

УДК 519.6

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА АБСОЛЮТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПО ЗАМЕРАМ ДЕБИТА НА СКВАЖИНЕ В УСЛОВИЯХ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ**А.В. ЕЛЕСИН, А.Ш. КАДЫРОВА***Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г. Казань**E-mail: elesin@mail.knc.ru***THE ABSOLUTE PERMEABILITY IDENTIFICATION ON THE WELL DEBIT MEASUREMENTS UNDER TWO-PHASE FILTRATION****A.V. ELESIN, A.Sh. KADYROVA***Institute of Mechanics and Engineering KazSC RAS, Kazan***Аннотация**

Рассматривается задача идентификации коэффициента абсолютной проницаемости пласта с различной структурой неоднородности по замерам дебита на скважине, работающей в режиме заданного давления, в условиях двухфазной фильтрации. Исследуется влияние числа и времени замеров на результаты идентификации.

Ключевые слова: Минимизация функции невязки, обратная задача, двухфазная фильтрация.

Summary

The absolute permeability identification on the well debit measurements is considered in reservoir with different by structure heterogeneity. The influence of number and time of measurements on the identification results is explored.

Key words: Minimization of residual function, inverse problem, two-phase filtration.

Введение.

Задача идентификации коэффициента абсолютной проницаемости нефтяного пласта относится к классу обратных коэффициентных задач. Одним из стандартных приёмов её решения является сведение к решению задачи минимизации функции невязки, которая, как правило, овражного типа, и её минимизация классическими методами затруднена. В [1, 2] были предложены двухшаговые методы минимизации функции невязки, построенные на основе метода Левенберга-Марквардта, которые были протестированы на модельных задачах идентификации коэффициента фильтрации водоносного пласта. В данной работе эти методы используются при восстановлении значений коэффициента абсолютной проницаемости нефтяного пласта в условиях двухфазной фильтрации по замерам дебита на скважине, работающей в режиме заданного давления. Решены модельные задачи, и исследовано влияние числа и времени замеров на результаты идентификации.

1. Двухфазная фильтрация.

Рассматривается двухфазная фильтрация несжимаемых жидкостей в трёхмерном пласте Ω без учета капиллярных и гравитационных сил. В этом случае процесс фильтрации описывается следующей системой уравнений

$$\operatorname{div}\mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(F\mathbf{U}) = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{U} = -(K_w + K_o)\operatorname{grad}p$ – суммарная скорость фильтрации, $K_w = k \frac{f_w}{\mu_w}$, $K_o = k \frac{f_o}{\mu_o}$, k – коэффициент абсолютной проницаемости, f_o, f_w – функции относительных фазовых проницаемостей, μ_o, μ_w – коэффициенты динамических вязкостей, p – давление, m – пористость, t – время, $S = S_w$ – насыщенность фазы w , $F = \frac{K_w}{K_o + K_w}$ – функция Баклея-Леверетта.

Для определения полей давления и насыщенности из решения системы (1), (2) задаются начальные и граничные условия:

$$S|_{t=0} = S^0, p|_{\Gamma_1} = p_\Gamma, \mathbf{U}\mathbf{n}|_{\Gamma_2} = U_\Gamma, F|_{\Gamma_{in}} = F_\Gamma, \quad (3)$$

где $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ – граница пласта Ω , Γ_{in} – часть границы пласта, через которую жидкость поступает в пласт.

Численное решение системы (1), (2) проводится по следующей схеме. На каждый момент времени: 1) определяется поле давления из решения уравнения (1) с учётом граничных условий при известном распределении насыщенности; 2) определяется поле насыщенности из решения уравнения (2) с учётом начальных и граничных условий при известном распределении давления.

Аппроксимация уравнения (1) проводится методом контрольных объёмов. Полученная система линейных алгебраических уравнений решается методом сопряженных градиентов с предобуславливанием в виде неполного разложения Холесского [3]. Для аппроксимации уравнения (2) используется схема "вверх по потоку". Поле насыщенности определяется по явной схеме.

2. Задача идентификации абсолютной проницаемости.

Задача идентификации коэффициента абсолютной проницаемости пласта, входящего в систему уравнений (1), (2), относится к классу обратных коэффициентных задач. Коэффициент абсолютной проницаемости аппроксимируется кусочно-постоянной функцией. Пласт разбивается на N зон однородности Ω_l , $\left(\Omega = \bigcup_{l=1}^N \Omega_l\right)$. В каждой зоне однородности Ω_l значение коэффициента абсолютной проницаемости k_l считается постоянным. В результате такой параметризации задача идентификации коэффициента абсолютной проницаемости заключается в определении N неизвестных значений k_l . Одним из стандартных методов решения этой обратной коэффициентной задачи является сведение её к задаче минимизации функции невязки, имеющей вид суммы квадратов разностей между модельными и замеренными значениями на скважинах дебитов, давления и др. функций состояния [4]. Запишем функцию невязки в виде

$$J(K) = \sum_{j=1}^M (Q_j - Q_j^*)^2, \quad (4)$$

где $K = \{\ln k_l\}_{l=1}^N$ – логарифмы идентифицируемых значений коэффициента абсолютной проницаемости, Q_j, Q_j^* – модельные и замеренные значения дебита на скважине в момент времени t_j (время j -го замера), M – число замеров на скважине.

Функция невязки, как правило, имеет овражную структуру, и для её минимизации часто используют различные варианты метода Левенберга-Марквардта. Для решения задачи идентификации коэффициента абсолютной проницаемости использовались следующие варианты.

Вариант 1 (ЛМ). Новые значения параметров на каждой итерации определяются по формуле

$$K^n = K^{n-1} - (H + \mu_n E)^{-1} g, \quad (5)$$

где E – единичная матрица, $H = A^T A$ – приближённая матрица вторых производных, $A = \left\{ \frac{\partial Q_j}{\partial K_i} \right\}$ – матрица чувствительности, g – градиент функции невязки, μ_n – параметр Марквардта, n – номер итерации. Начальное значение параметра Марквардта выбирается на порядок больше максимального сингулярного числа матрицы H . В случае уменьшения функции невязки на текущей итерации $J(K^n) < J(K^{n-1})$ параметр Марквардта уменьшается в два раза, в случае нарушения условия убывания параметр Марквардта увеличивается в два раза до тех пор, пока это условие не выполнится.

Вариант 2 (ДЛМ). Двухшаговый метод Левенберга-Марквардта [1]. В методе ДЛМ используется главная система координат, полученная с помощью сингулярного разложения $H = V \Sigma V^T \Sigma V$, где V – ортогональная матрица, $\Sigma = \text{diag} \{ \sigma_1, \dots, \sigma_N \}$ – диагональная матрица, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N \geq 0$ – сингулярные числа. Направления минимизации в главной системе координат условно делятся на две группы: направления, соответствующие большим сингулярным числам, и направления, соответствующие маленьким сингулярным числам. На первом шаге метода ДЛМ допускается увеличение функции невязки за счёт её увеличения в направлениях с большими сингулярными числами. Вдоль этих направлений проводится смещение параметров на втором шаге. На каждой итерации метода ДЛМ:

1) Проверяется условие $J(K^{n-1} + d^1) < J(K^{n-1})$, где $d^1 = -(H + \mu_n E)^{-1} g$. Если оно выполняется, то $K^n = K^{n-1} + d^1$, $\mu_{n+1} = \frac{\mu_n}{2}$, и итерация заканчивается, иначе выполняется пункт 2.

2) Проверяется условие $J(K^{n-1} + d^1 + d^2) < J(K^{n-1})$, где $d^2 = V \tilde{d}_V$, \tilde{d}_V – вектор с компонентами $\tilde{d}_{V_i} = -\frac{\tilde{g}_{V_i}}{\sigma_i + \mu_n}$, $i = 1, \dots, q$, $\tilde{d}_{V_i} = 0$, $i = q+1, \dots, N$, \tilde{g}_{V_i} – компоненты вектора $\tilde{g}_V = V^T \tilde{g}$, $\tilde{g} = A^T \tilde{R}$, \tilde{R} – вектор невязок в точке $K^{n-1} + d^1$, номер оси q выбирается из условия $\sigma_q > \mu_n \geq \sigma_{q+1}$. Если оно выполняется, то $K^n = K^{n-1} + d^1 + d^2$, $\mu_{n+1} = \frac{\mu_n}{2}$, и итерация заканчивается. В противном случае $\mu_n = 2\mu_n$, и повторяется пункт 1.

Отметим, что для определения вектора d^1 используются значения невязок в точке K^{n-1} , а для определения вектора d^2 – значения невязок в точке $K^{n-1} + d^1$. В обоих случаях используется матрица чувствительности A , вычисленная в точке K^{n-1} , что позволяет существенно сократить вычислительные затраты.

Вариант 3 (ДЛММ). Каждая итерация состоит из последовательности следующих операций [2]:

1. Вычисляется значение $J_1(\mu_n) = J(K^{n,1})$, где $K^{n,1} = K^{n-1} + d^1$, $d^1 = -(H + \mu_n E)^{-1} g$. При выполнении условия уменьшения функции невязки $J_1(\mu_n) < J(K^{n-1})$, новые значения переменных определяются, как $K^n = K^{n-1} + d^1$, параметр Марквардта уменьшается в два раза, и итерация заканчивается, иначе – переходим к пункту 2.

2. Проводится уменьшение функции невязки вдоль направлений, соответствующих большим сингулярным числам в главной системе координат. Последовательно вычисляются значения $J_t(\mu_n) = J(K^{n,t})$, $t = 2, 3, \dots$, где $K^{n,t} = K^{n,t-1} + d^t$, $K^{n,0} = K^{n-1}$, $d^t = V \tilde{s}_V$, $\tilde{s}_{V_i} = -\frac{\tilde{g}_{V_i}}{\sigma_i + \mu_n}$, $i = 1, \dots, q$, $\tilde{s}_{V_i} = 0$, $i = q+1, \dots, N$, \tilde{g}_{V_i} – компоненты вектора $\tilde{g}_V = V^T \tilde{g}$, $\tilde{g} = A^T \tilde{R}$, \tilde{R} – вектор невязок в точке $K^{n,t-1}$, q – число направлений в главной системе координат, вдоль которых проводится смещение параметров, q выбирается из условия $\sigma_q > \mu_n \geq \sigma_{q+1}$. Значения $J_t(\mu_n)$ вычисляются до тех пор, пока выполняется условие

$$J_{t-1}(\mu_n) - J_t(\mu_n) > 0.01 J_{t-1}(\mu_n). \quad (6)$$

Определим $J_{\mu_n} = \min \{ J_{t^*-1}(\mu_n), J_{t^*}(\mu_n) \}$, где t^* – значение t , при котором условие (5) нарушается. Если $J_{\mu_n} < J(K^{n-1})$, то новые значения параметров берутся для t , соответствующего J_{μ_n} , параметр Марквардта уменьшается в два раза, и итерация заканчивается. В противном случае параметр Марквардта увеличивается в два раза, и возвращаемся к пункту 1.

3. Численные примеры.

Рассматриваются модельные задачи идентификации коэффициента абсолютной проницаемости в

условиях нестационарной двухфазной фильтрации (нефть-вода). В центре цилиндрического пласта (радиус 200 м, мощность 10 м) расположена несовершенная скважина. Скважина вскрывает нижнюю половину пласта. Через внешнюю боковую поверхность верхней половины в пласт поступает вода. Кровля и подошва пласта непроницаемы. На скважине задано давление 20 МПа, на участках границы, через которые в пласт поступает вода, давление 10 МПа. Функции относительных фазовых проницаемостей задаются в виде $f_o = (1 - \bar{S})^4$, $f_w = 0.3\bar{S}^4$, $\bar{S} = \frac{S - S_{min}}{S_{max} - S_{min}}$, $S_{min} = 0.2$ – связанная водонасыщенность, $S_{max} = 0.8$ – предельная водонасыщенность. Коэффициенты динамических вязкостей нефти и воды соответственно равны $\mu_o = 15 \text{ мПа} \cdot \text{с}$, $\mu_w = 1 \text{ мПа} \cdot \text{с}$. Пористость пласта считается постоянной $m = 0.3$. Начальная водонасыщенность $S^0 = 0.2$. В первой модельной задаче 3 кольцевые зоны однородности коэффициента абсолютной проницаемости: $k_1 = 1 \text{ мкм}^2$, $k_2 = 0.1 \text{ мкм}^2$, $k_3 = 0.5 \text{ мкм}^2$. В второй модельной задаче 10 кольцевых зон: $k_l : 0.1 \text{ мкм}^2 - 1.5 \text{ мкм}^2$. В третьей модельной задаче пласт состоит из трёх однородных слоёв с проницаемостями 1 мкм^2 , 0.01 мкм^2 , 1.5 мкм^2 .

Процесс минимизации функции невязки во всех модельных задачах прерывался по достижению заданной точности по дебиту

$$\max_j |Q_j - Q_j^*| < 10^{-8} \text{ м}^3/\text{с}.$$

Модельные задачи строились с различным числом замеров дебита в разные периоды работы скважины. Первая модельная задача решалась с замерами дебита через каждые сутки (1001 замер) и через каждые десять суток (101 замер) в течение от 0 до 1000 суток и в течение от 1000 до 2000 суток эксплуатации скважины. Вторая модельная задача решалась в те же периоды работы скважины с замерами дебита через каждые сутки (1001 замер). Третья модельная задача решалась с замерами дебита через каждые сутки (1001 замер), через каждые десять суток (101 замер) и через каждые двадцать суток в течение первых 1000 суток работы скважины. Число итераций, выполненных в процессе минимизации методом Левенберга-Марквардта (ЛМ), двухшаговым методом Левенберга-Марквардта (ДЛМ) и модифицированным двухшаговым методом Левенберга-Марквардта (ДЛММ), для каждой модельной задачи приведены в табл. 1–3.

Табл. 1: Первая модельная задача.

число замеров	0-1000 суток			1000-2000 суток		
	ЛМ	ДЛМ	ДЛММ	ЛМ	ДЛМ	ДЛММ
101	21	21	18	227	51	36
1001	19	19	18	214	52	36

Табл. 2: Вторая модельная задача.

число замеров	0-1000 суток		1000-2000 суток	
	ЛМ	ДЛММ	ЛМ	ДЛММ
1001	93	40	286	42

Табл. 3: Третья модельная задача.

число замеров	ЛМ	ДЛМ	ДЛММ
101	31	29	27
501	31	29	28
1001	не сошёлся	не сошёлся	не сошёлся

Во всех модельных задачах наилучшие результаты минимизации получены модифицированным двухшаговым методом Левенберга-Марквардта.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мазуров П.А., Елесин А.В., Кадырова А.Ш.** Квазиньютоновский двухшаговый метод минимизации функции невязки // Вычислительные методы и программирование. – 2009. – Т. 10, № 1. – С. 75–82.
2. **Елесин А.В., Кадырова А.Ш.** Модифицированные двухшаговые методы Левенберга-Марквардта в задачах идентификации коэффициента фильтрации // Вычислительные методы и программирование. – 2013. Т. 14, № 1. – С. 362–369.
3. **Larabi A., De Smedt F.** Solving three-dimensional hexahedral finite element groundwater models by preconditioned conjugate gradient methods // Water Resour. Res. – 1994. – V. 30, – No. 2. – P. 509–521.
4. **Sun N.-Z.** Inverse Problems in Groundwater Modeling. Kluwer Acad., Norwell, Mass., 1994. – 337 p.

REFERENCES

1. **Mazurov P.A., Elesin A.V., Kadyrova A.Sh.** A quasi-Newton two-step method for the residual function minimization [Kvazin'yutonovskiy dvuhshagoviy metod minimizacii funkicii nevyazki] // Vychislitel'nye Metody i Programirovanie. – 2009. – V. 10, № 1. – P. 64–71 (in Russian).
2. **Elesin A.V., Kadyrova A.Sh.** Modified two-step Levenberg-Marquardt methods in the hydraulic conductivity identification problem [Modificirovannye dvuhshagovye metody Levenberga-Markvardta v zadachah identifikacii koefficienta filtracii] // Vychislitel'nye Metody i Programirovanie. – 2013. – V. 14, № 1. – P. 370–374 (in Russian).
3. **Larabi A., De Smedt F.** Solving three-dimensional hexahedral finite element groundwater models by preconditioned conjugate gradient methods // Water Resour. Res. – 1994. – V. 30. – No. 2. – P. 509–521.
4. **Sun N.-Z.** Inverse Problems in Groundwater Modeling. Kluwer Acad., Norwell, Mass., – 1994. – 337 p.