

УДК 517.54

ГРАДИЕНТ КОНФОРМНОГО РАДИУСА С ОДНОТОЧНЫМ НУЛЬ-МНОЖЕСТВОМ**А.В. КАЗАНЦЕВ***Казанский (Приволжский) федеральный университет**E-mail: kazandrey0363@rambler.ru***GRADIENT OF THE CONFORMAL RADIUS WITH NULL-SET IS A SINGLETON****A.V. KAZANTSEV***Kazan Federal University***Аннотация**

Нуль-множества градиентов конформных радиусов возникают в ряде граничных задач математической физики и краевых задач для аналитических функций. Особую роль играют условия, при которых указанные нуль-множества сводятся к одной точке. Неположительность якобиана градиента позволяет установить новое условие подобного типа, в котором изначально не требуется постулировать существование нуля.

Ключевые слова: Конформный радиус, градиент, нуль-множество.

Summary

Null-sets of the gradients of the conformal radii appear in the number of the boundary value problems for PDE and the analytic functions. The conditions for such a null-set to be a singleton play an important role here. Non-positivity of the Jacobian of the gradient admits us to establish the new condition of the above type where we initially don't need to postulate the zero existence.

Key words: Conformal radius, gradient, null-set.

Для голоморфной и локально однолистной функции f в единичном круге \mathbb{D} величина

$$h_f(z) = (1 - |z|^2)|f'(z)| \quad (1)$$

называется гиперболической производной (конформным радиусом) функции f (см., например, [1]). Множество M_f корней уравнения

$$\nabla h_f(z) = 0 \quad (2)$$

возникает при исследовании ряда граничных задач математической физики и PDE (см. обзор [2]), а также краевых задач для аналитических функций ([3, 4]); особое значение приобретают условия, обеспечивающие единственность корня уравнения (2). Один из источников таких условий — знакпостоянство якобиана отображения ∇h_f . При этом (2) может использоваться, например, в форме уравнения Гахова $f''(z)/f'(z) = 2\bar{z}/(1 - |z|^2)$ [5, 6] или в эквивалентной при $z \neq 0$ форме [7]

$$g(z) = 2|z|^2/(1 - |z|^2), \quad (3)$$

где

$$g(z) = zf''(z)/f'(z). \quad (4)$$

Основные этапы накопления признаков единственности корня уравнения (2) в связи с обратными краевыми задачами отражены в [1].

В настоящей заметке исследуется класс функций (4) с условием

$$\left| z \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{1}{1 - |z|^2} \right| \leq \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{5}$$

равносильным неположительности (ρ, θ) -якобиана прологарифмированного уравнения (3) при $z = \rho e^{i\theta}$. Для характеристики элементов $a \in M_f$ используется гауссова кривизна

$$K(a) = h_f(a)[4/(1 - |a|^2)^4 - |\{f, a\}|^2] \tag{6}$$

поверхности (1) над точкой $z = a$ (см., например, [6]); $\{f, z\} = (f''/f')'(z) - (f''/f')^2(z)/2$ – производная Шварца функции f .

Справедлива

Теорема 1. Пусть голоморфная в \mathbb{D} функция $f(z) = a_1 z + \dots$, $a_1 \neq 0$, удовлетворяет следующим условиям: а) если $0 \in M_f$, то $K_f(0) \geq 0$; б) если $g = z f''/f' \neq 0$, то имеет место неравенство (5). Тогда множество M_f не более чем одноточечно, либо $f(\mathbb{D})$ – полоса.

Доказательство. Условие $g \equiv 0$ соответствует случаю $f(z) = a_1 z$, для которого $M_f = \{0\}$. Поэтому всюду далее считаем, что $g \neq 0$, то есть, согласно б), выполняется условие (5).

Очевидным следствием (5) является неравенство

$$\operatorname{Re} z g'(z)/g(z) \leq 2/(1 - |z|^2), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{7}$$

которое будет использоваться в дальнейшем наряду с (5).

Локальная однолиственность функции f в $z = 0$ следует из условия. Предположение о нарушении локальной однолиственности f в некоторой точке $a \neq 0$ означает, что $f'(z) = (z - a)^n \phi(z)$ в окрестности $z = a$ с $n \geq 1$ и голоморфной $\phi \neq 0$. Отсюда получается локальное представление для $z g'/g$, подстановка которого в (5) с последующим переходом $z \rightarrow a$ приводит к противоречию. Таким образом, функция f локально однолиственна в \mathbb{D} .

С использованием локальных представлений устанавливается и отсутствие у функции g полюсов в \mathbb{D} , а также соотношение $Z_g := \{a \in \mathbb{D} : g(a) = 0\} = \{0\}$, из которого следует разложение $g(z) = \alpha z^k + \dots$, $z \in \mathbb{D}$, с $\alpha \neq 0$ и $k \geq 1$. Решающим для дальнейшего оказывается неравенство $k \leq 2$, справедливое в силу (7): $k = \operatorname{Re} z g'/g|_{z=0} \leq 2/(1 - |z|^2)|_{z=0} = 2$.

Случай $k = 2$ равносильен тому, что $0 \in M_f$, причем $\{f, 0\} = \alpha \neq 0$. Здесь проясняется условие а): если $0 \in M_f$, то шварцман $\{f, 0\}$ не наследует никаких ограничений от неравенства (5) при $z = 0$. Как показывает пример функции f_α с $f''_\alpha/f'_\alpha = \alpha z$, $\alpha > 0$, для которой $z g'/g \equiv 2$ (условие (5) выполняется), $M_{f_\alpha} = \{0\}$ при $\alpha \leq 2$ и $M_{f_\alpha} = \{0, \pm \sqrt{1 - 2/\alpha}\}$ при $\alpha > 2$, в случае $k = 2$ теорему можно «спасти» только дополнительным ограничением $|\alpha| \leq 2$ при $z = 0$, то есть условием $K_f(0) \geq 0$ (см. (6)).

Докажем теорему при $k = 2$. Так как функция $g(z)/(\alpha z^2)$ голоморфна и не исчезает в \mathbb{D} , то с использованием (7) будем иметь

$$\ln |g(z)/(\alpha z^2)| = \int_0^{|z|} (\operatorname{Re} e^{i\theta} (g'/g)(t) - 2/\rho) d\rho \leq \ln(1 - |z|^2)^{-1}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{8}$$

($t = \rho e^{i\theta}$, $\theta = \arg z$), откуда, с учетом $|\alpha| \leq 2$,

$$|z f''(z)/f'(z)| = |g(z)| \leq 2|z|^2/(1 - |z|^2), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{9}$$

Равенство при $z_0 = r e^{i\varphi} \neq 0$ в уравнении (3), то есть

$$g(z_0) = 2r^2/(1 - r^2), \tag{10}$$

в силу (8), (9) и (5) приводит к равенству $\rho e^{i\varphi}(g'/g)(\rho e^{i\varphi}) = 2/(1 - \rho^2)$, $\rho \in [0, r]$. Интегрирование последнего соотношения с учетом (10) дает $g(\rho e^{i\varphi}) = 2\rho^2/(1 - \rho^2)$, $\rho \in [0, r]$; тогда по классической теореме единственности имеем $g(e^{i\varphi}z) = 2z^2/(1 - z^2)$, $z \in \mathbb{D}$, то есть $f(z) = af_s(\varepsilon z) + b$ для некоторых $a, b \in \mathbb{C}$ и $|\varepsilon| = 1$, где $f_s(z) = (1/2)\ln((1+z)/(1-z))$. Построенная функция f удовлетворяет условию (5).

Итак, при $k = 2$ имеет место $M_f = \{0\}$, либо $f(\mathbb{D})$ – полоса.

Рассмотрим случай $k = 1$. Так как $g(z) = \alpha z + \dots$, $z \in \mathbb{D}$, с $\alpha \neq 0$, а неравенство (5) влечет за собой условие звездообразности $\operatorname{Re} zg'(z)/g(z) > 0$, $z \in \mathbb{D}$, то функция g будет однолистной. Пусть $h(w)$ – функция, обратная к $g(z)$.

Ясно, что корни уравнения (3) заполняют кривую $h[g(\mathbb{D}) \cap \{u > 0\}]$. Перепишем (3) в форме $F(u) := \ln u - \ln\{2|h(u)|^2/(1 - |h(u)|^2)\} = 0$, $u > 0$. Так как $zg'(z)/g(z) = (wh'(w)/h(w))^{-1}$, то неравенство (5) с $z = h(u)$, $u > 0$, приобретает вид

$$uF'(u) = 1 - 2(1 - |h(u)|^2)^{-1}\operatorname{Re} uh'(u)/h(u) \leq 0, \quad u > 0. \quad (11)$$

Предположим теперь, что уравнение (3) имеет более одного корня: $F(u_1) = F(u_2) = 0$ для некоторых $0 < u_1 < u_2$. Так как $\int_{u_1}^{u_2} F'(\xi)d\xi = F(u_2) - F(u_1) = 0$, то в силу (11) будем иметь $F'(u) = 0$ при $u \in [u_1, u_2]$, следовательно, $F(u) = 0$, $u \in [u_1, u_2]$. Это означает, что $z = h(u)$, $u \in [u_1, u_2]$, – (аналитическая) кривая корней уравнения (3).

Пусть $u_0 \in \mathbb{R}$ – наименьшее число, такое что $h(u)$ – корень (3) при любом $u \in (u_0, u_2]$; $u_0 \geq 0$. По лемме 1 из [8] будет $u_0 = 0$. Но тогда, переходя к пределу при $u \rightarrow 0$ в тождестве $g(h(u))/h(u) \equiv 2\overline{h(u)}/(1 - |h(u)|^2)$, справедливым при $u \in (0, u_2]$, получим $\alpha = 0$ – противоречие!

Возможность $M_f = \emptyset$ реализуется, например, на функции $f(z) = z/(1 - z)$, удовлетворяющей (5). Таким образом, при $k = 1$ число элементов M_f не превосходит единицы.

В заключение отметим, что существенность условия $a_1 \neq 0$ подтверждается примером функции $f(z) = z^2$, удовлетворяющей (5) с $g \equiv 1$, для которой M_f содержит окружность $|z| = 1/\sqrt{3}$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Казанцев А.В.** Четыре этюда на тему Ф.Д. Гахова. – Йошкар-Ола: Мар. ун-т, 2012. – 64 с.
2. **Kawohl В.** Rearrangements and convexity of level sets in PDE // Lect. Notes in Math. – 1985. – V. 1150. – 136 p.
3. **Гахов Ф.Д.** Краевые задачи. – 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
4. **Аксентьев Л.А.** Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 2. – С. 3–11.
5. **Авхадиев Ф.Г.** Конформно-инвариантные неравенства и их приложения. – Препринт НИИММ им. Н.Г. Чеботарева. – Казань: Казан. фонд «Математика», 1995. – 26 с.
6. **Казанцев А.В.** Бифуркации и новые условия единственности критических точек гиперболических производных // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2011. – Т. 153, Кн 1. – С. 180–194.
7. **Казанцев А.В.** Бифуркации корней уравнения Гахова с левнеровской левой частью // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 6. – С. 69–73.
8. **Ruscheweyh St., Wirths K.-J.** On extreme Bloch functions with prescribed critical points // Math. Z. – 1982. – Bd. 180. – S. 91–106.

REFERENCES

1. **Kazantsev A.V.** Four etudes on a theme of F.D. Gakhov [Chetyre etuda na temu F.D. Gakhova]. – Yoshkar-Ola: Mary State University, 2012. – 64 p. (in Russian)
2. **Kawohl B.** Rearrangements and convexity of level sets in PDE. – Lect. Notes in Math. – 1985. – V. 1150. – 136 p.
3. **Gakhov F.D.** Boundary value problems. – Pergamon Press, Oxford, 1966. – xix+564 p.
4. **Aksent'ev L.A.** The connection of the exterior inverse boundary value problem with the inner radius of the domain // Soviet Mathematics. – 1984. – V. 28, № 2. – P. 1–13.
5. **Avkhadiev F.G.** Conformally invariant inequalities and their applications [Konformno invariantnye neravenstva i ih prilozheniya]. – Chebotarev Inst. Math. Mech., Kazan, 1995. – Preprint № 95-1. – 26 p. (in Russian)
6. **Kazantsev A.V.** Bifurcations and new uniqueness criteria for critical points of hyperbolic derivatives // Lobachevskii J. Math. – 2011. – V. 32, № 4. – P. 426–437.
7. **Kazantsev A.V.** Bifurcations of the roots of the Gakhov equation with Loewner left-hand side // Russian Mathematics. – 1993. – V. 37, № 6. – P. 66–70.
8. **Ruscheweyh St., Wirths K.-J.** On extreme Bloch functions with prescribed critical points // Math. Z. – 1982. – Bd. 180. – S. 91–106.