

УДК 534.2.532

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ РАСПОЛОЖЕННЫХ В ЛИНИЮ
КАВИТАЦИОННЫХ ПУЗЫРЬКОВ ПРИ ИХ СОВМЕСТНОМ РАСШИРЕНИИ-СЖАТИИ¹⁾**

А.И. ДАВЛЕТШИН

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г. Казань

E-mail anas.davletshin@gmail.com

**A MATHEMATICAL MODEL OF DYNAMICS OF CAVITATION BUBBLES ARRANGED IN A LINE
AT THEIR JOINT EXPANSION-COMPRESSION**

A.I. DAVLETSIN

Institute of Mechanics and Engineering KazSC RAS, Kazan

Аннотация

Предлагается новая математическая модель и методика расчёта динамики расположенных в жидкости в линию кавитационных пузырьков при их однократном сильном совместном расширении-сжатии в пучности давления интенсивной стоячей акустической волны.

Ключевые слова: Кавитационный пузырек, гидродинамическое взаимодействие пузырьков, деформация пузырьков, сильное сжатие пузырьков.

Summary

A new mathematical model and method of calculation of the dynamics of cavitation bubbles arranged in a straight line during their single strong collective expansion and collapse in a liquid in the pressure antinode of an intense standing acoustic wave have been proposed.

Key words: Cavitation bubble, hydrodynamic interaction of bubbles, deformation of bubbles, strong compression of bubbles.

Введение

Сильное расширение-сжатие кавитационных пузырьков в жидкости представляет значительный интерес как для теории, так и приложений. Обычно для описания динамики кавитационных пузырьков при сильном расширении-сжатии используется предположение о сферической симметрии пузырька, что возможно только тогда, когда поблизости нет других пузырьков [1]. В реальности число пузырьков, вовлеченных в процесс расширения-сжатия, как правило, очень велико. При этом гидродинамическое взаимодействие между ними может оказывать значительное влияние на их динамику в ходе их сильного совместного расширения-сжатия. В работе [2] впервые представлена математическая модель для изучения влияния гидродинамического взаимодействия пузырьков на их динамику при их сильном расширении-сжатии. Однако учет влияния сильно сжатого пара внутри пузырьков производится в этой работе весьма приближенно.

В настоящей работе предлагается математическая модель динамики пузырьков в ходе их сильного совместного расширения-сжатия, в которой более точно, чем в работе [2], учитывается влияние сжатого пара внутри пузырьков. Здесь, как и в [2], рассматривается частный случай, когда пузырьки расположены в линию (в виде кометообразного стримера), которая является осью симметрии задачи. Предлагаемая модель фактически представляет собой сочетание двух моделей: модели динамики взаимодействующих

¹⁾Работа выполнена в рамках молодежного научного гранта Республики Татарстан (№ 01-92 т/Г 2014).

пузырьков и модели динамики одиночного пузырька. Такое сочетание оказалось возможным благодаря тому, что в финальной высокоскоростной стадии сжатия пузырьков взаимодействие между ними становится несущественным.

1. Постановка задачи

Рассматривается динамика расположенных в жидкости в линию (в виде кометообразного стримера) кавитационных пузырьков при их совместном однократном сильном расширении-сжатии. Прямая, на которой расположены центры пузырьков, является осью симметрии задачи.

Предполагается, что пузырьки находятся в пучности интенсивной ультразвуковой стоячей волны с давлением p_∞ , изменяющимся по закону

$$p_\infty = p_0 - p_a \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где t – время, p_a , ω – амплитуда и частота колебаний, p_0 – статическое давление, φ_0 – фаза колебаний при $t = 0$. При отрицательных значениях давления жидкости пузырьки, начальный размер которых не превышает нескольких микрон, увеличиваются до величин порядка миллиметра. При положительных значениях давления жидкости пузырьки стремительно сжимаются. В результате взаимодействия пузырьки в ходе расширения-сжатия могут перемещаться вдоль прямой, на которой расположены их центры, а их поверхности деформироваться.

Поверхность пузырьков представляется в виде ряда по сферическим гармоникам

$$r_i = R_i(t) + \sum_{n=2}^N a_{ni}(t) P_n(\cos \theta_i).$$

Здесь i – номер пузырька ($1 \leq i \leq K$, K – число пузырьков в стримере), r_i , θ_i – радиальная и широтная координаты сферической системы отсчета с началом в центре i -го пузырька, R_i – радиус i -го пузырька, a_{ni} – амплитуда (со знаком) отклонения формы от сферической в виде осесимметричной сферической гармоники – полинома Лежандра P_n степени n от $\cos \theta_i$, N – максимум среди номеров гармоник, определяющих несферичность пузырьков. Отклонения формы пузырьков от сферической предполагаются малыми, так что $|\varepsilon_{ni}| \ll 1$, где $\varepsilon_{ni} = a_{ni}/R_i$ – безразмерная амплитуда (со знаком) отклонения.

2. Математическая модель низкоскоростной стадии расширения-сжатия пузырьков

На низкоскоростной наиболее продолжительной стадии совместного расширения-сжатия пузырьков, которая включает всю фазу расширения и следующую за ней большую часть фазы сжатия, используется модель динамики взаимодействующих пузырьков, в которой некоторые эффекты в силу их малой значимости не учитываются или учитываются приближенно. В частности, полагается, что на низкоскоростной стадии расширения-сжатия пузырьков эффекты теплопроводности и испарения-конденсации приводят к тому, что давление в пузырьках p_v незначительно отличается от давления насыщения $p_s(T_0)$, соответствующего температуре окружающей жидкости T_0 . Поэтому влияние этих эффектов можно приближенно учесть, если принять $p_i = p_v = p_s(T_0)$, что и делается в настоящей работе при моделировании низкоскоростной стадии расширения-сжатия пузырьков.

В рамках указанных допущений динамика взаимодействующих пузырьков описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно радиусов пузырьков R_i , координат их центров на оси симметрии z_i и амплитуд отклонений их формы от сферической в виде сферических гармоник a_{ni} [2]

$$R_i \ddot{R}_i + \frac{3\dot{R}_i^2}{2} - \frac{\dot{z}_i^2}{4} - \frac{p_i - p_\infty}{\rho_0} + \frac{2\sigma}{\rho_0 R_i} = \sum_{j=1, j \neq i}^K \left[\frac{\dot{B}_{0j}}{d_{ij}} - \frac{R_j^3 \ddot{z}_j - B_{0j}(\dot{z}_i + 5\dot{z}_j)}{2s_{ij}d_{ij}^2} - \frac{R_j^3 \dot{z}_j(\dot{z}_i + 2\dot{z}_j)}{2d_{ij}^3} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1, k \neq i}^K \frac{3B_{0j}B_{0k}}{4s_{ij}s_{ik}d_{ij}^2d_{ik}^2} - \sum_{k=1, k \neq j}^K \frac{(B_{0k}R_j^3)'}{2s_{ij}s_{jk}d_{ij}^2d_{jk}^2} + \frac{3(R_j^2 \dot{z}_j a_{2j})'}{10s_{ij}d_{ij}^2} \right] + \psi_{0i} + \Delta_i, \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{7\varepsilon_{2i}}{5}\right) R_i \dot{z}_i + 3 \left(1 - \frac{4\varepsilon_{2i}}{5}\right) \dot{R}_i \dot{z}_i - \frac{9\dot{z}_i \dot{a}_{2i}}{5} - \sum_{m=2}^N \frac{9\bar{\Theta}_{m12}^{1,3} \dot{z}_i^2 \varepsilon_{mi}}{5} = \\
& = \sum_{j=1, j \neq i}^K \left[-\frac{3(B_{0j} R_i)'}{s_{ij} d_{ij}^2} + \frac{3(R_i R_j^3 \dot{z}_j)'}{d_{ij}^3} - 6B_{0j} R_i \dot{z}_j + \frac{9R_i R_j^3 \dot{z}_j^2}{s_{ij} d_{ij}^4} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{3(\dot{B}_{0j} a_{2i} + 3B_{0j} \dot{a}_{2i} + 4B_{0j} \dot{R}_i \varepsilon_{2i})}{5s_{ij} d_{ij}^2} + \sum_{m=2}^N \frac{18\bar{\Theta}_{m12}^{1,3} B_{0j} \dot{z}_i \varepsilon_{mi}}{5s_{ij} d_{ij}^2} \right] + \psi_{1i}, \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n+1} \left[R_i \ddot{a}_{ni} + 3\dot{R}_i \dot{a}_{ni} - (n-1) \ddot{R}_i a_{ni} - \frac{3}{2} \sum_{m=2}^N \left(\Theta_{m1n}^{2/3, n-2} \dot{z}_i a_{mi} - \bar{\Theta}_{m1n}^{1,2} \dot{z}_i \dot{a}_{mi} \right) \right] + \\
& + \frac{9\alpha_{11n} \dot{z}_i^2}{8} - \frac{3\dot{z}_i}{2} \sum_{m=2}^N \left[\frac{3}{2} \left(\sum_{\gamma=0}^{m+1} \frac{\bar{\Theta}_{m1\gamma}^{1,2} \beta_{\gamma 1n}}{\gamma+1} - \chi_{m11n} \right) \dot{z}_i \varepsilon_{mi} + \frac{\beta_{m1n} (\dot{a}_{mi} + 2\dot{R}_i \varepsilon_{mi})}{m+1} \right] + \\
& + \frac{(n-1)(n+2)\sigma \varepsilon_{ni}}{\rho_0 R_i} = \sum_{j=1, j \neq i}^K \left\{ \frac{9\beta_{11n} B_{0j} \dot{z}_i}{4s_{ij} d_{ij}^2} - \frac{9\beta_{11n} R_j^3 \dot{z}_i \dot{z}_j}{4d_{ij}^3} - \frac{5\beta_{21n} R_i B_{0j} \dot{z}_i}{2d_{ij}^3} + \right. \\
& \quad + \frac{15\beta_{21n} R_i R_j^3 \dot{z}_i \dot{z}_j}{4s_{ij} d_{ij}^4} + \frac{21\beta_{31n} R_i^2 B_{0j} \dot{z}_i}{8s_{ij} d_{ij}^4} + \sum_{k=1, k \neq i}^K \frac{9\beta_{11n} B_{0j} B_{0k}}{8s_{ij} s_{ik} d_{ij}^2 d_{ik}^2} + \\
& \quad + \frac{9\alpha_{11n} B_{0j} \dot{z}_i \varepsilon_{2i}}{10s_{ij} d_{ij}^2} - \sum_{m=2}^N \left[\frac{3\bar{\Theta}_{m1n}^{1,2} (B_{0j} a_{mi})'}{2s_{ij} (n+1) d_{ij}^2} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\Theta_{m1n}^{2, m+1} B_{0j} (\dot{a}_{mi} + 2\dot{R}_i \varepsilon_{mi})}{2s_{ij} (m+1) d_{ij}^2} - \frac{3B_{0j} \dot{z}_i \varepsilon_{mi}}{2s_{ij} d_{ij}^2} \left(\sum_{\gamma=0}^{m+1} \frac{2\Theta_{\gamma 1n}^{1/2, \gamma+1} \bar{\Theta}_{m1\gamma}^{1,2}}{\gamma+1} - 3\chi_{m11n} \right) \right] + \\
& \quad \left. + \frac{5(R_i^2 B_{0j})'}{3d_{ij}^3} \delta_{2n} - \frac{7(R_i^3 B_{0j})'}{4s_{ij} d_{ij}^4} \delta_{3n} - \frac{5(R_i^2 R_j^3 \dot{z}_j)'}{2s_{ij} d_{ij}^4} + 10R_i^2 B_{0j} s_{ij} \dot{d}_{ij} \delta_{2n} \right\} + \psi_{ni}. \quad (3)
\end{aligned}$$

Здесь точка сверху и штрих означают производную по времени, $d_{ij} = |z_i - z_j|$ – расстояние между центрами i -го и j -го пузырьков, δ_{mn} – символ Кронекера, $B_{0i} = -R_i^2 \dot{R}_i$, $s_{ij} = (z_i - z_j)/d_{ij}$, $\Theta_{\gamma 1\zeta}^{n,k} = nk\alpha_{\gamma 1\zeta} + \beta_{\gamma 1\zeta}$, $\bar{\Theta}_{\gamma 1\zeta}^{n,k} = nk\alpha_{\gamma 1\zeta} - \beta_{\gamma 1\zeta}$, $\beta_{\gamma 1\zeta} = [\gamma(\gamma+1) + 2 - \zeta(\zeta+1)]\alpha_{\gamma 1\zeta}/2$, $\alpha_{\gamma 1\zeta} = \frac{2\zeta+1}{2} \int_{-1}^1 \eta P_\gamma(\eta) P_\zeta(\eta) d\eta$, $\chi_{\gamma 11\zeta} = \frac{2\zeta+1}{2} \int_{-1}^1 (1-\eta^2) P_\gamma(\eta) P_\zeta(\eta) d\eta$, ψ_{0i} , ψ_{1i} , ψ_{ni} , Δ_i – поправки,

учитывающие влияние вязкости и сжимаемости жидкости, которые определяются согласно [2].

При выводе уравнений (1)–(3) полагается, что величиной δ^5 по сравнению с 1 можно пренебречь, где $\delta = \max_{ij} [(R_i + R_j)/d_{ij}]$. Это означает, что уравнения (1)–(3) можно применять при не очень малых расстояниях между пузырьками, когда $\delta^5 < 10^{-3}$ или $h/(2R) > 10^{3/5} - 1 \approx 3$, где R , h – характерные радиус пузырьков и расстояние между их поверхностями соответственно.

3. Математическая модель высокоскоростной стадии сжатия пузырьков

В финальной высокоскоростной стадии сжатия распределение параметров пара в пузырьках становится все более неоднородным, внутри пузырьков могут зарождаться радиально сходящиеся ударные волны. Кроме того, на процесс сжатия оказывают влияние такие эффекты как сжимаемость жидкости, нестационарная теплопроводность пара и жидкости, неравновесные испарение и конденсация на межфазной поверхности. С другой стороны, за счет сильного уменьшения радиусов и быстрого роста скоростей уменьшения радиусов пузырьков в финальной стадии сжатия взаимодействие между пузырьками становится несущественным. Поэтому при описании финальной стадии сжатия взаимодействие между пузырьками не учитывается.

В рамках указанных допущений для изучения деформаций взаимодействующих пузырьков в финальной высокоскоростной стадии их сжатия применяется модель динамики одиночного пузырька, в которой движение пара и жидкости расщепляется на сферическую составляющую и ее малое несферическое возмущение. Влияние сжимаемости жидкости, неоднородности давления в паре существенно лишь на сферическую составляющую движения жидкости и пара. В силу этого при описании несферической составляющей они не учитываются.

Для описания сферической составляющей движения и пара, и жидкости используется следующая система уравнений [3, 4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho r^2) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho w r^2) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho w r^2) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho w^2 r^2 + p r^2) &= 2pr, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e r^2) + \frac{\partial}{\partial r}[w r^2(\rho e + p)] &= \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \varkappa \frac{\partial T}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ρ – плотность, w – радиальная компонента вектора скорости \mathbf{w} , p – давление, $e = U + w^2/2$ – удельная полная энергия, U – удельная внутренняя энергия, T – температура, \varkappa – коэффициент теплопроводности.

Граничные условия вдали от пузырька ($r \rightarrow \infty$) и на межфазной поверхности ($r = R$) имеют вид [3, 4]:

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty : \quad p &= p_\infty, \quad T = T_\infty; \\ r = R(t) : \quad \dot{R} &= w_l + \frac{j}{\rho_l} = w_g + \frac{j}{\rho_g}, \quad p_l = p_g - \frac{4\mu_l w_l}{R} - \frac{2\sigma}{R}, \\ \varkappa_l \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_l &- \varkappa_g \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_g = j l(p_g), \quad T_l = T_g, \end{aligned} \quad (5)$$

где μ_l – коэффициент вязкости жидкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения, l – теплота парообразования, j – интенсивность фазовых превращений (скорость испарения и конденсации, отнесенная к единице поверхности). Нижние индексы l и g указывают на отношение к жидкости и пару соответственно. Интенсивность фазовых превращений j определяется по формуле Герца-Кнудсена-Ленгмюра [4].

Уравнения состояния жидкости и пара [4] представляют собой сумму потенциальных $p^{(p)}$, $U^{(p)}$ и тепловых $p^{(T)}$, $U^{(T)}$ компонент давления p и внутренней энергии U и константы $U^{(ch)}$ в выражении для U

$$p(\rho, T) = p^{(p)}(\rho) + p^{(T)}(\rho, T), \quad U(\rho, T) = U^{(p)}(\rho) + U^{(T)}(T) + U^{(ch)}. \quad (6)$$

Для описания потенциальных компонент используется обобщенный потенциал Борна-Майера [5]. Тепловые компоненты определяются выражениями

$$\begin{aligned} p^{(T)}(\rho, T) &= \rho \Gamma(\rho) U^{(T)}, \quad U^{(T)} = c_V T, \\ \Gamma(\rho) &= \frac{R_g}{c_V M} \left(g_1 + (1 - g_1) \exp(-(\rho/\rho_1)^{\zeta_1}) + \sum_{k=2}^3 g_k \exp(-(\rho/\rho_k)^{\zeta_k}) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Теплоемкости c_V жидкости и пара полагаются постоянными. Значения параметров выражений (4)-(7) берутся из [5].

Несферическая составляющая движения жидкости и пара в финальной высокоскоростной стадии сжатия описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка, которые получаются из (2), (3) отбрасыванием слагаемых, отвечающих за взаимодействие пузырьков (т.е. заменой $d_{ij} \rightarrow \infty$).

Таким образом, на наиболее продолжительной низкоскоростной стадии совместного расширения-сжатия пузырьков, которая включает всю фазу расширения и следующую за ней большую часть фазы

сжатия, используется одна модель (модель динамики взаимодействующих пузырьков), а на высокоскоростной стадии их сжатия – другая (модель динамики одиночного пузырька, в которой движение пара и жидкости расщепляется на сферическую составляющую и ее малое несферическое возмущение).

4. Методика расчёта

Система уравнений (1)–(3) при заданных начальных значениях $R_i, \dot{R}_i, z_i, \dot{z}_i, a_{ni}, \dot{a}_{ni}$ решается численно высокоточным методом Дормана-Принса с автоматическим выбором шага интегрирования [6], а решение системы (4)–(7) отыскивается методом Годунова С.К. с применением подвижной сетки, равномерной в паре и неравномерной в жидкости [7].

Естественным способом стыковки решений соответствующих уравнений выглядит применение параметров решения уравнений модели (1)–(3) в конце низкоскоростной стадии сжатия в качестве начальных данных для уравнений модели (4)–(7), что и делается в настоящей работе. Однако финальная стадия сжатия пузырьков сильно зависит от того, какова в момент перехода от одной модели к другой масса пара в пузырьке, каковы поля термодинамических параметров в пузырьке и в окружающей жидкости. В модели взаимодействующих пузырьков эффекты испарения–конденсации в конце низкоскоростной стадии сжатия учитываются грубо, а теплопроводность пара и жидкости и неоднородность давления пара вообще не учитываются. Поэтому для корректного перехода от одной модели к другой масса пара в пузырьке, поля термодинамических параметров в пузырьке и в окружающей жидкости дополнительно рассчитываются по одномерной гидродинамической модели одиночного пузырька (4)–(7). Входными данными в этих расчетах являются параметры сферической составляющей решения, вычисленного по модели динамики взаимодействующих пузырьков на момент их максимального расширения.

5. Заключение.

Предложена новая математическая модель и методика расчёта динамики расположенных в жидкости в линию кавитационных пузырьков при их однократном сильном совместном расширении–сжатии в пучности давления интенсивной стоячей акустической волны. Данная математическая модель построена с учетом особенностей совместного расширения–сжатия кавитационных пузырьков и представляет собой сочетание двух моделей: модели динамики взаимодействующих пузырьков и модели динамики одиночного пузырька. Такое сочетание позволяет эффективно моделировать совместное сильное расширение–сжатие пузырьков с учетом таких эффектов как сжимаемость жидкости, нестационарная теплопроводность пара и жидкости, неравновесные испарение и конденсация на межфазной поверхности пузырьков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Putterman S.J., Weninger K.P. Sonoluminescence: How Bubbles Turn Sound into Light // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2000. – V. 32. – P. 445–476.
2. Аганин А.А., Давлетшин А.И., Топорков Д.Ю. Динамика расположенных в линию кавитационных пузырьков в интенсивной акустической волне // Вычислительные технологии. – 2014. – Т. 19, № 1. – С. 3–19.
3. Nigmatulin R.I, Akhatov I.Sh., Topolnikov A.S., Bolotnova R.Kh., Vakhitova N.K., Lahey R.T., Jr., Taleyarkhan R. The Theory of supercompression of vapor bubbles and nanoscale thermonuclear fusion // Phys. Fluids. – 2005. – V. 17, № 10. – P. 107106.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. – М: Наука, 1987.
5. Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния органических жидкостей на примере ацетона // ДАН. – 2007. – Т. 415, № 5. – С. 617–621.
6. Хайрер Э., Нерсетт С., Виннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М: Мир, 1990. – 512 с.
7. Aganin A. A. Dynamics of a small bubble in a compressible fluid // Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 2000. – V. 33. – P. 157–174.

REFERENCES

1. **Putterman S.J., Weninger K.P.** Sonoluminescence: How Bubbles Turn Sound into Light // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2000. – V. 32. – P. 445–476.
2. **Aganin A.A., Davletshin A.I., Toporkov D.Yu.** Dynamics of a line of cavitation bubbles in an intense acoustic wave [Dinamika raspolozhennyh v liniju kavitacionnyh puzyr'kov v intensivnoj akusticheskoy volne] // *Vychislitel'nye tehnologii.* – 2014. – V. 19, № 1. – P. 3–19 (in Russian).
3. **Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh., Topolnikov A.S., Bolotnova R.Kh., Vakhitova N.K., Lahey R.T., Jr., Taleyarkhan R.** The Theory of supercompression of vapor bubbles and nanoscale thermonuclear fusion // *Phys. Fluids.* – 2005. – V. 17, № 10. – P. 107106.
4. **Nigmatulin R.I.** Dynamics of multiphase medium [Dinamika mnogofaznyh sred]. – Moscow: Nauka, 1987. (in Russian)
5. **Nigmatulin R.I., Bolotnova R.Kh.** Wide-range equation of state for organic liquids: Acetone as an example // *Doklady Physics.* – 2007. – V. 52, № 8. – P. 442–446.
6. **Hairer E., Norsett S., Wanner G.** Solving ordinary differential equations I. Nonstiff problems. – Berlin: Springer Verlag, 1993.
7. **Aganin A. A.** Dynamics of a small bubble in a compressible fluid // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* – 2000. – V. 33. – P. 157–174.