}(D_l)$  и  $\lambda_{\max}(D_l)$  – соответственно наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы  $D_l$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$ . Константы  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  введены для каждого подпространства в разделе 5. По смыслу оценок при каждом значении  $\gamma > 1$  должны выполняться неравенства

$$0 < \alpha_0 \leq \lambda_{\min}(D_l) < \lambda_{\max}(D_l) \leq \alpha_1, \quad l = 1, 2, 3, 4.$$

Разности  $\lambda_{\min}(D_l) - \alpha_0$  и  $\alpha_1 - \lambda_{\max}(D_l)$  характеризуют точность теоретических оценок наименьшего и наибольшего собственных значений. Через  $\text{cond}_2(D_l)$  обозначено число обусловленности  $\lambda_{\max}(D_l)/\lambda_{\min}(D_l)$  матрицы  $D_l$ . В теоретических оценках  $\text{cond}_2(D_l)$  заменяется отношением  $\alpha_1/\alpha_0$ . Как правило, получаем завышенные оценки, то есть  $\alpha_1/\alpha_0 > \text{cond}_2(D_l)$ .

В следующей таблице приведены данные, относящиеся ко всему пространству  $H$ , когда оператор  $D$  определен согласно (10).

$\gamma$	Пространство $H$		
	2	10	100
$\alpha_0$	0.188	0.01	$1.389 \cdot 10^{-4}$
$\lambda_{\min}(D)$	0.396	0.016	$1.589 \cdot 10^{-4}$
$\lambda_{\max}(D)$	2.448	0.791	0.248
$\alpha_1$	5.024	1.036	0.267
$\text{cond}_2(D)$	6.243	51.005	$1.562 \cdot 10^3$
$\alpha_1/\alpha_0$	26.689	100.059	$1.919 \cdot 10^3$

Видно, что с ростом  $\gamma$

- Минимальное собственное значение быстро убывает,
- Максимальное собственное значение также убывает, но гораздо медленнее,
- Число обусловленности быстро возрастает,
- Отношение  $\alpha_1/\alpha_0$  приближается сверху к  $\text{cond}_2(D)$ .

В следующих таблицах приведены аналогичные данные относящиеся к операторам в подпространствах. В этих таблицах сохраняем, как правило, одну значащую цифру.

Подпространство $H_1$				Подпространство $H_2$			
$\gamma$	2	10	100	$\gamma$	2	10	100
$\alpha_0$	0.3	0.01	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$\alpha_0$	0.3	0.01	$1.8 \cdot 10^{-4}$
$\lambda_{\min}(D_1)$	0.4	0.02	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$\lambda_{\min}(D_2)$	0.4	0.02	$1.9 \cdot 10^{-4}$
$\lambda_{\max}(D_1)$	2.9	0.4	0.03	$\lambda_{\max}(D_2)$	5.7	1.4	0.4
$\alpha_1$	4.3	0.4	0.03	$\alpha_1$	6.9	1.5	0.4
$\text{cond}_2(D_1)$	7.4	21.6	164.2	$\text{cond}_2(D_2)$	14.8	82.1	$2.2 \cdot 10^3$
$\alpha_1/\alpha_0$	16.4	34.0	192.3	$\alpha_1/\alpha_0$	27.2	108.1	$2.4 \cdot 10^3$

Подпространство $H_3$				Подпространство $H_4$			
$\gamma$	2	10	100	$\gamma$	2	10	100
$\alpha_0$	0.4	0.02	$2 \cdot 10^{-4}$	$\alpha_0$	0.4	0.05	$1.8 \cdot 10^{-3}$
$\lambda_{\min}(D_3)$	0.6	0.02	$2 \cdot 10^{-4}$	$\lambda_{\min}(D_4)$	0.5	0.06	$1.9 \cdot 10^{-3}$
$\lambda_{\max}(D_3)$	2.4	1.3	0.5	$\lambda_{\max}(D_4)$	9.1	2.0	0.6
$\alpha_1$	4.6	1.5	0.5	$\alpha_1$	11.9	2.4	0.6
$\text{cond}_2(D_3)$	3.8	62.4	$2.5 \cdot 10^3$	$\text{cond}_2(D_4)$	17.3	35.2	309.1
$\alpha_1/\alpha_0$	12.0	82.0	$2.6 \cdot 10^3$	$\alpha_1/\alpha_0$	29.2	50.5	347.6

Для каждого из подпространств справедливы те же самые выводы относительно зависимости рассматриваемых характеристик от  $\gamma$ , что и в случае всего пространства. Кроме того, отметим, что при каждом рассмотренном  $\gamma$  переход в подпространство увеличивает минимальное собственное значение оператора нормы, то есть  $\lambda_{\min}(D_l) > \lambda_{\min}(D)$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$ .

В следующей таблице для каждого из подпространств приведена зависимость чисел обусловленности оператора нормы от параметра  $\gamma > 1$ .

$\gamma/D$	$\text{cond}_2(D)$	$\text{cond}_2(D_1)$	$\text{cond}_2(D_2)$	$\text{cond}_2(D_3)$	$\text{cond}_2(D_4)$
2	6.243	7.372	14.797	<u>3.771</u>	17.345
10	51.005	<u>21.559</u>	82.057	62.399	35.217
100	1562	<u>164.179</u>	2226	2508	309.123

В каждой строке подчеркнуто наименьшее число обусловленности. Видно, что числа обусловленности зависят от выбора оператора  $D_1$ , причем для  $\gamma \geq 10$  наилучшим в смысле обусловленности является оператор  $D_1$ . Для тех же  $\gamma$  переход к подпространству уменьшает число обусловленности.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989. — 616 с.
2. Гулин А.В., Ионкин Н.И., Морозова В.А. Разностные схемы для нестационарных нелокальных задач. — М: Издательский отдел факультета ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2010.
3. Ионкин Н.И. Задача для уравнения теплопроводности с неклассическим (нелокальным) краевым условием. Будапешт, 1979 (Препринт / Numerikus Modzerek: 14).
4. Гулин А.В. О спектральной устойчивости в подпространствах разностных схем с нелокальными граничными условиями // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т 49, № 7. — С. 844–852.
5. Гулин А.В. Устойчивость нелокальных разностных схем в подпространстве // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 7. — С. 956–965.

### REFERENCES

1. Samarskii A.A. The theory of difference themes. — New York-Basel: Marcel Dekker, Inc, 2001. — 761 p.
2. Gulín A.V., Ionkin N.I., Morozova V.A. Difference schemes with nonstationary nonlocal problems [Raznostnyye skhemy dlya nestatsionarnykh nelokal'nykh zadach]. — Moscow: Izd. otdel fakul'teta VMK MGU, 2010. (in Russian)
3. Ionkin N.I. A Problem for the Heat Equation with a Nonclassical (Nonlocal) Boundary Condition. — Preprint Numerikus Modszerek, Budapest, 1979, no. 14.
4. Gulín A.V. On the spectral stability in subspaces for difference schemes with nonlocal boundary conditions // Differential Equations. — 2013. — V. 49. № 7. — P. 815–823.
5. Gulín A.V. Stability of nonlocal difference schemes in a subspace // Differential Equations. — 2012. — V. 48, № 7. — P. 940–949.