

УДК 532.546, 519.63

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ¹⁾

Ф.М. КАДЫРОВ, Е.А. КОСТЕРИНА

*Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail Ekaterina.Kosterina@kpfu.ru*

NUMERICAL SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL NONSTATIONARY PROBLEM OF FILTRATIONAL CONSOLIDATION

F.M. KADYROV, E.A. KOSTERINA

Kazan Federal University

Аннотация

К однородному пористому полупространству при полном насыщении приложена прямоугольно-распределенная нагрузка. Основу математической модели составляют уравнения равновесия и уравнение консолидации. Начальные условия разрывные. Следует определить перемещения скелета и давление жидкости в порах в каждый момент времени. Построена разностная схема, предложен и реализован метод численного решения задачи.

Ключевые слова: Теория фильтрационной консолидации, неявная разностная схема, метод блочной релаксации.

Summary

The two-dimensional nonstationary problem of the theory of filtrational consolidation of soils for rectangular load distribution has been solved. The model is based on the balance equations and the consolidation equation. Initial conditions are discontinuous. The moving of the skeleton and the fluid pressure are to be found at every moment of time. The difference scheme is constructed, the method of numerical solution of the problem is proposed.

Key words: The theory of filtrational consolidation, implicit difference scheme, block relaxation method.

Введение.

Рассмотрим модельную ситуацию, когда на поверхность земли ставится здание. Будем считать длину здания много большей его ширины, в результате чего примем здание, условно говоря, бесконечно протяженным. Это предположение позволяет использовать двумерную математическую модель. Грунт, на который ставится здание, моделируется как бесконечное однородное насыщенное пористое полупространство. В момент появления нагрузки на поверхности земли происходит скачкообразное изменение давления жидкости в грунте, таким образом жидкость принимает нагрузку первой. Затем нагрузка перераспределяется, постепенно принимается скелетом грунта, и напряжения в скелете приводят к тому, что появляются перемещения скелета. Сжимаемостью зерен скелета и жидкости пренебрегаем. Важно знать, насколько деформируется грунт под тяжестью здания.

В работе [1] проведено аналитическое исследование поведения давления для рассматриваемой нами задачи в предположении, что справедлива гипотеза Терцаги (см. [2]), а также изложена история вопроса.

¹⁾Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00368)

Данная работа посвящена построению численного метода отыскания давления жидкости и перемещений скелета в каждый момент времени и продолжает исследования, изложенные в [3].

1. Исходная постановка задачи.

Основу математической модели составляют уравнения равновесия и уравнение консолидации.

Предполагается, что всё грунтовое пространство бесконечно. Однако при численном решении данной задачи необходимо ограничиться конечной областью. Поэтому ограничим наше грунтовое пространство по x значением L_x , а по y значением L_y , принимая при этом, что L_x и L_y достаточно велики и моделируют бесконечность.

Модельная ситуация изображена ниже на рис. 1. Очевидно, задача симметричная относительно оси y , поэтому будем рассматривать только половину прямоугольника.

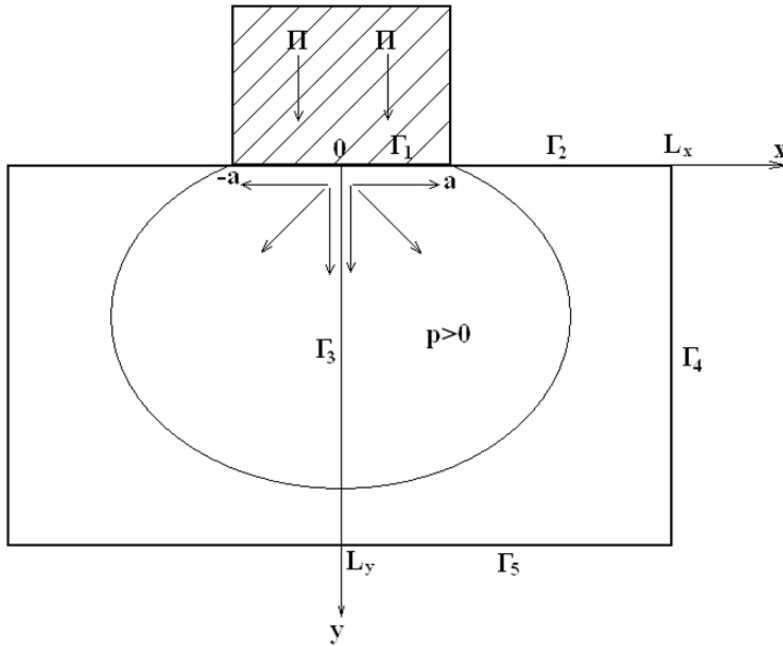


Рис. 1: Область моделирования и основные обозначения.

Математическая постановка задачи в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$\frac{\partial(\sigma_{xx}^f - p)}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}^f}{\partial y} = 0, \quad 0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial\sigma_{yx}^f}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{yy}^f - p)}{\partial y} = 0, \quad 0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y, \quad t > 0; \quad (2)$$

$$\sigma_{xx}^f = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u^x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u^y}{\partial y}; \quad (3)$$

$$\sigma_{yy}^f = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u^y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u^x}{\partial x}; \quad (4)$$

$$\sigma_{xy}^f = \mu \left(\frac{\partial u^x}{\partial y} + \frac{\partial u^y}{\partial x} \right); \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial \dot{u}^x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}^y}{\partial y} \right) = \frac{k}{\mu_0} \Delta p, \quad 0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y, \quad t > 0; \quad (6)$$

$$u^x = 0, u^y = 0, p = 0 \quad 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, t = 0; \tag{7}$$

$$\sigma_{yy} = p - \Pi \cdot H(a - |x|), \sigma_{xy} = 0, p = 0, \quad 0 \leq x \leq L_x, y = 0, t > 0; \tag{8}$$

$$u^x = 0, \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial u^y}{\partial x} = 0, \quad x = 0, 0 \leq y \leq L_y, t > 0; \tag{9}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, p = 0, \quad x = L_x, 0 \leq y \leq L_y, t > 0; \tag{10}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0, p = 0, \quad 0 \leq x \leq L_x, y = L_y, t > 0, \tag{11}$$

где $\sigma_{xx}^f, \sigma_{yy}^f, \sigma_{xy}^f$ – элементы тензора напряжений, Π – нагрузка, p – давление жидкости, u^x – перемещение скелета по оси x , u^y – перемещение скелета по оси y , λ и μ – коэффициенты Ламе упругой пористой матрицы, k – коэффициент фильтрации, H – функция Хевисайда.

Неизвестными являются функции u^x, u^y, p , значения которых следует определить в каждый момент времени.

2. Сеточная аппроксимация.

Разобьем область отыскания решения на квадратные блоки, как показано на рис. 2.

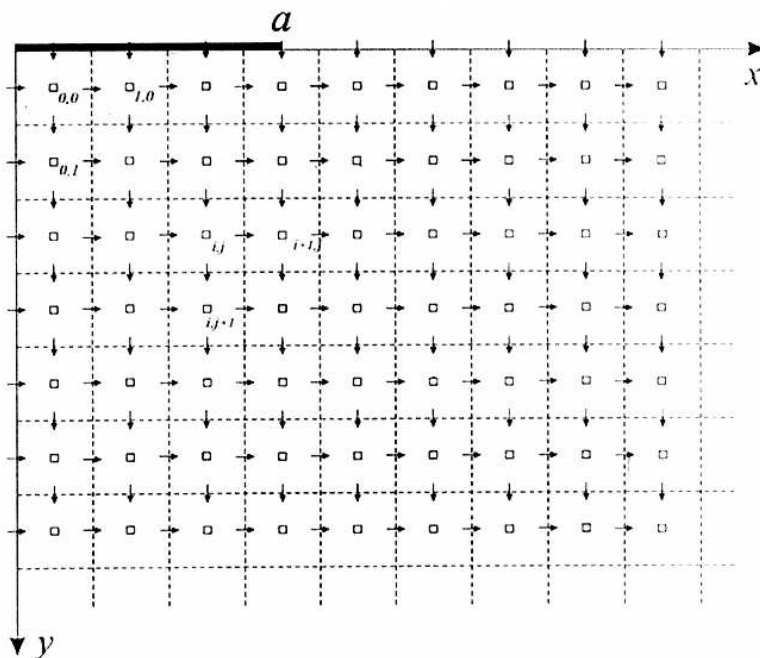


Рис. 2: Расчетная сетка.

Давление в каждом блоке представлено давлением в центре блока, перемещение скелета по оси y – значением этой величины в середине верхнего ребра блока, перемещение скелета по оси x – значением этой величины в середине левого ребра блока.

Для каждого внутреннего блока с номером i, j получим систему из трех конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих уравнения (1), (2), (6):

$$(\sigma_{xx}^f - p)_{\bar{x},i,j} + (\sigma_{xy}^f)_{y,i,j} = 0;$$

$$(\sigma_{xy}^f)_{x,i,j} + (\sigma_{yy}^f - p)_{\bar{y},i,j} = 0;$$

$$(\dot{u}^x)_{x,i,j} + (\dot{u}^y)_{y,i,j} = \frac{k}{\mu_0} p_{x\bar{x},i,j},$$

для аппроксимации производной по времени берется конечная разность назад. Эту систему сведем к системе уравнений для искомым значений $u_{i,j}^x$, $u_{i,j}^y$, $p_{i,j}$ в блоке с номером i, j .

Аналогично поступим для граничных блоков, используя при выводе сеточных уравнений граничные условия и предположение о симметрии значений функций относительно границы расчетной области в случае, если на самой границе эта функция равна нулю и необходимо взять значение функции за пределами расчетной области (где на самом деле функция не существует).

3. Обсуждение результатов численных расчетов.

Расчеты были проведены методом блочной релаксации. Результаты согласуются с результатами аналитического исследования поведения давления, выполненного для задачи (1)-(11) в предположении, что справедлива гипотеза Терцаги (см. [1]).

Динамика изменения давления во времени для $x = 0$ представлена на рис. 3.

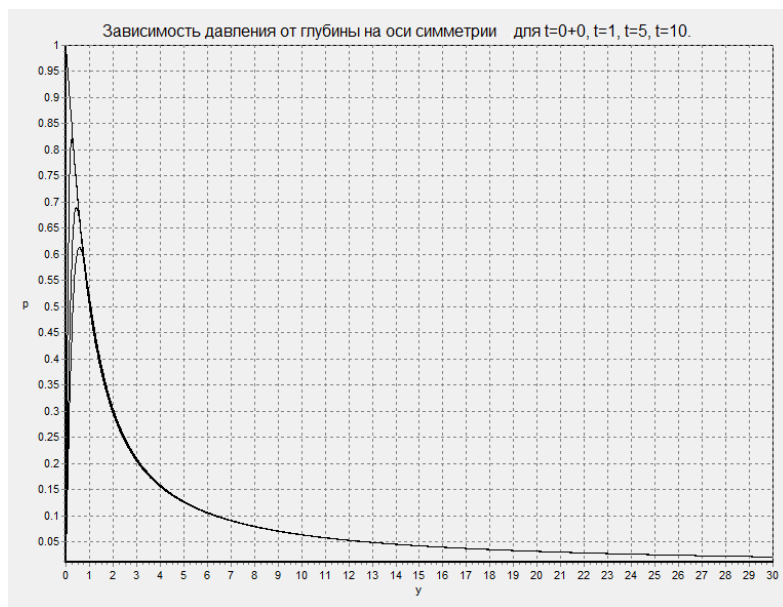


Рис. 3: Изменение давления при $x = 0$ и различных значениях t для $\Pi = 1$, $\lambda = 0.26$, $\mu = 0.4$, $k = 0.5$, $a = 1$, $L_x = L_y = 30$, $h = \tau = 0.01$.

В момент появления нагрузки вся она принимается жидкостью и сконцентрирована у поверхности земли. С течением времени скелет принимает нагрузку на себя, давление жидкости убывает.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кадыров Ф.М.** Плоская задача консолидации с разрывными начальными условиями // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. — 2013. — Т. 155, Кн 3. — С. 63–70.
2. **Терцаги К.** Теория механики грунтов. — М: Госстройиздат, 1961. — 544 с.
3. **Костерин А.В.** Новые модели и обобщенные решения нелинейных задач механики насыщенных пористых сред // Математическое моделирование. — 2001. — Т. 13, № 2. — С. 71–77.

REFERENCES

1. **Kadyrov F.M.** The two-dimensional problem of the theory of filtration consolidation with discontinuous initial conditions [Ploskaya zadacha konsolidatsii s razryvnymi nachal'nymi usloviyami] // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki . – 2013. – V. 155, Book 3. – P. 63–70 (in Russian).
2. **Terzaghi K.** Theoretical Soil Mechanics [Teoriya mekhaniki gruntov]. – Moscow: Gosstroizdat, 1961. – 544 p (in Russian).
3. **Kosterin A.V.** New models and generalized solutions of nonlinear problems in mechanics of saturated porous medium [Noviye modeli i obobshchennyye resheniya nelinei'nykh zadach mekhaniki nasychennykh poristykh sred]// Matematicheskoe Modelirovanie. – 2001. – V. 13, № 2. – P. 71–77 (in Russian).