

УДК 517.958:539.3

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОГО НЕОДНОРОДНОГО ШАРА

С.Н. ТИМЕРГАЛИЕВ, Г.А. ЯКУПОВА

*Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского) федерального университета,
г. Набережные Челны*

E-mail: Samat-tim@mail.ru; vip.gulnara.1983@mail.ru

ON THE EXISTENCE OF SOLUTIONS OF THE SPATIAL NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ELASTIC INHOMOGENEOUS BALL

S.N. TIMERGALIEV, G.A. YAKUPOVA

The Naberezhnye Chelny Institute of Kazan Federal University

Аннотация

Изучается разрешимость нелинейных краевых задач трехмерной теории упругости для изотропного неоднородного шара при кинематических граничных условиях. Целью работы является доказательство теоремы существования решений. Метод исследования заключается в сведении исходной системы уравнений равновесия к системе трехмерных сингулярных интегральных уравнений, разрешимость которой устанавливается с использованием символа сингулярного оператора и принципа сжатых отображений.

Ключевые слова: Упругий изотропный неоднородный шар, уравнения равновесия, краевая задача, трехмерные сингулярные интегральные уравнения, символ сингулярного оператора, теорема существования.

Summary

The solvability of nonlinear boundary value problems of the theory of three-dimensional elasticity for isotropic inhomogeneous ball at the kinematic boundary conditions is studied. The aim is to prove the existence theorems of solutions. Method of study is to reduce the original system of equilibrium equations to a system of three-dimensional singular integral equations, the solvability of which is set with use of singular operator symbol and the principle of compressed representations.

Key words: Elastic isotropic inhomogeneous ball, equilibrium equations, boundary value problem, three-dimensional singular integral equations, singular operator symbol, existence theorem.

Введение

Работ, посвященных исследованию разрешимости пространственных краевых задач теории упругости, в настоящее время немного (см. [1–5] и цитированную в них литературу). Полученные в этих работах результаты касаются лишь линейных краевых задач. В [1, 2] при помощи вариационного метода исследованы линейные задачи для анизотропных упругих тел в энергетических пространствах. В [3] для изучения разрешимости краевых задач используются методы теории потенциала и интегральных уравнений, в основе которых лежат фундаментальные решения однородных уравнений равновесия. На сегодняшний день такие фундаментальные решения построены для уравнений с постоянными и с кусочно-постоянными коэффициентами, описывающих равновесное состояние изотропных однородных и кусочно-однородных упругих тел. Путем перехода от пространственных к плоским задачам в [4] исследованы линейные краевые задачи для изотропных и трансверсально-изотропных однородных тел специальной конфигурации.

Методы теории рядов составляют основу исследований в [5], с помощью которых рассмотрены краевые задачи для однородных изотропных шара и цилиндра. Настоящая работа посвящена исследованию нелинейных краевых задач для изотропного неоднородного упругого шара. Для этого предлагается метод, состоящий в сведении исходной системы уравнений равновесия к трехмерным сингулярным нелинейным интегральным уравнениям относительно вспомогательной вектор-функции. Основу метода составляют интегральные представления для компонент перемещений, опирающиеся на фундаментальные решения уравнения Лапласа. Такой подход в отличие от [3, 5] не требует знания частных решений исходной системы однородных уравнений и позволяет исследовать нелинейные краевые задачи для более широкого класса уравнений с переменными коэффициентами.

1. Постановка задачи.

В области V , занятой упругим телом, рассматривается система уравнений вида

$$\sigma_{,j}^{kj} + f_k + X_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (1)$$

(здесь и далее по повторяющимся латинским индексам ведется суммирование от 1 до 3), в которой приняты обозначения:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma^{j3}\omega_2 - \sigma^{j2}\omega_3), \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma^{j1}\omega_3 - \sigma^{j3}\omega_1), \quad f_3 = \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma^{j2}\omega_1 - \sigma^{j1}\omega_2); \\ \sigma^{jj} &= 2\mu\varepsilon_{jj} + \lambda\varepsilon, \quad \sigma^{jk} \equiv \sigma^{kj} = \mu\varepsilon_{jk}, \quad j \neq k; \quad \varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}; \\ \varepsilon_{jk} &= e_{jk} + \chi_{jk}, \quad e_{jj} = u_{j,j}, \quad e_{jk} = u_{j,k} + u_{k,j}, \quad \chi_{jj} = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_j^2)/2, \\ \chi_{jk} &= -\omega_j\omega_k, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, 2, 3; \quad \omega_1 = (u_{3,2} - u_{2,3})/2, \\ \omega_2 &= (u_{1,3} - u_{3,1})/2, \quad \omega_3 = (u_{2,1} - u_{1,2})/2; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}; \end{aligned} \quad (2)$$

здесь и далее символ $a_{,j}$ означает частную производную $a_{,j} = \partial a / \partial x_j$.

Система уравнений (1) совместно с соотношениями (2) описывает состояние равновесия упругого изотропного неоднородного тела [6, с. 83–84]. При этом: σ^{kj} – компоненты напряжений, ε_{jk} – компоненты деформаций, $u = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор перемещений, $X_k (k = 1, 2, 3)$ – компоненты объемных внешних сил, действующих на упругое тело; μ – модуль упругости при сдвиге, λ – параметр Ляме, $E = E(x)$ – модуль упругости при растяжении, $\nu = \nu(x)$ – коэффициент Пуассона, $x = (x_1, x_2, x_3)$ – точка упругого тела.

Если в системе (1) напряжения и деформации заменить их выражениями из (2), то получим систему уравнений равновесия в перемещениях:

$$\Delta u_k + \theta_{,k}/(1-2\nu) + l_k(u) + g_k(u) + X_k/\mu = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} l_k(u) &= [\mu_{,k}e_{kk} + \mu_{,j}e_{kj} + \lambda_{,k}(e_{11} + e_{22} + e_{33})]/\mu, \\ g_k(u) &= \frac{1}{\mu}\{f_k(u) + \frac{\partial}{\partial x_k}[(\mu + \lambda)(\chi_{11} + \chi_{22} + \chi_{33})] + \frac{\partial}{\partial x_j}(\mu\chi_{jk})\}, \quad \theta = \operatorname{div} u; \end{aligned} \quad (4)$$

Δ – оператор Лапласа.

Заметим, что в случае линейных задач $g_k(u) \equiv 0$, $k = 1, 2, 3$. Кроме того, если тело однородное, то $l_k(u) \equiv 0$, $k = 1, 2, 3$.

Задача А. Требуется найти решение $u = (u_1, u_2, u_3)$ системы (3) в шаре $V : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2$, удовлетворяющее на его границе S_R условию

$$u = 0. \quad (5)$$

Задачу А будем изучать в обобщенной постановке. Пусть выполнены следующие условия: а) $E(x), \nu(x) \in W_p^{(1)}(V), p > 3$, б) $X_k \in L_p(V), p > 3, k = 1, 2, 3$.

Определение. Обобщенным решением задачи А назовем вектор перемещений $u = (u_1, u_2, u_3) \in W_p^{(2)}(V), p > 3$, почти всюду (п.в.) удовлетворяющий системе (3) и граничному условию (5).

Здесь $W_p^{(j)}(V) (j = 1, 2)$ – пространства Соболева. В силу теорем вложения для Соболевских пространств $W_p^{(j)}(V)$ с $p > 3$ обобщенное решение $u \in C_\alpha^1(\bar{V})$, а $E(x), \nu(x) \in C_\alpha(\bar{V}), \alpha = (p - 3)/p$.

2. Сведение задачи А к системе трехмерных сингулярных интегральных уравнений и исследование ее разрешимости.

Решение задачи А будем искать в виде

$$u(x) = \iiint_V G(y, x) \rho(y) dy, \quad dy = dy_1 dy_2 dy_3, \quad (6)$$

где $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ – произвольная вектор-функция, принадлежащая пространству $L_p(V), p > 3$; $G(y, x)$ – гармоническая функция Грина задачи Дирихле для шара V .

Найдем производные до второго порядка включительно функции $u(x)$. Непосредственным дифференцированием под знаком интеграла в (6) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \equiv u_{,j}(x) = \iiint_V \frac{\partial G(y, x)}{\partial x_j} \rho(y) dy \equiv u_{,j}(\rho)(x), \quad j = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Отметим, что $u_{,j}$ – линейные вполне непрерывные операторы из $L_p(V)$ в $C_\alpha(\bar{V})$ при $p > 3$. Для нахождения вторых производных $u(x)$ воспользуемся формулой (15) из [7, с. 240]. В результате для них п.в. в V получаем представления

$$u_{k,i,j}(\rho_k)(x) = -\frac{1}{3} \delta_{ij} \rho_k(x) + \frac{1}{4\pi} \iiint_{E_3} \frac{f_{ij}((y-x)/|y-x|)}{|y-x|^3} \rho_k^*(y) dy, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (8)$$

$$f_{ij}\left(\frac{y-x}{|y-x|}\right) = \frac{3(y_i - x_i)(y_j - x_j) - \delta_{ij}|y-x|^2}{|y-x|^2},$$

где $\rho_k^*(y) = \rho_k(y)$ при $y \in V$ и $\rho_k^*(y) = -(R^5/|y|^5) \rho_k(R^2 y/|y|^2)$ при $y \in \bar{V}$; E_3 – трехмерное евклидово пространство; $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Заметим, что функция $f_{ij}((y-x)/|y-x|)$ является характеристикой сингулярного оператора $u_{k,i,j}$ [8, с. 43]. Обозначив $\theta = (y-x)/|y-x| = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $\theta_j = (y_j - x_j)/|y-x|, j = 1, 2, 3$, характеристику можно представить в виде $f_{ij}(\theta) = 3\theta_i \theta_j - \delta_{ij}, i, j = 1, 2, 3$. Непосредственные вычисления показывают, что $\int_{S_1} f_{ij}(\theta) ds = 0$; кроме того, очевидно, $\int_{S_1} |f_{ij}(\theta)|^q ds \leq \text{const}, i, j = 1, 2, 3, 1/p + 1/q = 1, p > 3, S_1$ – единичная сфера. Следовательно [8, с. 18], $u_{k,i,j}$ суть ограниченные операторы в $L_p(V), p > 3$.

Соотношения (6),(7),(8) вносим в (3). В результате для определения функции $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ придем к системе трехмерных нелинейных сингулярных интегральных уравнений вида

$$\rho_k(x) - \frac{\beta(x)}{4\pi} \iiint_{E_3} \frac{f_{kj}(\theta)}{|y-x|^3} \rho_j^*(y) dy - l_k(\rho) = g_k(\rho) + F_k(x), \quad x \in V, \quad k = 1, 2, 3, \quad (9)$$

$$F_k(x) = \frac{3(1-2\nu)(1+\nu)}{(2-3\nu)E} X_k(x), \quad l_k(\rho) \equiv l_k(u(\rho)), \quad g_k(\rho) \equiv g_k(u(\rho)), \quad \beta(x) = \frac{3}{4-6\nu}.$$

Из соотношений (4) с учетом вышеустановленных свойств операторов $u_{,j}, u_{k,i,j}, i, j, k = 1, 2, 3$, условий а), б), легко получаем, что l_k – линейные вполне непрерывные, g_k – нелинейные ограниченные операторы в $L_p(V), F_k(x) \in L_p(V), p > 3, k = 1, 2, 3$.

При изучении разрешимости системы (9), в которой правую часть временно считаем фиксированной, будем следовать [8]. В основе исследования разрешимости многомерных сингулярных интегральных уравнений лежит вычисление символа сингулярных операторов. Через $\Phi_{kj}(x, \theta)$ обозначим символ сингулярного оператора

$$A_{kj}\rho_j = \delta_{kj}\rho_j - \frac{\beta(x)}{4\pi} \iiint_{E_3} \frac{f_{kj}(\theta)}{|y-x|^3} \rho_j^*(y) dy - \delta_{kj}l_j(\rho), x \in V, \quad k, j = 1, 2, 3$$

(по j нет суммирования).

Займемся вычислением $\Phi_{kj}(\theta)$. Для этого используем формулу [8, с. 109]:

$$\Phi_{kj}(x, \theta) = \delta_{kj} - \frac{\beta(x)}{4\pi} \iiint_{E_3} \frac{f_{kj}(y/|y|)}{|y|^3} e^{-i(y,z)} dy \tag{10}$$

где $\theta = z/|z|$, $z = (z_1, z_2, z_3)$, $(y, z) = y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3 = |y||z| \cos \gamma$ — скалярное произведение векторов y, z ; γ — угол между y, z ; i — мнимая единица.

Вычисляя интегралы в (10), для символов $\Phi_{kj}(\theta)$ получаем соотношения

$$\Phi_{jj}(x, \theta) = \beta(1 - 2\nu + \theta_j^2), \quad \Phi_{jk}(x, \theta) = \beta\theta_j\theta_k, j \neq k, \quad \theta_j = z_j/|z|, \quad j, k = 1, 2, 3.$$

В соответствии с теоремой 3.40 из [8, с.192] находим

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \Phi_{11}(x, \theta) &= \beta(1 - 2\nu + \theta_1^2), \quad \Delta_2 = \det(\Phi_{jk})_{2 \times 2} = \beta^2[(1 - 2\nu)^2 + (1 - 2\nu)(\theta_1^2 + \theta_2^2)], \\ \Delta_3 &= \det(\Phi_{jk})_{3 \times 3} = 2\beta^3(1 - 2\nu)^2(1 - \nu). \end{aligned} \tag{11}$$

Пусть коэффициент Пуассона $\nu = \nu(x)$ удовлетворяет условию

$$-1 < \nu(x) \leq \nu_0 < 1/2 \quad \forall x \in \bar{V}, \quad \nu_0 = \text{const}. \tag{12}$$

Тогда из (11) легко получаем

$$|\Delta_1| > 0, 3(1 - 2\nu_0), \quad |\Delta_2| > [0, 3(1 - 2\nu_0)]^2, \quad |\Delta_3| > 2(1 - \nu_0)(0, 3)^3(1 - 2\nu_0)^2 \quad \forall x \in \bar{V}, \quad \forall \theta \in S_1,$$

откуда следует, что точные нижние границы модулей определителей Δ_j положительны.

Следовательно [8, с. 192], индекс системы (9) равен нулю и к ней применима альтернатива Фредгольма. Пусть $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in L_p(V), p > 3$ — ненулевое решение системы (9) при нулевой правой части: $g_k(\rho) + F_k(x) \equiv 0, k = 1, 2, 3$. Этому решению по формуле (6) соответствует вектор перемещения $u = (u_1, u_2, u_3) \in W_p^{(2)}(V), p > 3$, удовлетворяющий граничному условию (5) и п.в. системе однородных линейных уравнений

$$\sigma_{e,j}^{kj} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \tag{13}$$

где $\sigma_e^{jj} = 2\mu e_{jj} + \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}), \sigma_e^{jk} = \mu e_{jk}, j \neq k, j, k = 1, 2, 3$.

Равенства в (13) соответственно умножим на u_1, u_2, u_3 , интегрируем по V и сложим. После этого с учетом (5) интегрируем по частям. В результате получим

$$\iiint_V \{ (1 - 2\nu)[(\sigma_e^{11})^2 + (\sigma_e^{22})^2 + (\sigma_e^{33})^2] + 2(1 + \nu)[(\sigma_e^{12})^2 + (\sigma_e^{13})^2 + (\sigma_e^{23})^2] \} dV = 0,$$

откуда следует $e_{jk} = 0, j, k = 1, 2, 3$, следовательно, $u_k = 0, k = 1, 2, 3$. Тогда $\rho = 0$ п.в. в V .

Таким образом, существует обратный оператор $(I - P)^{-1}$, ограниченный в $L_p(V), p > 3$, с помощью которого (9) сведется к эквивалентной системе вида

$$\rho - G\rho = 0, \tag{14}$$

где приняты обозначения:

$$G\rho = (I - P)^{-1}(g(\rho) + F), \quad P\rho = (P_1\rho, P_2\rho, P_3\rho), \quad F = (F_1, F_2, F_3),$$

$$g(\rho) = (g_1(\rho), g_2(\rho), g_3(\rho)), \quad P_k\rho = \frac{\beta}{4\pi} \iiint_{E_3} \frac{f_{kj}(\theta)}{|y-x|^3} \rho_j^*(y) dy + l_k(\rho), \quad \theta = \frac{y-x}{|y-x|}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Имеет место

Лемма. Пусть выполнены условия (а), (б) п. 1, неравенство (12). Тогда G – нелинейный ограниченный оператор в $L_p(V)$, $p > 3$, причем для любых ρ^j ($j = 1, 2$) $\in L_p(V)$, $p > 3$, принадлежащих шару $\|\rho^j\|_{L_p(V)} < r$, справедлива оценка $\|G(\rho^1) - G(\rho^2)\|_{L_p(V)} \leq (q_1 + q_2r)r\|\rho^1 - \rho^2\|_{L_p(V)}$, где q_j , $j = 1, 2$, – известные постоянные, не зависящие от r .

Предположим, что радиус r шара и внешние силы, действующие на упругое тело, таковы, что выполняются условия

$$q = (q_1 + q_2r)r < 1, \quad \|G(0)\|_{L_p(V)} < (1 - q)r, \quad G(0) = (I - P)^{-1}F. \quad (15)$$

В этих условиях к уравнению (14) можно применить принцип сжатых отображений [9, с. 146], согласно которому уравнение (14) в шаре $\|\rho\|_{L_p(V)} < r$ имеет единственное решение $\rho \in L_p(V)$, $p > 3$. Зная $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$, по формуле (6) находим решение $u = (u_1, u_2, u_3) \in W_p^{(2)}(V)$, $p > 3$, задачи А.

Таким образом, доказана следующая основная теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия (а), (б) п. 1, неравенства (12), (15). Тогда нелинейная краевая задача для упругого изотропного неоднородного шара при кинематических граничных условиях имеет единственное обобщенное решение в некотором шаре пространства $W_p^{(2)}(V)$, $p > 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. – М: Мир, 1974. – 160 с.
2. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М: Наука, 1980. – 384 с.
3. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бургуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. – М: Наука, 1976. – 664 с.
4. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). – М: Наука, 1978. – 464 с.
5. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Краевые задачи теории упругости для шара и цилиндра. – Казань: Изд-во Казанского гос. ун-та, 2008. – 208 с.
6. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – Л.-М.: Гостехиздат, 1948. – 212 с.
7. Михлин С.Г. Курс математической физики. – М: Наука, 1968. – 576 с.
8. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – Л.: Физматгиз, 1962. – 256 с.
9. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М: Гостехиздат, 1956. – 392 с.

REFERENCES

1. Fichera G. Existence Theorems in Elasticity. Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraints. – Berlin, Heidelberg, New York, 1972
2. Duvaut G., Lions J.-L. Les ine'quations en me'canique et en physique. – Paris: Dunod, 1972.

3. **Kupradze V.D., Gegelia T.G., Basheleyshvili M.O., Burguladze T.V.** Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity [Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости]. – Moscow: Nauka, 1976. (in Russian)
4. **Aleksandrov A.Ya., Solovyev Yu.I.** Spatial problem of elasticity theory (application of the theory of functions of a complex variable) [Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функции комплексного переменного)]. – Moscow: Nauka, 1978. (in Russian)
5. **Gur'yanov N.G., Tuleneva O.N.** университет Boundary-value problems of elasticity theory for a sphere and a cylinder [Краевые задачи теории упругости для шара и цилиндра]. – Kazan: Izdatel'stvo Kazanskogo gos. universiteta, 2008. (in Russian)
6. **Novozhilov V.V.** Fundamentals of nonlinear elasticity [Основы нелинейной теории упругости]. – Leningrad–Moscow: Gostekhizdat, 1947. (in Russian)
7. **Mikhlin S.G.** Course of Mathematical Physics [Курс математической физики]. – Moscow: Nauka, 1968. (in Russian)
8. **Mikhlin S.G.** Multidimensional singular integrals and integral equations, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics 83. – Oxford-London-Edinburgh-New York-Paris-Frankfurt: Pergamon Press, pp. XII+255.
9. **Krasnosel'skii M.A.** Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations. – Oxford-London-New York-Paris: Pergamon Press, 1964. – 395 p.