

УДК 539.3

**УНИВЕРСАЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ РАСЧЕТА МНОГОСЛОЙНЫХ  
ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ<sup>1)</sup>**

**Д.В. БЕРЕЖНОЙ, Л.Р. ФАХРУТДИНОВ, А.К. ГАБИМОВА**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет*

*E-mail berezhnoi.dmitri@mail.ru; bishchumbek@gmail.com; mech.ayten@gmail.com*

**UNIVERSAL FINITE ELEMENT FOR LAYERED THIN-SHELL CONSTRUCTIONS WITH COMPLEX  
GEOMETRY**

**D.V. BEREZHNOI, L.R. FAKHRUTDINOV, A.K. GABIMOVA**

*Kazan Federal University*

**Аннотация**

В работе построен конечный элемент для расчета многослойных пластин и оболочек на основе модификации трехмерного изопараметрического конечного элемента сплошной среды, квадратичного в плане и линейного по толщине. При построении матрицы жесткости элемента реализуется гипотеза малости напряжений обжатия и используется метод двойной аппроксимации деформаций по точкам суперсходимости. В качестве примера решена задача деформирования многослойной оболочки, моделирующей корпус легкомоторного самолета, под действием некоторой комбинации силовых нагрузок, возникающих при взлете.

**Ключевые слова:** конечный элемент, многослойные пластины, геометрическая нелинейность

**Summary**

In the article a finite element for calculation of laminated plates and shells is constructed. It based on the modification of three-dimensional isoparametric finite element of a continuum, quadratic in the plane and linear through thickness. Stiffness matrix of the element is constructed using the method of double approximation of deformations on superconvergence points, hypothesis of small compression stresses is realized. As an example, we solve the problem of deformation of the multilayered shell, simulating light aircraft body, under the action of a certain combination of power loads, that arise during takeoff.

**Key words:** finite element, laminated plates, geometric nonlinearity.

---

Построение физических моделей многослойных ортотропных пластин и оболочек связано с использованием, в основном, двух подходов. Первый основан на применении различных гипотез для каждого слоя оболочки [1–3], второй – на применении единых гипотез для всех слоев тонкостенной конструкции [2, 4–9]. В последнее время многослойные конечные элементы получают на основе трехмерного конечного элемента сплошной среды с линейной аппроксимацией по толщине [10], построение матрицы жесткости которого связано с использованием ряда оболочечных гипотез. Применение подобных подходов к расчету пластин и оболочек можно найти в работах [11–16]. Узлы в подобных конечных элементах располагаются либо на срединной поверхности и в качестве степеней свободы кроме проекций вектора перемещений используют и углы поворота нормального волокна [17–19], либо лицевых поверхностях

---

<sup>1)</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00955, 12-01-97026, 12-01-31212, 13-01-97057, 13-01-97058)

конечного элемента [19–28] (в этом случае в качестве степеней свободы используются только проекции вектора перемещений).

В данной работе для используемого при однослойном моделировании оболочечной конструкции конечного элемента вводятся изопараметрические аппроксимации геометрии и перемещений. Матрица жесткости вычисляется численно по квадратурной формуле Гаусса–Лежандра, в каждой квадратурной точке вводится статическая гипотеза, обычно используемая для оболочек средней толщины, об отсутствии влияния поперечного напряжения на мембранные, изгибные и деформации поперечного сдвига. Для устранения эффекта заклинивания предполагается использование метода двойной аппроксимации по точкам суперсходимости. Результаты тестовых расчетов [11–18, 21] показывают приемлемость применения данной методики для определения напряженно-деформируемого состояния тонкостенных многослойных конструкций. Для иллюстрации приведены некоторые результаты статического расчета гондолы легкомоторного самолета.

Для ортотропных материалов вводится система ортогональных декартовых координат  $\alpha, \beta, \gamma$ , определяющая оси ортотропии. Относительно этих осей определяются деформации  $\varepsilon_{\alpha\alpha}, \varepsilon_{\beta\beta}, \varepsilon_{\gamma\gamma}, \gamma_{\alpha\beta}, \gamma_{\beta\gamma}, \gamma_{\gamma\alpha}$  и напряжения  $\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{\gamma\gamma}, \tau_{\alpha\beta}, \tau_{\beta\gamma}, \tau_{\gamma\alpha}$ , которые связаны между собой обобщенным законом Гука в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{E_\alpha} (\sigma_{\alpha\alpha} - \mu_{\alpha\beta}\sigma_{\beta\beta} - \mu_{\alpha\gamma}\sigma_{\gamma\gamma}), \quad \varepsilon_{\beta\beta} = \frac{1}{E_\beta} (\sigma_{\beta\beta} - \mu_{\beta\gamma}\sigma_{\gamma\gamma} - \mu_{\beta\alpha}\sigma_{\alpha\alpha}), \\ \varepsilon_{\gamma\gamma} &= \frac{1}{E_\gamma} (\sigma_{\gamma\gamma} - \mu_{\gamma\beta}\sigma_{\alpha\alpha} - \mu_{\gamma\beta}\sigma_{\beta\beta}), \quad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{G_{\alpha\beta}}\tau_{\alpha\beta}, \quad \gamma_{\beta\gamma} = \frac{1}{G_{\beta\gamma}}\tau_{\beta\gamma}, \quad \gamma_{\gamma\alpha} = \frac{1}{G_{\gamma\alpha}}\tau_{\gamma\alpha}, \end{aligned}$$

причем

$$\frac{\mu_{\alpha\beta}}{E_\alpha} = \frac{\mu_{\beta\alpha}}{E_\beta}, \quad \frac{\mu_{\beta\gamma}}{E_\beta} = \frac{\mu_{\gamma\beta}}{E_\gamma}, \quad \frac{\mu_{\gamma\alpha}}{E_\gamma} = \frac{\mu_{\alpha\gamma}}{E_\alpha}.$$

Если обозначить приведенные векторы деформаций в осях  $x, y, z$  и  $\alpha, \beta, \gamma$  как

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}, \quad \{\varepsilon_\alpha\}^T = \{\varepsilon_{\alpha\alpha}, \varepsilon_{\beta\beta}, \varepsilon_{\gamma\gamma}, \gamma_{\alpha\beta}, \gamma_{\beta\alpha}, \gamma_{\gamma\alpha}\};$$

и приведенные векторы напряжений в тех же осях как

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}, \quad \{\sigma_\alpha\}^T = \{\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{\gamma\gamma}, \tau_{\alpha\beta}, \tau_{\beta\gamma}, \tau_{\gamma\alpha}\},$$

то соотношения упругости можно записать в матричном виде

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}, \quad \{\sigma_\alpha\} = [D_\alpha] \{\varepsilon_\alpha\}.$$

Если ввести в рассмотрение направляющие косинусы  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta_x, \beta_y, \beta_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$  между осями  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $x, y, z$ , то справедливы зависимости

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \varepsilon_{xx}\alpha_x^2 + \varepsilon_{yy}\alpha_y^2 + \varepsilon_{zz}\alpha_z^2 + \gamma_{xy}\alpha_x\alpha_y + \gamma_{yz}\alpha_y\alpha_z + \gamma_{zx}\alpha_z\alpha_x, \\ \varepsilon_{\beta\beta} &= \varepsilon_{xx}\beta_x^2 + \varepsilon_{yy}\beta_y^2 + \varepsilon_{zz}\beta_z^2 + \gamma_{xy}\beta_x\beta_y + \gamma_{yz}\beta_y\beta_z + \gamma_{zx}\beta_z\beta_x, \\ \varepsilon_{\gamma\gamma} &= \varepsilon_{xx}\gamma_x^2 + \varepsilon_{yy}\gamma_y^2 + \varepsilon_{zz}\gamma_z^2 + \gamma_{xy}\gamma_x\gamma_y + \gamma_{yz}\gamma_y\gamma_z + \gamma_{zx}\gamma_z\gamma_x, \\ \gamma_{\alpha\beta} &= 2\varepsilon_{xx}\alpha_x\beta_x + 2\varepsilon_{yy}\alpha_y\beta_y + 2\varepsilon_{zz}\alpha_z\beta_z + \gamma_{xy}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + \gamma_{yz}(\alpha_y\beta_z + \alpha_z\beta_y) + \gamma_{zx}(\alpha_z\beta_x + \alpha_x\beta_z), \\ \gamma_{\beta\gamma} &= 2\varepsilon_{xx}\beta_x\gamma_x + 2\varepsilon_{yy}\beta_y\gamma_y + 2\varepsilon_{zz}\beta_z\gamma_z + \gamma_{xy}(\beta_x\gamma_y + \beta_y\gamma_x) + \gamma_{yz}(\beta_y\gamma_z + \beta_z\gamma_y) + \gamma_{zx}(\beta_x\gamma_z + \beta_z\gamma_x), \\ \gamma_{\gamma\alpha} &= 2\varepsilon_{xx}\gamma_x\alpha_x + 2\varepsilon_{yy}\gamma_y\alpha_y + 2\varepsilon_{zz}\gamma_z\alpha_z + \gamma_{xy}(\gamma_x\alpha_y + \gamma_y\alpha_x) + \gamma_{yz}(\gamma_y\alpha_z + \gamma_z\alpha_y) + \gamma_{zx}(\gamma_x\alpha_z + \gamma_z\alpha_x), \end{aligned}$$

которые можно переписать как

$$\{\varepsilon_\alpha\} = [T] \{\varepsilon\}.$$

В этом случае матрица упругих постоянных  $[D]$ , в случае заданной матрицы  $[D_\alpha]$ , определяется по отношению

$$[D] = [T]^T [D_\alpha] [T].$$

Предлагаемый многослойный конечный элемент представляет собой искривленный параллелепипед, состоящий из набора  $N$  слоев по толщине, каждый из которых является ортотропным материалом с осями ортотропии  $\alpha, \beta, \gamma$ . При этом предполагается, что плоскость  $\alpha, \beta$  параллельна плоскости локальных координат  $\xi, \eta$ , вдоль любой прямой по толщине, т.е. ось ортотропии  $\gamma$  параллельна локальной координате  $\zeta$  (рис. 1).

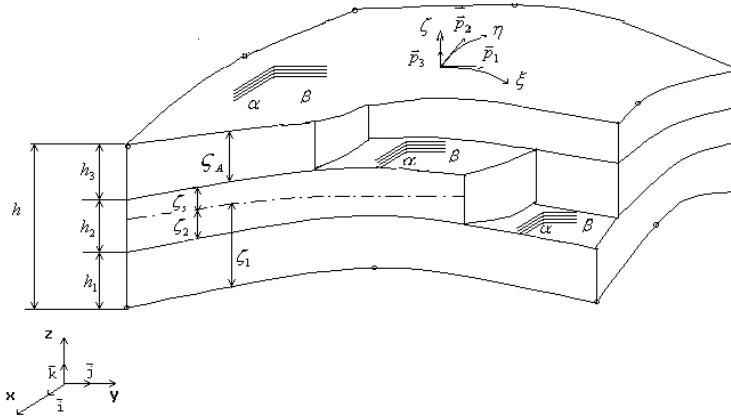


Рис. 1: Многослойный конечный элемент

Вводится в рассмотрение система ортогональных ортов  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ , таким образом, что  $\vec{p}_1$  направлен по касательной к координатной линии  $\xi$ , а  $\vec{p}_3$  — перпендикулярен поверхности  $\xi, \eta$ , т.е. направлен вдоль координатной линии  $\zeta$ :

$$\vec{p}_1 = \partial \vec{r} / \partial \xi / |\partial \vec{r} / \partial \xi|, \quad \vec{p}_3 = (\partial \vec{r} / \partial \xi) \times (\partial \vec{r} / \partial \eta) / |(\partial \vec{r} / \partial \xi) \times (\partial \vec{r} / \partial \eta)|, \quad \vec{p}_2 = \vec{p}_3 \times \vec{p}_1.$$

Ориентация осей  $\alpha, \beta$ , лежащих в плоскости  $\vec{p}_1 - \vec{p}_2$  задается в виде угла  $\phi$  между  $\vec{p}_1$  и осью  $\alpha$ . Для построения матрицы жесткости необходимо определить матрицу физических соотношений  $[D]$  в законе Гука для напряжений и деформаций относительно глобальных осей  $x, y, z$  через матрицу упругих констант  $[D_\alpha]$ , определяющую закон Гука в осях ортотропии. Для этого следует ввести в рассмотрение матрицу "поворотов деформаций" на угол  $\phi$  в плоскости  $\alpha, \beta - [T_\alpha]$ , для которой справедливо выражение

$$[T_\alpha] = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & 0 & \sin \phi \cos \phi & 0 & 0 \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & 0 & -\sin \phi \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \sin \phi \cos \phi & 2 \sin \phi \cos \phi & 0 & \cos^2 \phi - \sin^2 \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

Также вводится "матрица поворотов" деформаций из системы  $x, y, z$  с ортами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  в систему с ортами  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ :

$$[T_p] = \begin{bmatrix} p_{1x}^2 & p_{1y}^2 & p_{1z}^2 & p_{1x}p_{1y} & p_{1y}p_{1z} & p_{1z}p_{1x} \\ p_{2x}^2 & p_{2y}^2 & p_{2z}^2 & p_{2x}p_{2y} & p_{2y}p_{2z} & p_{2z}p_{2x} \\ p_{3x}^2 & p_{3y}^2 & p_{3z}^2 & p_{3x}p_{3y} & p_{3y}p_{3z} & p_{3z}p_{3x} \\ 2p_{1x}p_{2x} & 2p_{1y}p_{2y} & 2p_{1z}p_{2z} & p_{1x}p_{2y} + p_{2x}p_{1y} & p_{1y}p_{2z} + p_{2y}p_{1z} & p_{1z}p_{2x} + p_{2z}p_{1x} \\ 2p_{2x}p_{3x} & 2p_{2y}p_{3y} & 2p_{2z}p_{3z} & p_{2x}p_{3y} + p_{3x}p_{2y} & p_{2y}p_{3z} + p_{3y}p_{2z} & p_{2z}p_{3x} + p_{3z}p_{2x} \\ 2p_{3x}p_{1x} & 2p_{3y}p_{1y} & 2p_{3z}p_{1z} & p_{3x}p_{1y} + p_{1x}p_{3y} & p_{3y}p_{1z} + p_{1y}p_{3z} & p_{3z}p_{1x} + p_{1z}p_{3x} \end{bmatrix}$$

В результате матрица упругих характеристик  $[D]$  будет вычисляться в виде

$$[D] = [T_p]^T [T_\alpha]^T [D_\alpha] [T_\alpha] [T_p]$$

В глобальной декартовой системе координат  $x, y, z$  предлагаемый КЭ представляет собой искривленный параллелепипед, у которого верхняя и нижняя поверхности существенно искривлены, а четыре боковые грани являются линейчатыми поверхностями (рис. 2)

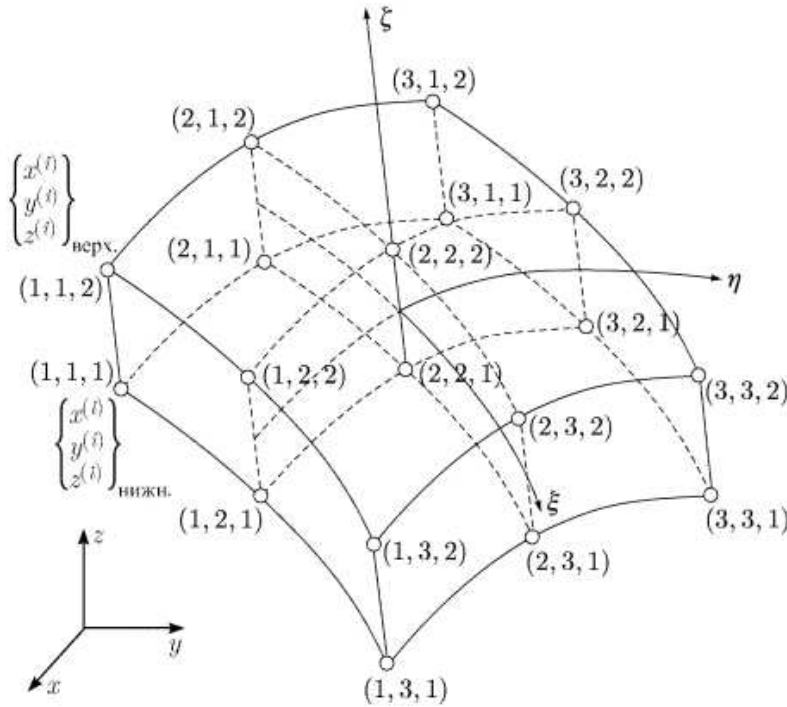


Рис. 2: Тройная нумерация узлов КЭ

Для удобства построения подобного КЭ вводится тройная нумерация узлов в соответствии с рис. 2. Радиус-вектор аппроксимируется в виде биквадратичного полинома по координатам  $\xi, \eta$  и линейного – в поперечном направлении (по толщине):

$$\vec{r}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{s=1}^N \sum_{m,n=1}^3 \sum_{k=1}^2 \vec{r}(\xi^{(m)}, \eta^{(n)}, \zeta^{(k)}) H_n(\xi) H_m(\eta) L_k^s(\zeta),$$

где  $H_n(\xi)$ ,  $H_m(\eta)$  и  $L_k(\zeta)$  задаются соотношениями

$$H_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1), \quad H_2(\xi) = 1 - \xi^2, \quad H_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1), \quad L_1^s(\zeta) = \frac{\zeta_{s+1} - \zeta}{\zeta_{s+1} - \zeta_s}, \quad L_2^s(\zeta) = \frac{\zeta - \zeta_s}{\zeta_{s+1} - \zeta_s}.$$

Вектор перемещений определяется в виде

$$\vec{v}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{s=1}^N \sum_{m,n=1}^3 \sum_{k=1}^2 \vec{v}(\xi^{(m)}, \eta^{(n)}, \zeta^{(k)}) H_n(\xi) H_m(\eta) L_k^s(\zeta),$$

что обеспечивает линейное изменение перемещений по толщине оболочки. При вычислении деформаций через перемещения используется метод двойной аппроксимации, в результате применения которого получим соотношения для деформаций, используемых при численном интегрировании матрицы жесткости

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi} &= \sum_{s=1}^N \sum_{i,j,m=1}^3 \sum_{k=1}^2 H_{mj}(\xi) H_i(\eta) L_k^s(\zeta) \vec{r}(\xi^{(i)}, \eta^{(m)}, \zeta^{(k)}) \cdot \vec{v}(\xi^{(j)}, \eta^{(j)}, \zeta^{(k)}), \\ \tilde{\varepsilon}_{\eta\eta} &= \sum_{s=1}^N \sum_{i,j,m=1}^3 \sum_{k=1}^2 H_j(\xi) H_{mi}(\eta) L_k^s(\zeta) \vec{r}(\xi^{(m)}, \eta^{(j)}, \zeta^{(k)}) \cdot \vec{v}(\xi^{(i)}, \eta^{(j)}, \zeta^{(k)}), \end{aligned}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\zeta\zeta} = \sum_{s=1}^N \sum_{i,j=1}^3 \sum_{l,k=1}^2 H_i(\xi) H_j(\eta) L_l^{s'} \left( \frac{\zeta_s + \zeta_{s+1}}{2} \right) L_k^{s'} \left( \frac{\zeta_s + \zeta_{s+1}}{2} \right) \vec{r}(\xi^{(i)}, \eta^{(j)}, \zeta^{(l)}) \cdot \vec{v}(\xi^{(i)}, \eta^{(j)}, \zeta^{(k)}),$$

$$\tilde{\gamma}_{\xi\eta} = \sum_{s=1}^N \sum_{i,j,m=1}^3 \sum_{k=1}^2 (P_{jn}(\xi) P_{mi}(\eta) + P_{nj}(\xi) P_{im}(\eta)) L_k^s(\zeta) \vec{r}(\xi^{(m)}, \eta^{(n)}, \zeta^{(k)}) \cdot \vec{v}(\xi^{(i)}, \eta^{(j)}, \zeta^{(k)}),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{\xi\zeta} = & \sum_{s=1}^N \sum_{i,j,n=1}^3 \sum_{l,k=1}^2 H_i(\eta) \left\{ P_{nj}(\xi) L_l^{s'} \left( \frac{\zeta_s + \zeta_{s+1}}{2} \right) L_k^s \left( \frac{\zeta_s + \zeta_{s+1}}{2} \right) + \right. \\ & \left. + P_{jn}(\xi) L_l^s \left( \frac{\zeta_s + \zeta_{s+1}}{2} \right) L_k^{s'} \left( \frac{\zeta_s + \zeta_{s+1}}{2} \right) \right\} \times \vec{r}(\xi^{(i)}, \eta^{(n)}, \zeta^{(l)}) \cdot \vec{v}(\xi^{(i)}, \eta^{(j)}, \zeta^{(k)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{\eta\zeta} = & \sum_{s=1}^N \sum_{i,j,n=1}^3 \sum_{l,k=1}^2 H_j(\xi) \left\{ P_{ni}(\eta) L_l^{s'} \left( \frac{\zeta_s + \zeta_{s+1}}{2} \right) L_k^s \left( \frac{\zeta_s + \zeta_{s+1}}{2} \right) + \right. \\ & \left. + P_{in}(\eta) L_l^s \left( \frac{\zeta_s + \zeta_{s+1}}{2} \right) L_k^{s'} \left( \frac{\zeta_s + \zeta_{s+1}}{2} \right) \right\} \times \vec{r}(\xi^{(n)}, \eta^{(j)}, \zeta^{(l)}) \cdot \vec{v}(\xi^{(i)}, \eta^{(j)}, \zeta^{(k)}), \end{aligned}$$

где  $H_{mj}(\xi)$  определяется соотношениями

$$H_{nj}(\xi) = \frac{1}{2} (1 - \xi\sqrt{3}) H'_n(\xi^{(1)}) H'_j(\xi^{(1)}) + \frac{1}{2} (1 + \xi\sqrt{3}) H'_n(\xi^{(2)}) H'_j(\xi^{(2)}),$$

а  $P_{nj}(\xi)$  – соотношениями

$$P_{nj}(\xi) = \frac{1}{2} (1 - \xi\sqrt{3}) H_n(\xi^{(1)}) H'_j(\xi^{(1)}) + \frac{1}{2} (1 + \xi\sqrt{3}) H_n(\xi^{(2)}) H'_j(\xi^{(2)}).$$

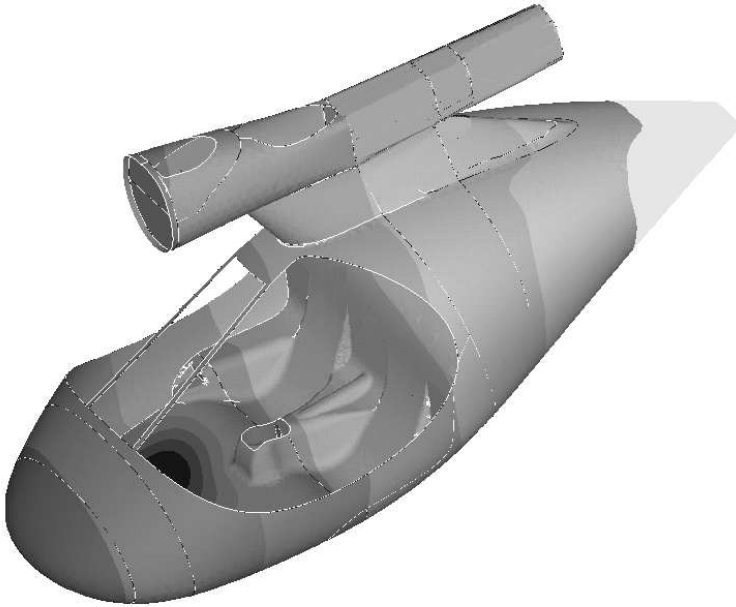


Рис. 3: Распределение прогибов в корпусе легкомоторного самолета под действием комбинации силовых нагрузок, возникающих при взлете

На основе предложенной методики расчета многослойных ортотропных оболочек был проведен статический расчет гондолы легкомоторного самолета для различных расчетных случаев силового нагружения. На рис. 3 для одного из этих случаев приведено распределение прогибов (относительно центра тяжести) конструкции.

Предложенная численная методика расчета напряженно-деформированного ортотропных и многослойных оболочек дает результаты, хорошо согласующиеся с теоретическими значениями и результатами других авторов [11–14], практична и удобна в использовании. Поэтому на ее основе можно рассчитывать элементы многослойных конструкций и получать достоверные результаты.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Болотин В.В., Новичков Ю.Н.** Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. **Григолюк Э.И., Куликов Г.М.** Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
3. **Соловьев С.С.** Конечно-элементная модель многослойной оболочки с анизотропными слоями переменной толщины // Известия Вузов. Авиационная техника. – 1989. – №4. – С. 71–75.
4. **Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г.** Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
5. **Васильев В.В.** Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 270 с.
6. **Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П.** Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наукова Думка, 1987. – 216 с.
7. **Пискунов В.Г.** Расчет неоднородных оболочек и пластин методом конечных элементов. – Киев: Вища Школа, 1987. – 200 с.
8. **Рикардс Р.Б.** Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Знание, 1988. – 284 с.
9. **Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А.** Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – Киев: Вища школа, 1986. – 191 с.
10. **Голованов А.И., Сагдатуллин М.К.** Трехмерный конечный элемент для расчета тонкостенных конструкций // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия физико-математические науки. – 2009. – Т. 151, кн. 3 – С. 121–129.
11. **Бережной Д.В., Сагдатуллин М.К., Голованов А.И.** Многослойный ортотропный конечный элемент оболочек средней толщины // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2011. – № 3 (57), Вып. 1. – С. 9–19.
12. **Бережной Д.В., Сагдатуллин М.К., Саченков А.А.** Расчет комбинированных конструкций методом конечных элементов. // Научно-технический вестник Поволжья. – 2012. – № 4. – С. 13–16.
13. **Бережной Д.В., Сагдатуллин М.К., Саченков А.А.** Универсальный конечный элемент для расчета комбинированных конструкций // Вестник Казанского государственного технологического университета. – 2012. – № 17. – С. 150–157.
14. **Бережной Д.В., Сагдатуллин М.К.** Трехмерный конечный элемент для расчета оболочек средней толщины // Вестник Казанского технологического университета. – 2013. – Т. 16, № 9. – С. 256–261.
15. **Sagdatullin M.K., Berezhnoi D.V.** Statement of the Problem of Numerical Modelling of Finite Deformations // Applied Mathematical Sciences. – 2014. – V. 8, № 35 – P. 1731–1738.
16. **Sagdatullin M.K., Berezhnoi D.V.** Nonlinear Problem on Hyperelastic Deformation of the Shell of Average Thickness FEM. // Applied Mathematical Sciences – 2014. – V. 8, № 60 – P. 2965–2972.
17. **Голованов А.И., Песошин А.В., Тюленева О.Н.** Современные конечно-элементные модели и методы исследования тонкостенных конструкции. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2005. – 442 с.
18. **Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.** Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 392 с.
19. **Yang H.T.Y., S. Saigal S., Masud A., Kapania R.K.** A survey of recent shell finite elements. // Int. J. for numerical methods in engineering. – 2000. – V. 47. – P. 101–127.

20. **Сахаров А.С., Кислоокый В.Н., Киричевский В.В., Альтенбах И., Габберт У., Данкерт Ю., Кеплер Х., Кочык З.** Метод конечных элементов в механике твердых тел. – Киев: Вища шк., 1982. – 480 с.
21. **Бережной Д.В.** Искривленный конечный элемент пластин и оболочек средней толщины с учетом обжатия // Труды XVII междунар. конф. по теории оболочек и пластин. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1996. – Т. 2. – С. 94–99.
22. **Гуриелидзе М.Г., Голованов А.И.** Расчет толстостенных оболочек с учетом больших деформаций. // Труды XVII междунар. конф. по теории оболочек и пластин. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1996. – Т. 2. – С. 118–123.
23. **Голованов А.И., Гуриелидзе М.Г.** Пошаговая постановка решения геометрически нелинейной задачи МКЭ // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. – Москва, 1998. – С. 82–87.
24. **Баженов В.А., Сахаров А.С., Цыхановский В.К.** Моментная схема метода конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды // Прикл. механика. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 24–63.
25. **Конюхов А.В., Коноплев Ю.Г.** Модель термогиперупругости и ее применение к исследованию потери устойчивости раздуваемых пластин // Изв. вузов. Авиац. техника. – 2006. – № 4. – С. 7–13.
26. **Kara N., Kumbasar N.** Three dimensional finite element for thick shells of general shape. // Int. J. for Physical and Engineering Sciences. – 2001. – V. 52. – P. 1–7.
27. **de Sousa R.J.A., Cardoso R.P.R., Valente R.A.F., Yoon J.-W., Gracio J. J., Jorge R.M.N.** A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid-shell element with multiple integration points along thickness: Part I - geometrically linear applications // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. – 2005. – V. 62, № 7. – P. 952–977.
28. **Sze K.Y.** Three-dimensional continuum finite element models for plate/shell analysis // Prog. Struct. Engng Mater. – 2002. – V. 4. – P. 400–407.

## REFERENCES

1. **Bolotin V.V, Novichkov Yu.N.** Mekhanika mnogosloynnykh konstruksiy [Mechanics of multilayered constructions]. – Moscow: Mashinostroyeniye, 1980. – 375 p. (in Russian)
2. **Grigolyuk E.I., Kulikov G.M.** Mnogosloynnye armirovannyye obolochki. Raschet pnevmaticheskikh shin [Multilayered reinforced shells. Calculation of pneumatic tires]. – Moscow: Mashinostroyeniye, 1988. – 288 p. (in Russian)
3. **Solov'yev S.S.** Finite element model of a multilayered shell with anisotropic layers of variable thickness [Konechno-elementnaya model' mnogosloynnoy obolochki s anizotropnymi sloyami peremennoy tolshchiny] // Izvestiya Vuzov. Aviatsionnaya tekhnika. – 1989. – № 4. – P. 71–75. (in Russian)
4. **Alfutov N.A., Zinov'yev P.A., Popov B.G.** Calculation of laminated plates and shells from composite materials [Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов]. – Moscow: Mashinostroyeniye, 1984. – 264 p. (in Russian)
5. **Vasil'yev V.V.** Mechanics of composite structures [Mekhanika konstruksiy iz kompozitsionnykh materialov]. – Moscow: Mashinostroyeniye, 1988. – 270 p. (in Russian)
6. **Grigorenko YA.M., Vasilenko A.T., Golub G.P.** Statics of anisotropic shells with finite shear stiffness [Statika anizotropnykh obolochek s konechnoy sdvigovoy zhestkost'yu]. – Kiev: Naukova Dumka, 1987. – 216 p. (in Russian)
7. **Piskunov V.G.** Calculation of non-uniform shells and plates using finite element method [Расчет неоднородных оболочек и пластин методом конечных элементов]. – Kiev: Vishcha Shkola, 1987. – 200 p. (in Russian)

8. **Rikards R.B.** Finite element method in the theory of shells and plates [Metod konechnykh elementov v teorii obolochek i plastin]. – Riga: Znaniye, 1988. – 284 p. (in Russian)
9. **Rasskazov A.O., Sokolovskaya I.I., Shul'ga N.A.** Theory and calculation of layered orthotropic plates and shells [Teoriya i raschet sloistyykh ortotropnykh plastin i obolochek]. – Kiev: Vishcha shkola, 1986. – 191 p. (in Russian)
10. **Golovanov A.I., Sagdatullin M.K.** Three-dimensional finite element for calculation of thin-shell constructions [Trehmernyy konechnyy element dlya rascheta tonkostennykh konstruksiy] // Uchenyye zapiski Kazanskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskiye nauki. – 2009. – V. 151, Book 3 – P. 121–129. (in Russian)
11. **Berezhnoy D.V., Sagdatullin M.K., Golovanov A.I.** Multilayered orthotropic finite element for shells of average thickness [Mnogosloynny ortotropny konechnyy element obolochek sredney tolshchiny] // Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. – 2011. – № 3 (57), Is. 1. – P. 9–19. (in Russian)
12. **Berezhnoy D.V., Sagdatullin M.K., Sachenkov A.A.** Calculation of the combined constructions using finite element method [Raschet kombinirovannykh konstruksiy metodom konechnykh elementov] // Nauchno-tekhnicheskii vestnik Povolzh'ya. – 2012. – № 4. – P. 13–16. (in Russian)
13. **Berezhnoy D.V., Sagdatullin M.K., Sachenkov A.A.** Universal finite element for calculation of the combined constructions [Universal'nyy konechnyy element dlya rascheta kombinirovannykh konstruksiy] // Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta. – 2012. – № 17. – P. 150–157. (in Russian)
14. **Berezhnoy D.V., Sagdatullin M.K.** Three-dimensional finite element for calculation of shells of average thickness [Trehmernyy konechnyy element dlya rascheta obolochek sredney tolshchiny] // Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta. – 2013. – V. 16, № 9. – P. 256–261. (in Russian)
15. **Sagdatullin M.K., Berezhnoi D.V.** Statement of the Problem of Numerical Modelling of Finite Deformations. // Applied Mathematical Sciences. – 2014. – V. 8, № 35 – P. 1731–1738.
16. **Sagdatullin M.K., Berezhnoi D.V.** Nonlinear Problem on Hyperelastic Deformation of the Shell of Average Thickness FEM // Applied Mathematical Sciences – 2014. – V. 8, № 60. – P. 2965–2972.
17. **Golovanov A.I., Pesoshin A.V., Tyuleneva O.N.** Modern finite element models and methods of the investigation of thin-shell constructions [Sovremennyye konechno-elementnyye modeli i metody issledovaniy tonkostennykh konstruksiy]. – Kazan: Kazan. St. un-ty, 2005. – 442 p. (in Russian)
18. **Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F.** The finite element method in statics and dynamics of thin-shell constructions [Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksiy]. – Moscow: FIZMATLIT, 2006. – 392 p. (in Russian)
19. **Yang H.T.Y., S. Saigal S., Masud A., Kapania R.K.** A survey of recent shell finite elements. // Int. J. for numerical methods in engineering. – 2000. – V. 47. – P. 101–127.
20. **Sakharov A.S., Kislookiy V.N., Kirichevskiy V.V., Al'tenbakh I., Gabbert U., Dankert YU., Keppler X., Kochyk B.** Finite Element Method in Mechanics of Solids [Metod konechnykh elementov v mekhanike tverdykh tel]. – Kiev: Vishcha shkola, 1982. – 480 p. (in Russian)
21. **Berezhnoy D.V.** Curved finite element of plates and shells of average thickness considering the compression [Iskrivlennyy konechnyy element plastin i obolochek sredney tolshchiny s uchetom obzhatiya] // Trudy XVII mezhdunar. konf. no teorii obolochek i plastin. – Kazan: Kazan. st. un-ty, 1996. – V. 2. – P. 94–99. (in Russian)
22. **Guriyelidze M.G., Golovanov A.I.** Calculation of thick shells considering large deformations [Raschet tolstostennykh obolochek s uchetom bol'shikh deformatsiy] // Trudy XVII mezhdunar. konf. po teorii obolochek i plastin. – Kazan: Kazan. st. un-ty – 1996. – V. 2. – P. 118–123. (in Russian)
23. **Golovanov A.I., Guriyelidze M.G.** Step by step formulation of the solution of geometrically nonlinear problem of FEM [Poshagovaya postanovka resheniya geometricheski nelineynoy zadachi MKE] //

Dinamicheskiye i tekhnologicheskiye problemy mekhaniki konstruktsiy i sploshnykh sred. – Moscow, 1998. – P. 82–87. (in Russian)

24. **Bazhenov V.A., Sakharov A.S., Tsykhanovskiy V.K.** Moment diagram of finite element method in problems of nonlinear continuum mechanics [Momentnaya skhema metoda konechnykh elementov v zadachakh nelineynoy mekhaniki sploshnoy sredy] // Prikl. mekhanika. – 2002. – V. 38, № 6. – P. 24–63. (in Russian)
25. **Konyukhov A.V., Konoplev Yu.G.** Model of thermohyperelasticity and its application to the investigation of the loss of stability of the blown-up plates [Model' termogiperuprugosti i yeye primeneniye k issledovaniyu poteri ustoychivosti razduvayemykh plastin] // Izv. vuzov. Aviats. tekhnika. – 2006. – № 4. – P. 7–13. (in Russian)
26. **Kara N., Kumbasar N.** Three dimensional finite element for thick shells of general shape // Int. J. for Physical and Engineering Sciences. – 2001. – V. 52. – P. 1–7.
27. **de Sousa R.J.A., Cardoso R.P.R., Valente R.A.F., Yoon J.-W., Gracio J. J., Jorge R.M.N.** A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid-shell element with multiple integration points along thickness: Part I - geometrically linear applications // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. – 2005. – V. 62, № 7. – P. 952–977.
28. **Sze K.Y.** Three-dimensional continuum finite element models for plate/shell analysis // Prog. Struct. Engng Mater. – 2002. – V. 4. – P. 400–407.