УДК 519.6

# СГЛАЖИВАНИЕ ДЛЯ ДЕКОМПОЗИЦИИ ПО РЕСУРСАМ[1)]

**И.В. КОННОВ**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет*
*E-mail: Igor.Konnov@kpfu.ru*

# SMOOTHING FOR RESOURCE DECOMPOSITION

**I.V. KONNOV**

*Kazan Federal University*

### Аннотация

Известный метод декомпозиции по ресурсам (Корнаи-Липтака) позволяет заменить решение задачи выпуклой оптимизации большой размерности двухуровневой задачей малой размерности, но с негладкой функцией цели, значения которой вычисляются алгоритмически. Для улучшения свойств предлагается во вспомогательных подзадачах использовать регуляризированный метод штрафных функций. Показано, что он позволяет получить гладкую аппроксимацию основной задачи и применить для решения более простые итеративные методы.

**Ключевые слова:** Задача оптимизации, декомпозиция по ресурсам, регуляризированный метод штрафов, гладкая аппроксимация.

### Summary

The known resource (Kornai-Liptak) decomposition method allows one to replace a large-scale convex optimization problem with a low-dimensional master problem, although its goal function is not smooth in general and its values are calculated algorithmically. In order to enhance its properties we suggest to utilize a regularized penalty method for auxiliary subproblems. It is shown this enables us to obtain a smooth approximation of the basic problem and apply simpler iterative methods.

**Key words:** Optimization problem, resource decomposition, regularized penalty method, smooth approximation.

## Введение

Для решения задач оптимизации большой размерности с разложимой (сепарабельной) структурой успешно применяются различные методы декомпозиции, которые заменяют их последовательностью задач меньшей размерности (см., напр., [1]). Пусть требуется решить задачу оптимизации

$$\min_{x\in D} \to \sum_{i=1}^{l} f_i(x_i), \tag{1}$$

где

$$D \triangleq \left\{ x=(x_1,\dots,x_l)\in X \;\middle|\; \sum_{i=1}^{l} h_i(x_i)\leqslant b \right\},\ X = X_1\times\dots\times X_l,$$

$b\in\mathbb{R}^m$, для каждого $i=1,\dots,l$ множество $X_i\subseteq\mathbb{R}^{n_i}$ выпукло и замкнуто, $f_i:\mathbb{R}^{n_i}\to\mathbb{R}$ – выпуклая функция, $h_i:\mathbb{R}^{n_i}\to\mathbb{R}^m$ – отображение с выпуклыми компонентами $h_{ij}:\mathbb{R}^{n_i}\to\mathbb{R}$, $j=1,\dots,m$.

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00029а) и Академии Финляндии (проект 276064)

Согласно методу декомпозиции по ресурсам Корнаи-Липтака (см. [1, 2]), задачу (1) можно заменить на следующую:

$$\min_{v \in V} \to \sum_{i=1}^{l} \varphi_i(v_i), \tag{2}$$

где

$$V \triangleq \left\{ v = (v_1, \ldots, v_l) \in \mathbb{R}^{ml} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{l} v_i = b \right\},$$

для каждого $i = 1, \ldots, l$ значение функции $\varphi_i(v_i)$ вычисляется как оптимальное значение задачи

$$\min_{x_i \in D_i(v_i)} \to f_i(x_i),\ D_i(v_i) \triangleq \{x_i \in X_i \,|\, h_i(x_i) \leqslant v_i\}. \tag{3}$$

Нетрудно показать, что все функции $\varphi_i$ выпуклы, т.е. получается координирующая задача выпуклой оптимизации (2) с простыми ограничениями, более того, каждая вспомогательная задача выпуклой оптимизации (3) имеет размерность $n_i \times m$ и может решаться независимо от других. Одна из основных трудностей этого подхода состоит в том, что гладкость функций $\varphi_i$ нельзя гарантировать даже при сильной выпуклости функций $f_i$, что заставляет применять для решения координирующей задачи (2) специальные методы негладкой оптимизации. Более того, из-за возможной несовместности ограничений в $D_i(v_i)$, либо невыполнения условий регулярности, функции $\varphi_i$ и их субдифференциалы определены не для всех допустимых значений $(v_1, \ldots, v_l)$ множества $V$. В настоящей работе, опираясь на результаты статьи [3], предлагается во вспомогательных подзадачах (3) использовать регуляризированный метод штрафных функций. Показано, что он позволяет получить гладкую аппроксимацию задачи (2) и применить для решения более простые итеративные методы. Заметим, что в работе [4] был предложен декомпозиционный метод штрафов для задач линейного программирования, в котором пересчет параметров происходил на основе физических аналогий, а в работе [5] был предложен одноуровневый декомпозиционный метод штрафов для разложимых задач нелинейной оптимизации, однако без какой-либо связи с методом декомпозиции по ресурсам, что приводило к необходимости решения общей вспомогательной задачи по переменным $x$ и $v$.

### 1. Вспомогательная задача и ее регуляризация

Если в задаче (3) отображение $h_i$ аффинно, либо выполняется условие регулярности ограничений, то ее можно заменить задачей о седловой точке $(x_i(v_i), y_i(v_i)) \in X_i \times \mathbb{R}^m_+$ функции Лагранжа $L_i(x_i, y_i, v_i) = f_i(x_i) + \langle y_i, h_i(x_i) - v_i \rangle$, которая сводится к решению системы

$$f_i(x_i) - f_i(x_i(v_i)) + \langle y_i(v_i), h_i(x_i) - h_i(x_i(v_i)) \rangle \geqslant 0 \quad \forall x_i \in X_i, \tag{4}$$

$$\langle v_i - h_i(x_i(v_i)), y_i - y_i(v_i) \rangle \geqslant 0, \quad \forall y_i \in \mathbb{R}^m_+. \tag{5}$$

Тогда $\varphi_i(v_i) = \inf_{x_i \in X_i} \sup_{y_i \in \mathbb{R}^m_+} L_i(x_i, y_i, v_i)$ и $-y_i(v_i) \in \partial \varphi_i(v_i)$, поскольку элемент $y_i(v_i)$ не обязательно единственный. Теперь, следуя методу регуляризации Тихонова, рассмотрим для $\varepsilon > 0$ возмущенную задачу: найти пару $(x_i^\varepsilon(v_i), y_i^\varepsilon(v_i)) \in X_i \times \mathbb{R}^m_+$, такую что

$$f_i(x_i) - f_i(x_i^\varepsilon(v_i)) + \varepsilon \langle x_i^\varepsilon(v_i), x_i - x_i^\varepsilon(v_i) \rangle + \langle y_i^\varepsilon(v_i), h_i(x_i) - h_i(x_i^\varepsilon(v_i)) \rangle \geqslant 0 \quad \forall x_i \in X_i, \tag{6}$$

$$\langle v_i - h_i(x_i^\varepsilon(v_i)) + \varepsilon y_i^\varepsilon(v_i), y_i - y_i^\varepsilon(v_i) \rangle \geqslant 0, \quad \forall y_i \in \mathbb{R}^m_+; \tag{7}$$

что соответствует задаче о седловой точке возмущенной функции Лагранжа $L_i^\varepsilon(x_i, y_i, v_i) = L_i(x_i, y_i, v_i) + (\varepsilon/2)\left(\|x_i\|^2 - \|y_i\|^2\right)$. В отличие от системы (4)–(5), система (6)–(7) всегда имеет единственное решение. Поскольку (7) есть задача дополнительности, то ее решение можно выписать явно:

$$y_i^\varepsilon(v_i) = (1/\varepsilon)[h_i(x_i^\varepsilon(v_i)) - v_i]_+, \tag{8}$$

где $[\cdot]_+$ обозначает проекцию на $\mathbb{R}^m_+$. Подставляя это выражение в (6), получим следующую задачу

$$f_i(x_i) - f_i(x_i^\varepsilon(v_i)) + \varepsilon \langle x_i^\varepsilon(v_i), x_i - x_i^\varepsilon(v_i) \rangle + (1/\varepsilon) \langle [h_i(x_i^\varepsilon(v_i)) - v_i]_+, h_i(x_i) - h_i(x_i^\varepsilon(v_i)) \rangle \geqslant 0 \quad \forall x_i \in X_i,$$

решение которой соответствует регуляризированному методу штрафов для задачи (3):

$$\min_{x_i \in X_i} \to \Phi_i^\varepsilon(x_i, v_i),\ \Phi_i^\varepsilon(x_i, v_i) = f_i(x_i) + (\varepsilon/2)\|x_i\|^2 + (1/(2\varepsilon))\|[h_i(x_i) - v_i]_+\|^2. \tag{9}$$

**Теорема 1.** *Система (6)–(7) эквивалентна задаче (9), при этом вектор $y_i^\varepsilon(v_i)$ находится по формуле (8).*

Теперь можно определить функцию оптимального значения $\mu_i^\varepsilon(v_i) = \inf_{x_i \in X_i} \Phi_i^\varepsilon(x_i, v_i)$ и ее градиент $\nabla \mu_i^\varepsilon(v_i) = -y_i^\varepsilon(v_i)$.

**Теорема 2.** *Градиент $\nabla \mu_i^\varepsilon$ удовлетворяет условию ко-коэрцитивности с константой $\varepsilon$:*

$$\langle t' - t'', \nabla \mu_i^\varepsilon(t') - \nabla \mu_i^\varepsilon(t'') \rangle \geqslant \varepsilon \|\nabla \mu_i^\varepsilon(t') - \nabla \mu_i^\varepsilon(t'')\|^2 \quad \forall t', t'' \in \mathbb{R}^m.$$

**Доказательство.** Пусть выбраны $t', t'' \in \mathbb{R}^m$, тогда для решения системы (6)–(7) обозначим $y' = y_i^\varepsilon(t')$, $y'' = y_i^\varepsilon(t'')$, $x' = x_i^\varepsilon(t')$, $x'' = x_i^\varepsilon(t'')$. Используя (6) с $v_i = t'$, $x_i = x''$ и с $v_i = t''$, $x_i = x'$, получаем

$$\langle y' - y'', h_i(x'') - h_i(x') \rangle \geqslant \varepsilon \|x'' - x'\|^2.$$

Аналогично используя (7) с $v_i = t'$, $x_i = x''$ и с $v_i = t''$, $x_i = x'$, получаем

$$\langle t' - t'', y'' - y' \rangle \geqslant \langle y'' - y', h_i(x') - h_i(x'') \rangle + \varepsilon \|y'' - y'\|^2.$$

Сложение этих неравенств дает $\langle t' - t'', y'' - y' \rangle \geqslant \varepsilon \|y'' - y'\|^2$, что и требовалось.

Отсюда, в частности, следует выпуклость функции $\mu_i^\varepsilon$.

**2. Свойства сходимости.**

Покажем теперь сходимость регуляризированной задачи (6)–(7) к исходной (4)–(5). Поскольку в задаче о седловой точке (4)–(5) функция Лагранжа выпукло-вогнутая, то ее множество решений имеет вид $Z_i(v_i) = X_i(v_i) \times Y_i(v_i)$, где $X_i(v_i)$ и $Y_i(v_i)$ — выпуклые и замкнутые множества. Если они непусты, то имеют единственные элементы минимальной нормы, которые обозначим $x_i^*(v_i)$ и $y_i^*(v_i)$, соответственно.

**Теорема 3.** *Предположим, что для некоторых $i \in \{1, \dots, l\}$ и $v_i$ множество решений задачи (4)–(5) непусто. Тогда выполняются соотношения:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (x_i^\varepsilon(v_i), y_i^\varepsilon(v_i)) = (x_i^*(v_i), y_i^*(v_i)), \tag{10}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_i(x_i^\varepsilon(v_i)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Phi_i^\varepsilon(x_i^\varepsilon(v_i), v_i) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_i^\varepsilon(v_i) = \varphi_i(v_i). \tag{11}$$

**Доказательство.** Сложение неравенства (4) с $x_i = x_i^\varepsilon(v_i)$ и неравенства (6) с $x_i = x_i(v_i)$ дает

$$\varepsilon \langle x_i^\varepsilon(v_i), x_i(v_i) - x_i^\varepsilon(v_i) \rangle \geqslant \langle y_i(v_i) - y_i^\varepsilon(v_i), h_i(x_i) - h_i(x_i^\varepsilon(v_i)) \rangle. \tag{12}$$

Аналогично, складывая неравенство (5) с $y_i = y_i^\varepsilon(v_i)$ и неравенство (7) с $y_i = y_i(v_i)$, получаем

$$\varepsilon \langle y_i^\varepsilon(v_i), y_i(v_i) - y_i^\varepsilon(v_i) \rangle \geqslant \langle y_i(v_i) - y_i^\varepsilon(v_i), h_i(x_i^\varepsilon(v_i)) - h_i(x_i) \rangle. \tag{13}$$

Из (12)–(13) следует

$$\|z_i^\varepsilon\| \leqslant \|z_i\|, \tag{14}$$

где $z_i^\varepsilon = (x_i^\varepsilon(v_i), y_i^\varepsilon(v_i))$, $z_i = (x_i(v_i), y_i(v_i))$ — любое решение системы (4)–(5). Поэтому последовательность $\{z_i^\varepsilon\}$ ограничена и имеет предельные точки. Переходя к соответствующему пределу в (6)–(7), получаем, что любая такая предельная точка $\bar{z}_i = (\bar{x}_i(v_i), \bar{y}_i(v_i))$ есть решение системы (4)–(5), более того, согласно (14) имеем $\|\bar{z}_i\| \leqslant \|z_i^*\|$, где $z_i^* = (x_i^*(v_i), y_i^*(v_i))$, поэтому все эти предельные точки совпадают и выполняется соотношение (10).

Далее, по определению имеем

$$\begin{aligned} f_i(x_i^\varepsilon(v_i)) &\leqslant \Phi_i^\varepsilon(x_i^\varepsilon(v_i), v_i) = f_i(x_i^\varepsilon(v_i)) + (\varepsilon/2)\|x_i^\varepsilon(v_i)\|^2 + (1/(2\varepsilon))\|[h_i(x_i^\varepsilon(v_i)) - v_i]_+\|^2 \\ &\leqslant f_i(x_i) + (\varepsilon/2)\|x_i\|^2 \quad \forall x_i \in D_i(v_i). \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, учитывая (10) и непрерывность функции $f_i$, и взяв $x_i = x_i^*(v_i)$, получаем

$$\varphi_i(v_i) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_i(x_i^\varepsilon(v_i)) \leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \Phi_i^\varepsilon(x_i^\varepsilon(v_i), v_i) \leqslant \limsup_{\varepsilon \to 0} \Phi_i^\varepsilon(x_i^\varepsilon(v_i), v_i) \leqslant \varphi_i(v_i),$$

т.е. соотношение (11) также справедливо.

Из теоремы 3, в частности, следует, что градиент $\nabla\mu_i^\varepsilon(v_i)$ при $\varepsilon \to 0$ стремится к элементу минимальной нормы субдифференциала $\partial\varphi_i(v_i)$, если он непуст.

### 3. Приближенное решение задачи.

Опираясь на полученные свойства, заменим исходную задачу (2) на ее аппроксимацию

$$\min_{v \in V} \to \sum_{i=1}^{l} \mu_i^\varepsilon(v_i), \tag{15}$$

которая представляет собой задачу минимизации выпуклой гладкой функции на линейном многообразии. Вычисление значений целевой функции и ее градиента, согласно (8)–(9), также распадается на $l$ независимых задач небольшой размерности. Параметр $\varepsilon > 0$ можно либо фиксировать, либо последовательно уменьшать для достижения требуемой точности. Для решения задачи (15) существует большое число быстро сходящихся алгоритмов (см., напр., [6]). В частности, методы сопряженных градиентов легко приспособить для минимизации на линейном многообразии.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Цурков В.И.** Декомпозиция в задачах большой размерности. – М: Наука, 1981. – 352 с.
2. **Kornai J., Liptak T.** Two-level planning // Econometrica. – 1965. – V. 33. – P. 141–169.
3. **Konnov I.V.** Right-hand side decomposition for variational inequalities // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2014. – V. 160. – P. 221–238.
4. **Разумихин Б.С.** Итерационный метод решения и декомпозиция задач линейного программирования // Автоматика и телемеханика. – 1967. – № 3. – С .80–97.
5. **Умнов А.Е.** Метод штрафных функций в задачах большой размерности // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1975. – Т. 15, № 6. – С .1399–1411.
6. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. – М: Наука, 1983. – 384 с.

### REFERENCES

1. **Tsurkov V.I.** Decomposition in Large Scale Problems [Dekompozitcija v zadachakh bol'shoi razmernosti]. – Moscow: Nauka, 1981. – 352 p. (in Russian)
2. **Kornai J., Liptak T.** Two-level planning // Econometrica. – 1965. – V. 33. – P. 141–169.
3. **Konnov I.V.** Right-hand side decomposition for variational inequalities // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2014. – V. 160. – P. 221–238.
4. **Razumikhin B.S.** Iterative method for the solution and decomposition of linear programming problems // Autom. Remote Control. – 1967. – V. 29. – P .427–443.
5. **Umnov A.E.** The method of penalty functions in problems of large dimension//USSR Comp. Maths. Math. Phys. – 1975. – T. 15. – P .32–45.
6. **Polyak B.T.** Introduction to Optimization [Vvedenie v optimizatciju]. – Moscow: Nauka, 1983. – 384 p. (in Russian)