УДК 539.3, 629.7.01

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ О ГЕНЕРАЦИИ МОНОГАРМОНИЧЕСКИХ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ЗАМКНУТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ОТВЕРСТИЕМ[1)]

В.Н. ПАЙМУШИН[1,2], Р.К. ГАЗИЗУЛЛИН[2], И. ГЮНАЛ[3]

[1] *Казанский (Приволжский) федеральный университет,*
[2] *Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева (КНИТУ-КАИ),* [3] *ООО «Онук», Стамбул, Турция*
E-mail vpajmushin@mail.ru; gazizullin.rk@yandex.ru

NUMERICAL SOLUTION OF A PLANE PROBLEM OF MONOHARMONIC SOUND WAVE GENERATION IN RECTANGULAR AREA WITH APERTURE

V.N. PAIMUSHIN[1,2], R.K. GAZIZULLIN[2], I. GUNAL[3]

[1] *Kazan Federal University,* [2] *Kazan National Research Technical Tupolev University,*
[3] *Onuk A. Ş., Istanbul, Turkey*

Аннотация

Дано численное решение плоской задачи о генерации моногармонической звуковой волны в прямоугольной области. Решение данной задачи необходимо для математического моделирования экспериментального определения звукоизолирующих свойств тонкостенных элементов конструкций методом смежных реверберационных камер в акустических испытательных лабораториях. Оно является одной из частей численного решения плоской задачи о прохождении звуковой волны сквозь тонкую деформируемую пластину. На основе использования волновых уравнений в двумерном приближении предложен метод нахождения параметров падающей звуковой волны основанный на комбинированном использовании методов конечных разностей и конечных сумм. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: Волновое уравнение, звуковая волна, численный метод, теоретические исследования.

Summary

This paper gives a numerical solution to the plane problem of monoharmonic sound wave generation in rectangular area. The problem solution is essential when modeling the experimental determination of sound-insulating properties of thin-walled structures in acoustic laboratories using adjacent reverberation chambers method. The solution is also relevant as it is one of the parts of a numerical solution to the plane problem of sound wave penetration through a deformable thin plate. The suggested method for finding the incident wave parameters is based on two-dimensional approximation of wave equations and combines finite difference and finite sum methods. In addition, numerical research results are put forward.

Key words: Wave equation, acoustic wave, numerical method, theoretical investigation.

Введение

Экспериментальное определение звукоизоляционных свойств тонкостенных элементов конструкций в соответствии с ГОСТ 26602.3-99 и СНиП 23-03-2003 (Защита от шума. — М., 2011) проводят в специальных акустических испытательных лабораториях. Такие лаборатории реверберационного типа состоят

[1)] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-19-00667) и за счёт средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

из двух смежных по горизонтали помещений (камер высокого и низкого уровней давления), в проем между которыми монтируют испытываемый образец. В камере высокого давления источником звука формируется моногармоническая звуковая волна, которая, взаимодействуя с испытываемым образцом, вызывает в нем установившиеся незатухающие колебания, формирующие в камере низкого давления излученные образцом звуковые волны. Разностью давлений, установившихся в камерах, и характеризуются звукоизоляционные свойства испытываемого образца. Для теоретического определения этих свойств и математического моделирования испытаний в статье (см. [1]) были рассмотрены две постановки соответствующей задачи, отличающиеся способом формирования звуковой волны в камере высокого давления. В ней с целью качественного изучения рассматриваемых процессов решения сформулированных задач были получены лишь в первом приближении, соответствующем разложению неизвестных задачи в ряды Фурье и удержанию в них нулевых гармоник. В развитие результатов проведенных ранее исследований (см. [1,4,5]) ниже рассматривается одна из предложенных (см. [1]) постановок плоской задачи о прохождении звуковой волны сквозь деформируемую пластину, расположенную между двумя камерами. Разработан численный метод решения задачи предварительного определения параметров падающей на пластину звуковой волны.

1. Постановка задачи

Рассмотрим на плоскости $x0z$ прямоугольную область Ω, ограниченную координатными линиями $x = 0,\ x = B,\ z = 0$ и $z = -l$. Предполагаем, что в точках отрезка $\partial\Omega_p$ координатной линии $z = 0$, соответствующей $b \leqslant x \leqslant b + a$, имеется генератор звуковых волн, поддерживающий звуковое давление $p_0 = \tilde{p}e^{i\omega\tau}$ ($i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица), изменяющееся по времени τ по гармоническому закону с частотой ω, а $\tilde{p}$ считается известным амплитудным значением давления (в частности, его можно определить экспериментально). Остальные точки граничной линии $\partial\Omega$ являются точками отражателей. Поэтому для определения установившегося в области Ω поля звукового давления p и поля скоростей установившегося движения акустической среды $V_x,\ V_z$, связанных с потенциалом скоростей $\Phi(x,y)$ зависимостями (ρ — плотность среды, c — скорость звука в акустической среде)

$$p = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\tau},\ \ V_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x},\ \ V_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{1}$$

решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2},\ x,y \in \Omega \tag{2}$$

должно быть подчинено граничным условиям:

$$\text{при } x = 0,\ x = B:\ \ V_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0; \tag{3}$$

$$\text{при } z = 0,\ z = -l,\ \text{когда } x \notin \partial\Omega_p : V_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0; \tag{4}$$

$$\text{при } z = 0,\ \text{когда } x \in \partial\Omega_p:\ p_0 = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}. \tag{5}$$

Представим решение уравнения (2) в виде $\Phi = \tilde{\Phi}(x,z)\,e^{i\omega\tau}$. Тогда вместо (2) приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial z^2} + k^2\tilde{\Phi} = 0,\ \ k = \frac{\omega}{c}, \tag{6}$$

для которого граничные условия (3)–(5) запишутся в виде

$$\text{при } x = 0,\ x = B:\ \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x} = 0; \tag{7}$$

$$\text{при } z = -l:\ \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial z} = 0; \tag{8}$$

$$\text{при } z=0, \text{ когда } x \notin \partial\Omega_p: \ \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial z}=0; \tag{9}$$

$$\text{при } z=0, \text{ когда } x \in \partial\Omega_p: \ \tilde{\Phi}=i\frac{\tilde{p}_0}{\rho\omega}. \tag{10}$$

В направлении оси x введем в рассмотрение конечно-разностную сетку $x=x_s$, $s=0,\ldots,N+1$, с равномерным шагом h, так что $x_1=0$, $x_N=B$, сеточные функции и их производные

$$\tilde{\Phi}_s(z)=\tilde{\Phi}(x=x_s,z), \ \ \frac{d\tilde{\Phi}_s}{dz}=\left.\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial z}\right|_{x=x_s}, \ \ \frac{d^2\tilde{\Phi}_s}{dz^2}=\left.\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial z^2}\right|_{x=x_s}, \tag{11}$$

а также конечно-разностные аппроксимации производных

$$\left.\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x}\right|_{x=x_s}=\frac{\tilde{\Phi}_{s+1}-\tilde{\Phi}_{s-1}}{2h}, \ \left.\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial x^2}\right|_{x=x_s}=\frac{\tilde{\Phi}_{s-1}-2\tilde{\Phi}_s+\tilde{\Phi}_{s+1}}{h^2}. \tag{12}$$

Тогда при использовании (11) и (12) граничные условия (7) приводят к равенствам

$$\tilde{\Phi}_0=\tilde{\Phi}_2, \ \ \tilde{\Phi}_{N+1}=\tilde{\Phi}_{N-1}, \tag{13}$$

при учете которых уравнение (6) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений метода прямых

$$\begin{gathered}
\frac{d^2\tilde{\Phi}_1}{dz^2}+\frac{2}{h^2}\left(\tilde{\Phi}_2-\Phi_1\right)+k^2\tilde{\Phi}_1=0,\\
\frac{d^2\tilde{\Phi}_s}{dz^2}+\frac{1}{h^2}\left(\tilde{\Phi}_{s-1}-2\tilde{\Phi}_s+\tilde{\Phi}_{s+1}\right)+k^2\tilde{\Phi}_s=0; \ \ s=2,\ldots,N-1,\\
\frac{d^2\tilde{\Phi}_N}{dz^2}+\frac{2}{h^2}\left(\tilde{\Phi}_{N-1}-\tilde{\Phi}_N\right)+k^2\tilde{\Phi}_N=0.
\end{gathered} \tag{14}$$

Для составленных уравнений (14) граничные условия (8), (10) запишутся в виде

$$z=-l: \quad \frac{d\tilde{\Phi}_s}{dz}=0, \tag{15}$$

а граничные условия (9), (10) запишем в комбинированной форме

$$(1-r_s)\left.\frac{d\tilde{\Phi}_s}{dz}\right|_{z=0}+r_s\left(\left.\tilde{\Phi}_s\right|_{z=0}-\frac{ip_0}{\rho\omega}\right)=0, \tag{16}$$

где r_s, $s=1,\ldots,N$, принимают значения <0>, если в узлах конечно-разностной сетки, принадлежащих жесткому отражателю (стенке), выполняется кинематическое граничное условие (9), а в остальных узлах, в которых выполняются условия (10), $r_s=1$.

Если ввести обозначения для постоянных интегрирования $\left.\tilde{\Phi}_s\right|_{z=0}=\Phi_{s,0}$, $s\in 1,\ldots,N$, то для вычисления сеточных функций $\tilde{\Phi}_s(z)$ можно составить соотношение

$$\tilde{\Phi}_s(z)=\tilde{\Phi}_{s,0}+\int\limits_0^z\frac{d\tilde{\Phi}_s}{dz}dz, \ \ s\in 1,\ldots,N. \tag{17}$$

Интегрируя уравнения (14) от z до $z=-l$ и удовлетворяя граничным условиям (15), при использовании (17) приходим к системе N интегро-алгебраических уравнений вида

$$
\begin{gathered}
-\frac{d\tilde{\Phi}_1}{dz}+\frac{2}{h^2}\int\limits_z^{-l}\int\limits_0^z\frac{d\tilde{\Phi}_2}{dz}dzdz-\frac{2\,(l+z)}{h^2}\tilde{\Phi}_{2,0}+\\
+\left(k^2-\frac{2}{h^2}\right)\int\limits_z^{-l}\int\limits_0^z\frac{d\tilde{\Phi}_1}{dz}dzdz-(l+z)\left(k^2-\frac{2}{h^2}\right)\tilde{\Phi}_{1,0}=0,\\
-\frac{d\tilde{\Phi}_s}{dz}+\frac{1}{h^2}\int\limits_z^{-l}\int\limits_0^z\frac{d\tilde{\Phi}_{s-1}}{dz}dzdz-\frac{(l+z)}{h^2}\tilde{\Phi}_{s-1,0}+\\
+\left(k^2-\frac{2}{h^2}\right)\int\limits_z^{-l}\int\limits_0^z\frac{d\tilde{\Phi}_s}{dz}dzdz-\frac{(l+z)}{h^2}\tilde{\Phi}_{s,0}+\\
+\frac{1}{h^2}\int\limits_z^{-l}\int\limits_0^z\frac{d\tilde{\Phi}_{s+1}}{dz}dzdz-\frac{(l+z)}{h^2}\tilde{\Phi}_{s+1,0}=0;\;\; s=2,\ldots,N-1,\\
-\frac{d\tilde{\Phi}_N}{dz}+\frac{2}{h^2}\int\limits_z^{-l}\int\limits_0^z\frac{d\tilde{\Phi}_{N-1}}{dz}dzdz-\frac{2\,(l+z)}{h^2}\tilde{\Phi}_{N-1,0}+\\
+\left(k^2-\frac{2}{h^2}\right)\int\limits_z^{-l}\int\limits_0^z\frac{d\tilde{\Phi}_N}{dz}dzdz-(l+z)\left(k^2-\frac{2}{h^2}\right)\tilde{\Phi}_{N,0}=0,
\end{gathered}
\tag{18}
$$

в которых неизвестными являются величины $d\tilde{\Phi}_s/dz$ и $\tilde{\Phi}_{s,0}, s=1,\ldots,N$. Для замыкания этой системы уравнений к ним необходимо добавить граничные условия (16), которые относительно указанных неизвестных запишутся в виде

$$
(1-r_s)\,\delta\,(0)\,\frac{d\tilde{\Phi}_s}{dz}+r_s\left(\tilde{\Phi}_{s,0}-\frac{ip_0}{\rho\omega}\right)=0;\;\; s=1,\ldots,N,
\tag{19}
$$

где $\delta\,(0)$ − дельта-функция Дирака, равная $\delta\,(0)=1$ при $z=0$ и $\delta\,(0)=0$ при $z<0$.

В направлении оси z выберем сетку Δ, где $\Delta\,:\,\{1,\ldots,j,\ldots,K\}$, введем векторы неизвестных $\left\{d\tilde{\Phi}_s/dz\right\}$ и интегрирующие матрицы (см. [2, 3]) $[J_1]\,,[J_2]$, являющиеся матричными аналогами интегральных операторов

$$
I_1\,(\cdots)=\int\limits_0^z(\cdots)\,dz,\;\; I_2\,(\cdots)=\int\limits_z^{-l}(\cdots)\,dz.
\tag{20}
$$

В результате вместо уравнений (18), (20) приходим к системе алгебраических уравнений следующего вида

$$[A]\{d\tilde{\Phi}_1\} + 2[B]\{d\tilde{\Phi}_2\} + \{C\}\tilde{\Phi}_{1,0} + 2\{D\}\tilde{\Phi}_{2,0} = \{0\},$$

$$(1-r_1)\lfloor E\rfloor\{d\tilde{\Phi}_1\} + r_1\tilde{\Phi}_{1,0} = r_1\frac{ip_0}{\rho\omega},$$

$$[B]\{d\tilde{\Phi}_{s-1}\} + [A]\{d\tilde{\Phi}_s\} + [B]\{d\tilde{\Phi}_{s+1}\} + \{D\}\tilde{\Phi}_{s-1,0} +$$

$$+\{C\}\tilde{\Phi}_{s,0} + \{D\}\tilde{\Phi}_{s+1,0} = \{0\}, \tag{21}$$

$$(1-r_s)\lfloor E\rfloor\{d\tilde{\Phi}_s\} + r_s\tilde{\Phi}_{s,0} = r_s\frac{ip_0}{\rho\omega},$$

$$2[B]\{d\tilde{\Phi}_{N-1}\} + [A]\{d\tilde{\Phi}_N\} + 2\{D\}\tilde{\Phi}_{N-1,0} + \{C\}\tilde{\Phi}_{N,0} = \{0\},$$

$$(1-r_N)\lfloor E\rfloor\{d\tilde{\Phi}_N\} + r_N\tilde{\Phi}_{N,0} = r_N\frac{ip_0}{\rho\omega},$$

где

$$[A] = \left(k^2 - \frac{2}{h^2}\right)[J_2][J_1] - \lceil E\rfloor;\ [A]\in R(K,K),$$

$$[B] = \frac{1}{h^2}[J_2][J_1];\ \ [B]\in R(K,K),$$

$$\{C\} = -\left(k^2 - \frac{2}{h^2}\right)(l\{E\} + \{Z\});\ \ \{C\},\{E\},\{Z\}\in R(1,K), \tag{22}$$

$$\{D\} = -\frac{1}{h^2}(l\{E\} + \{Z\});\ \ \{D\}\in R(1,K).$$

и в них $\lfloor E\rfloor$ − строка вида $\{1,0,0,\ldots,0\}$; $\{E\}$ и $\lceil E\rfloor$ − единичный вектор и единичная матрица; $\{Z\}$ − вектор с элементами $\{z_1,z_2,\ldots,z_K\}^T$.

2. Результаты численного решения.

На основе изложенного выше численного метода проведены теоретические расчеты для прямоугольной области, имеющей параметры $B = 5$ *м*, $l = 5$ *м*, $b = 2$ *м*, $a = 1$ *м*, заполненной воздухом ($c = 331$ *м/сек*, $\rho = 1.293$ *кг/м*^{3}) при различных значениях круговой частоты $\omega = 2\pi f$ звуковой волны. Амплитудное значение давления $\tilde{p}= 1$. На рис. 1 приведены значения потенциала скоростей Φ (первый столбец), а также скоростей установившегося движения акустической среды V_x, V_z (второй и третий столбцы, соответственно) при значениях $\omega = 50; 100; 208; 416; 500$ *Гц*.

3. Заключение.

Результаты численного исследования указывают на весьма сложный закон распределения потенциала скоростей и скоростей установившегося движения акустической среды в области. При этом наблюдается существенный разброс значения параметров. Также следует заметить, что частоте $\omega = 208$ *Гц* длина волны ($\lambda \approx 5$ *м*) совпадает с длиной помещения, в результате чего в комнате формируется стоячая звуковая волна, являющаяся характерным резонансным явлением. Аналогичное явление наблюдается при $\omega = 416$ *Гц*.

Немаловажно отметить, что для обеспечения сходимости численного решения при увеличении частоты требуется сгущать сетку.

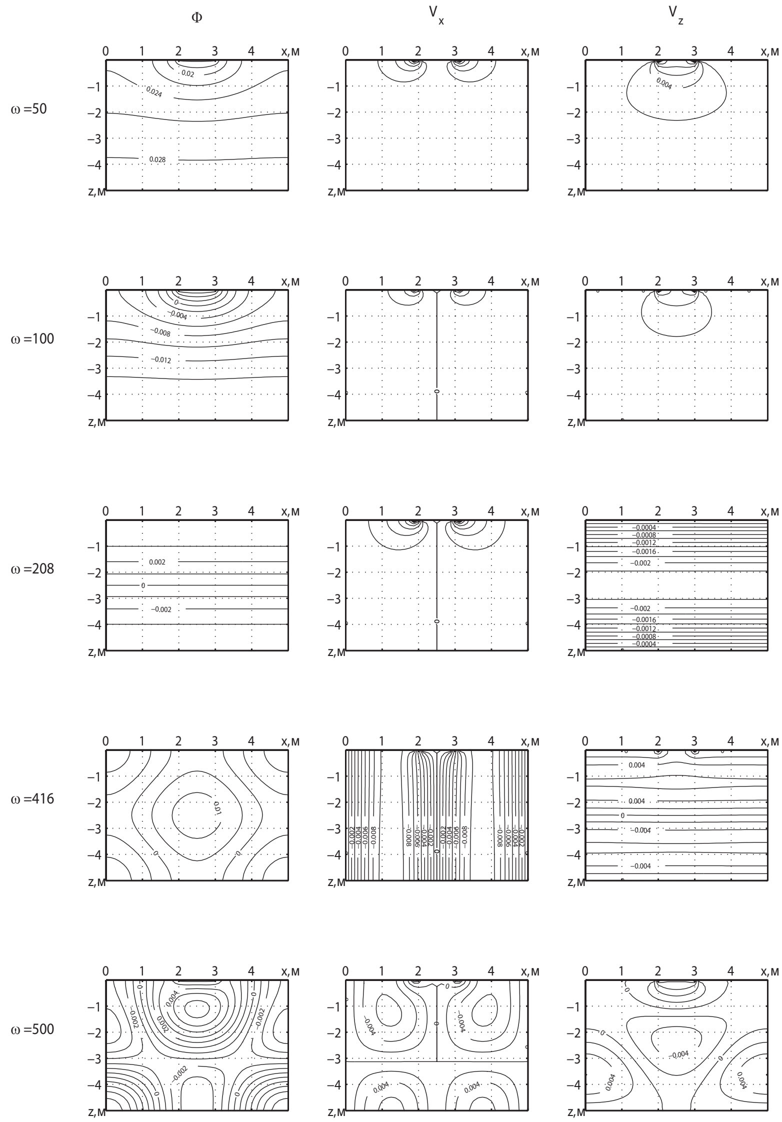

Рис. 1: Зависимости $\Phi(x,z)$, $V_x(x,z)$, $V_z(x,z)$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Паймушин В.Н., Газизуллин Р.К.** Исследование звукоизоляционных свойств абсолютно жесткой пластины, помещенной на деформируемых опорных элементах между двумя преградами // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. — 2013. — Т. 155, Кн. 3. — С. 126—141.
2. **Вахитов М.Б.** Интегрирующие матрицы — аппарат численного решения дифференциальных уравнений строительной механики // Изв ВУЗов. Авиационная техника. — 1966. — № 3. — С. 50—61.
3. **Даутов Р.З., Паймушин В.Н.** О методе интегрирующих матриц решения краевых задач для обыкновенных уравнений четвертого порядка// Изв ВУЗов. Математика — 1996. — № 10. — С. 13—25.
4. **Паймушин В.Н.** О задачах излучения звуковой волны при динамическом процессе деформирования пластин с учетом внешнего и внутреннего демпфирования// Мат. методи та ф_з.-мех. поля. — 2013. — Т. 56, № 2. — С. 72—85.

5. **Игумнов Л.А., Локтева Н.А., Паймушин В.Н., Тарлаковский Д.В.** Звукоизоляционные свойства одномерной трехслойной пластины// Мат. методи та ф_з.- мех. поля. – 2013. – Т. 56, № 2. – С. 86–93.

REFERENCES

1. **Paimushin V.N., Gazizullin R.K.** Study of the sound insulation properties of an absolutely rigid plate placed on deformable supporting elements between two obstacles [Issledovanie zvukoizoljatcionnykh svoistv absolyutno zhestkoi plastyny, pometshennoi na deformiruemykh opornykh elemenyakh mezhdu dvumja pregradami]// Kazan. Gos. Univ. Uchen. Zap. Ser. Fiz.-Mat. Nauki. – 2013. – V. 155, Book. 3. – P. 126–141. (in Russian)
2. **Vakhitov M.B.** Integrating matrix – the apparatus of the numerical solution of differential equations of structural mechanics [Integtirujushtie matritcy – apparat chislennogo reshenija differentcial'nylh uravnenii stroitel'noi mekhaniki]// Izv. Vuzov. – 1966. – № 3. – P. 50–61. (in Russian)
3. **Dautov R.Z., Paimushin V.N.** On the method of integrating matrices for the solution of boundary value problems for fourth-order ordinary equations // Russian Mathematics. – 1996. – V. 40, № 10. – P. 11–23.
4. **Paymushin V.N.** Sound wave radiation in the dynamic process of deformation plates with external and internal damping // Mathematical methods and physicomechanical fields. – 2013. – V. 56, № 2. – P. 72–85.
5. **Igumnov L.A., Lokteva N.A., Paimushin V.N., Tarlakovskiy D.V.** Sound insulation properties of one-dimensional three-layered plate // Mathematical methods and physic-mechanical fields. – 2013. – V. 56, № 2. – P. 86–93.