УДК 517.958

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-МЯГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ[1)]

И.Б. БАДРИЕВ[1], В.В. БАНДЕРОВ[1], М.В. МАКАРОВ[1], В.Н. ПАЙМУШИН[1,2]

[1] *Казанский (Приволжский) федеральный университет,*

[2] *Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева (КНИТУ-КАИ)*

E-mail: ildar.badriev@kpfu.ru, makarovmaksim@mail.ru, vpajmushin@mail.ru

SOLVING THE NONLINEAR PROBLEMS OF SANDWICH SHALLOW SHELLS WITH TRANSVERSALLY SOFT FILLER

I.B. BADRIEV[1], V.V. BANDEROV[1], M.V. MAKAROV[1], V.N. PAIMUSHIN[1,2]

[1] *Kazan Federal University, Kazan* [2] *National Research Technical A.N. Tupolev University, Kazan*

Аннотация

Рассматриваются задачи об определении напряженно-деформированного состояния трехслойных непологих оболочек с трансверсально-мягким заполнителем, имеющим среднюю толщину. При построении основных соотношений учитывается изменение метрических характеристик в направлении толщины заполнителя. Кинематические соотношения для него выводятся путем последовательного интегрирования по поперечной координате исходных трехмерных уравнений теории упругости, предварительно упрощенных за счет введения предположения о равенстве нулю тангенциальных компонент напряжений. Для решения задачи используется двухслойный итерационный процесс.

Ключевые слова: Математическое моделирование, многослойная оболочка, трансверсально-мягкий заполнитель, итерационный метод, численный эксперимент.

Summary

We consider the problem of determining the stress-strain state of sandwich shallow shells with a transversely soft filler having an average thickness. In constructing the basic relations we take in account the changing of the metric characteristics in the thickness of the filler direction. Its kinematic relations are derived by successive integration by the transverse coordinate of the original three-dimensional equations of elasticity theory, presimplified by the introduction of the assumption of the vanishing of the tangential stress components. To solve the problem, a two-layer iterative method is applied.

Key words: Mathematical simulation, sandwich shallow shell, transversely soft filler, iterative method, numerical experiment.

Введение

Одним из основных способов изготовления трехслойных элементов конструкций является клеевое соединение внешних несущих слоев с заполнителем, которое зачастую может сопровождаться появлением на поверхностях сопряжения слоев технологических дефектов в виде участков непроклея. Исследование процессов деформирования таких элементов прежде всего диктуется необходимостью определения степени их пригодности для дальнейшего использования.

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00955, 13-08-90435, 13-08-97076, 14-01-00755)

В данной работе рассматриваются задачи об определении напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. Для описания напряженно-деформированного состояния в несущих слоях используются уравнения линейной модели Кирхгофа-Лява. Кинематические соотношения для заполнителя выводятся путем последовательного интегрирования по поперечной координате исходных трехмерных уравнений теории упругости, предварительно упрощенных за счет введения предположения о равенстве нулю тангенциальных компонент напряжений [1–4]. Задача рассматривается при наличии ограничений на уровень формирующихся в заполнителе поперечных касательных напряжений, что соответствует использованию идеальной упруго-пластической модели поведения заполнителя и физически нелинейной постановке задачи.

1. Постановка задачи.

Пусть a — длина пластины, $2h$ — толщина заполнителя, $H_{(k)} = h + h_{(k)}$, $2h_{(k)}$ — толщина k-го слоя (здесь и ниже предполагаем, что $k = 1, 2$), $X^1_{(k)}$, $X^3_{(k)}$ — компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k-го слоя, $w^{(k)}$, $u^{(k)}$ — прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности k-го слоя, q^1 — касательные напряжения в заполнителе, $T^{11}_{(k)}$, $M^{11}_{(k)}$, $S^1_{(k)}$ — мембранные усилия, внутренние изгибающие моменты и обобщенные перерезывающие силы в k-м слое, $B_{(k)} = 2\,h_{(k)}\,E^{(k)}/(1-\nu^{(k)}_{12}\,\nu^{(k)}_{21})$ — жесткость k-го слоя на растяжение—сжатие, $E^{(k)}$ — модуль упругости первого рода k-го несущего слоя, $D_{(k)} = B_{(k)}\,h^2_{(k)}/3$ — изгибная жесткость k-го слоя, G_{13}, E_3 — модули поперечного сдвига и обжатия заполнителя, $M^1_{(k)}$ — компоненты вектора поверхностных моментов, $\nu^{(k)}_{12}$, $\nu^{(k)}_{21}$ — коэффициенты Пуассона материала k-го слоя. Несущие слои предполагаются жестко защемленными, так что $u^{(k)} = 0$, $w^{(k)} = 0$, $dw^{(k)}/dx = 0$, $q^1 = 0$ при $x = 0$, $x = a$.

Кроме того, задача рассматривется при ограничении

$$\left| q^1(x) \right| \leqslant q^1_*, \quad 0 < x < a, \tag{1}$$

где q^1_* — заданное предельное значение для заполнителя. Условие (1) соответствует использованию идеальной упруго-пластической модели поведения заполнителя и физически нелинейной постановке задачи

Обозначим $U = \left(w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)}\right)$. На основе метода множителей Лагранжа в [1–3] построен следующий функционал потенциальной энергии деформаций:

$$L(U, q^1) = \frac{1}{2}\int\limits_0^a \left\{ \sum_{k=1}^{2} \left[B_{(k)} \left(\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw^{(k)}}{dx}\right)^2 \right)^2 + D_{(k)} \left(\frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + c_1 \left(q^1\right)^2 + c_2 \left(\frac{d\,q^1}{dx}\right)^2 + c_3 \left(w^{(2)} - w^{(1)}\right)^2 \right\} dx - \int\limits_0^a \sum_{k=1}^{2} \left(X^1_{(k)}\,u^{(k)} + X^3_{(k)}\,w^{(k)} + M^1_{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} \right) dx -$$

$$- \int\limits_0^a q^1 \left(u^{(1)} - u^{(2)} - \sum_{k=1}^{2} H_{(k)}\,\frac{dw^{(k)}}{dx} + c_1\,q^1 - c_2\,\frac{d^2 q^1}{dx^2} \right) dx\,,$$

где $c_1 = 2h/G_{13}$, $c_2 = 2h^3/(3\,E_3)$, $c_3 = E_3/(2h)$ — углы поворотов нормалей к срединной поверхности k-го слоя. Здесь первый интеграл представляет из себя потенциальную энергию деформации, второй — работу заданных внешних сил и моментов, третий — работу неизвестных контактных касательных напряжений на соответствующих перемещениях. В [1–3] установлено, что при отсутствии ограничений (условия (1)) рассматриваемая задача иожет быть сформулирована как задача поиска стационарной точки функционала L. В [5] доказана теорема существования такой точки. В [6] для физически линейной задачи предложен итерационный метод приведены результаты численных экспериментов и их анализ.

2. Итерационный метод. Численные эксперименты.

Обозначим через V_q пространство Соболева функций, имеющих компактный носитель на $(0, a)$ и первую обобщенную производную, суммируемую с квадратом, со скалярным произведением $(u, v)_q =$

$=\int\limits_0^a \Bigl(c_1 uv + c_2 \dfrac{du}{dx}\dfrac{dv}{dx}\Bigr)dx$, через $V_k = \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(0,a)$ – пространства Соболева со скалярными произведениями $(u,v)_k = \int\limits_0^a \dfrac{d^k u}{dx^k}\dfrac{d^k v}{dx^k}\,dx$; положим $V = V_2 \times V_2 \times V_1 \times V_1$, $K = \{q^1 \in V_q : \left|q^1(x)\right| \leqslant q^1_*,\ 0 < x < a\}$. Скалярное произведение в V будем обозначать через $(\cdot,\cdot)_V$. Перепишем (с учетом граничных условий для q^1) функционал L в виде $L(U,q^1) = \Phi_0(U) - \Phi_1(U,q^1) - \Phi_2(q^1)$, где

$$\Phi_0(U) = \frac{1}{2}\int\limits_0^a \left\{ \sum_{k=1}^{2} \left[B_{(k)} \left(\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw^{(k)}}{dx}\right)^2 \right)^2 + D_{(k)} \left(\frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + c_3 \left(w^{(2)} - w^{(1)} \right)^2 \right\} dx - \int\limits_0^a \sum_{k=1}^{2} \left(X^1_{(k)}\, u^{(k)} + X^3_{(k)}\, w^{(k)} + M^1_{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} \right) dx,$$

$$\Phi_1(U,q^1) = \int\limits_0^a q^1 \Bigl(u^{(1)} - u^{(2)} - \sum_{k=1}^{2} H_{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} \Bigr) dx,\ \ \Phi_2(q^1) = \frac{1}{2}\int\limits_0^a \Bigl(c_1 (q^1)^2 + c_2 \Bigl(\frac{dq^1}{dx}\Bigr)^2 \Bigr) dx = \frac{1}{2}\|q^1\|_q^2.$$

Нетрудно видеть, что функционал Φ_0 корректно определен на V, функционалы Φ_1, L – на $V \times V_q$, функционал Φ_2 – на V_q. Ясно, что функционал Φ_1 является неотрицательным, билинейным и непрерывным по обоим аргументам, а значит, в силу теоремы Рисса-Фишера существует линейный непрерывный оператор $C : V \to V_q$ такой, что $\Phi_1(U,q^1) = (CU,q^1)_q = (U,C^* q^1)_V$, для всех $U \in V$, $q^1 \in V_q$, где $C^* : V_q \to V$ – сопряженный к C линейный непрерывный оператор.

Для нахождения стационарной точки $(\widehat{U},\widehat{q}^{\,1}) \in V \times K$ функционала L будем использовать следующий алгоритм. Пусть $q^1_0 \in K$ – произвольный элемент. Для $n = 0,1,\ldots$ найдем U_n как решение задачи

$$(\Phi_0)'(U_n) + C^* q^1_n = 0. \tag{2}$$

Полагаем затем $q^1_{n+1} = P_K \left(q^1_n - \tau \left(q^1_n - CU_n \right) \right)$.

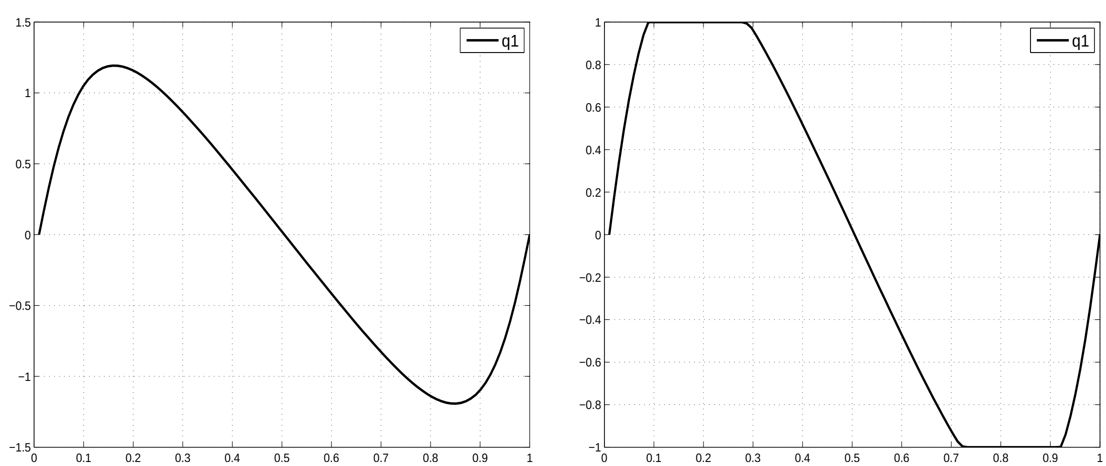

Рис. 1:

Задачу (2) можно решить с помощью предложенного в [6] итерационного метода (см. также [7, 8]).

Были проведены расчеты для модельной задачи при следующих характеристиках пластины: $a = 1$ см, $h = 0.05$ см, $h_{(1)} = h_{(2)} = 0.005$ см, $G_{13} = 15$ МПа, $E_3 = 25$ МПа, $q^1_* = 1$, $X^3_{(1)} = 0.05$ МПа, $X^3_{(2)} = 0$, $E^{(k)} = 7 \cdot 10^4$ МПа, $\nu^{(k)}_{12} = \nu^{(k)}_{21} = 0.3$, $X^1_{(k)} = 0$, $M^1_{(k)} = 0$, $k = 1,2$. На рис. 1 приведены графики касательных напряжений в заполнителе (слева – в случае физически линейной задачи, справа – в случае, когда q^1 удовлетворяют условию (1)). Полученные результаты соответствуют физической картине.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Паймушин В.Н.** К вариационным методам решения нелинейных пространственных задач сопряжения деформируемых тел // Доклады Академии наук. – 1983. – Т. 273, № 5. – С. 1083–1086.
2. **Паймушин В.Н.** Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непроклея // Прикладная механика. – 1987. – Т. 23, № 11. – С. 32–38.
3. **Паймушин В.Н.** Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 2. – С. 171–180.
4. **Паймушин В.Н., Бобров С.Н.** Уточненная геометрически нелинейная теория трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем средней толщины для исследования смешанных форм потери устойчивости // Механика композитных материалов. – 2000. – Т. 36, № 1. – С. 95–108.
5. **Карчевский М.М., Паймушин В.Н.** О вариационных задачах теории трехслойных пологих оболочек // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т. 30, № 7. – С. 1217–1221.
6. **Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Макаров М.В., Паймушин В.Н.** Численное решение задачи о равновесии трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в геометрически нелинейной постановке // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т. 17, № 23. – С. 393–396.
7. **Badriev I.B., Zadvornov O.A., Saddek A.M.** Convergence Analysis of Iterative Methods for Some Variational Inequalities with Pseudomonotone Operators // Differential Equations. – 2001. – V. 37, № 7. – P. 934–942.
8. **Badriev I.B., Karchevskii M.M.** Convergence of an iterative process in a Banach space // Journal of Mathematical Sciences. – 1994. – V. 71, № 6. – P. 2727–2735.

REFERENCES

1. **Paimushin V.N.** Variational methods for solving non-linear spatial problems of the joining of deformable bodies // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1983. – V. 273, № 5. – P. 1083–1086.
2. **Paimushin V.N.** Nonlinear theory of the central bending of three-layer shells with defects in the form of sections of bonding failure // Soviet Applied Mechanics. – 1987. – V. 23, Is. 11. – P. 1038–1043.
3. **Paimushin V.N.** Generalized Reissner variational principle in nonlinear mechanics of three-dimensional composite solids, with applications to the theory of multilayer shells // Mechanics of solids. – 1987. – V. 22 № 2. – P. 166–174.
4. **Paimushin V.N., Bobrov S.N.** Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms // Mechanics of composite materials. – 2000. – V. 36, № 1. – P. 59–66.
5. **Karchevskii M.M., Paimushin V.N.** Variational-problems in the theory of 3-layer slanted shells // Differential equations. 1994. - V. 30, № 7. – P. 1126–1130.
6. **Badriev I.B., Zheltukhin V.S., Makarov M.V., Paimushin V.N.** Numerical solution of the equilibrium of sandwich plate with a transversely soft filler in geometrically nonlinear snanement [Chislennoe reshenie zadachi o ravnovesii trekhsloinoi plastiny s transversalno-myagkim zapolnitelem v geometricheski nelineinoi postanovke] // Vestnik Kazanskogo tkhnologicheskogo universiteta. – 2014. – V. 17, № 23. – P. 393–396. (in Russian)

7. **Badriev I.B., Zadvornov O.A., Saddek A.M.** Convergence Analysis of Iterative Methods for Some Variational Inequalities with Pseudomonotone Operators // Differential Equations. – 2001. – V. 37, № 7. – P. 934–942.
8. **Badriev I.B., Karchevskii M.M.** Convergence of an iterative process in a Banach space // Journal of Mathematical Sciences. – 1994. – V. 71, № 6. – P. 2727–2735.